SCHAUM'S ouTlines

全美经典学习指导系列

流体动力学

〔美〕W. F. 休斯　J. A. 布赖顿 著

徐燕侯　过明道　徐立功　陈义良 译

- 覆盖了课程的所有基础内容
- 增加了波动与稳定性一章
- 100道完整解答的习题
- 通过专业考试的钥匙


科学出版社


麦格劳-希尔教育出版集团

全美经典学习指导系列

流体动力学

〔美〕W.F.休斯　J.A.布赖顿　著

徐燕侯　过明道　徐立功　陈义良　译

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

2002

内 容 简 介

本书涉及流体力学的各个方面，包含超声速流、非牛顿流体等专业知识，是航空学、航天学、土木工程和机械工程学的基础，既适合于大学生、研究生在校学习，又可作为研究人员、相关从业人员的参考指南.本书还含有解方程的一些新知识，是利用计算机实现流体力学的基础.

William F. Hughes, John A. Brighton: Schanm's Outline of Theory and Problems of Fluid Dynamics

ISBN: 0-07-031118-8

图字: 01-2001-5529 号

图书在版编目(CIP)数据

流体动力学/(美)W.F.休斯，(美)J.A.布赖顿著；徐燕侯等译.—北京：科学出版社，2002

(全美经典学习指导系列)

ISBN 7-03-010077-8

Ⅰ.流… Ⅱ.①休…②布…③徐… Ⅲ.流体动力学 Ⅳ.O351.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 007485 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年3月第 一 版 开本: A4 (890×1240)

2002年3月第一次印刷 印张: 20 1/2

印数: 1—4 000 字数: 587 000

定价: 30.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

序　言

一个人要是随便地浏览一下周围环境,看到的东西几乎都是固体.但是当他想起海洋、大气以及外层空间时,就会清醒地认识到:地球表面和整个宇宙的大部分都处于流体状态.

除去科学家关心的宇宙本质(宇宙主要由气体组成)之外,工程师们所关心的服务于人类的设备,都离不开流体.事实上,无法想像机器、设备和工具是不含有流体的、也不需要用流体力学的原理来设计的.泵、鼓风机、压缩机、喷气发动机、火箭和燃气轮机等就是主要的流体机械.飞机和船舶在流体中运动.大气和气象则受流体动力学规律的控制.所有的机器都需要润滑,而润滑剂就是流体.甚至真空管的工作也是依靠电子流.不管多么复杂或高深的设备,总要用到流体动力学的基本概念.

流体动力学在现代科学工程中具有重要的位置.它是航空航天、机械工程、气象、海洋工程、民用工程和生物工程的基础之一.事实上,它是现今所有科学和工程技术的基础.

本书可以作为大学一年级学生流体力学的独立教材,也可以用作补充教材.本书的特色是广泛地涉及到流体力学各个领域.不管是本科生的课程,还是研究生的课程,都可以将本书作为参考书或补充教材.

本书前几章特别注重于流体运动的基本概念,主要是为初学者写的.前三章是守恒方程的积分形式和微分形式的推导.为了帮助学生深人理解控制体、伯努利方程和流体一般运动中非常重要的概念,本书介绍了众多的例子.在第三章中,对重要方程作了简明扼要的概括和对问题求解技巧进行了一般性的讨论,这些对于初学者是很有用的.

本书各章的安排如下,从第一章至第五章,以及第七章,作为本科生流体力学的初级课程;第六章和第八章已扩展到亚声速和超声速空气动力学,作为本科生流体力学的高级课程.

本书余下的部分涉及当前研究的前沿课题.这些章节的目的是:对于不熟悉这些特殊领域的读者来说,从中可以学到其数学模型的形成、简化等技巧,以及目前的进展等入门知识.如果读者有进一步深人研究的兴趣,则可以追溯各章末尾提供的参考文献.这些参考文献连同本书,可以作为独立研究计划的基础.

在这种教材类型的书中,它覆盖的专题和应用的范围明显地受到限制,不可能包括许多当前关心的领域.例如,书中没有包括流体机械的应用和迅速发展着的计算流体动力学(CFD).但是,就一本导论而言,着重于流体动力学的物理实质和数学描述,无疑是恰当的.深人理解本书介绍的材料,将有助于读者阅读各个专题的最新文献.

本书第三版作了很多修订,增加了一些最新成果,并且使其更具可读性.书中增加了一章全新的内容,即波的运动和稳定性.我们已经大量地运用相位复矢量来描写波的行为,并应用于声波、剪切波和表面波.然后,从波的增长行为自然地导出流动稳定性的概念.

作者感谢 E.W.Gaylord 博士对第十二章给予的有价值的帮助,D.C.Wakefield 和 M.Bathurst 对原稿的打字工作以及 Ruth Davis 对本版的文字处理工作.

W.F. 休斯
J.A. 布赖顿

目　录

第一章 绪 论

1.1 什么是流体

研究物体运动的动力学分为两个部分——刚体动力学和变形体(非刚体)动力学.变形体动力学又分为两类——弹性(弹性固体)力学和流体力学.因为现实世界中大部分物体处于流体状态,因此,工程师和科学家就要对流体有所了解.首先要了解什么是流体?流体与弹性固体(例如钢棒)有什么区别?

简单地说,流体没有运动是不能反抗剪力或剪应力作用的,而固体在没有运动的条件下,也能反抗剪力或剪应力的作用.流体通常又分为液体和气体.液体的分子间有凝聚力,所以有一定的体积,但是没有确定的形状.注入任何容器的液体,都将在容器内填满一个与液体自身体积相同的空间,而与容器的形状无关.液体的可压缩性很小,其密度随温度和压强的变化也很小.然而,气体则是由大量运动着的分子组成,分子之间相互碰撞,不断扩散.气体没有确定的体积和形状,气体会充满它所注入的任何容器.对于一定量的气体或者一个气体系统,其压强、温度和体积之间存在一定的关系,即气体的物态方程.

流体力学有着广泛的应用,因此成为整个工程学和应用科学研究的核心和基础之一.管道和沟渠中的流体流动对于土木工程是非常重要的.又如泵、压缩机、热交换器、喷气发动机和火箭发动机等等流体机械的研究,使得流体力学对于机械工程师来说也是很重要的.作为研究空气绕物体流动的空气动力学,则是从事飞机、导弹和火箭设计的航空航天工程师的基本工具.在气象学、水利学和海洋学中,大气和海洋都是流体,因此对流体的研究也是基础.在现代工程中,流体力学与古典学科结合起来形成许多新兴学科,例如流体力学与电磁理论结合成一门磁流体动力学.在新型能量转换装置以及恒星和电离层的研究中,磁流体动力学是至关重要的基础.

由此可见,对于当代的科学家和工程师而言,很好地熟悉流体力学是必不可少的.显然,流体力学及其应用有着非常广阔的前景.本书中,对于大多数基本概念,我们都用实例加以介绍.一旦掌握了这些基础,读者就可以去阅读更为专门的书籍和研究文献,增进对流体力学特定专题的了解.无论如何,在进行更高级的主题研究之前,先打下牢固的基础是极为重要的,这是一条永恒的原则.

我们将从基础的数学公式到当代的高超声速流动理论和磁流体动力学,通过介绍基本概念,给出流体力学学科的概貌.

1.2 数学模型

在刚体力学中,我们通常提出这样的问题:一个质点的空间位置怎样随时间变化?从这个信息出发,所有其他的问题(例如速度和加速度)都可以回答了.设质点的空间位矢为 $\boldsymbol{r}$,则 $\boldsymbol{r}(t)$是最重要的函数.速度和加速度就是 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2$.

然而,在流体力学中我们不是处理单独的质点,而是研究**连续介质**.事实上,我们不必去留意流体中各个质点或一些小滴的轨迹.而是要关心:在空间的某些点上(相对于任何一个固定的坐标系),流体的速度、加速度和热力学参量随时间变化的函数关系是什么?在时间过程中,空间点上的流体不断地随流过来的流体所更新.因此,我们不关心各个单独流体质点的轨迹,也不管某个特定时间是哪个流体质点在这个位置上,我们只关心空间某些点上的历史过程.这种描述流体的方法称为**欧拉描述方法**,与之相反的则是**拉格朗日描述方法**,它像刚体动力学中那样,记录各个流体质点的轨迹.这些问题,我们将在第三章中详细地讨论.

刚才我们已经提到过**连续介质**这一术语.针对流体来说,它的确切意义是什么?我们假设流体质点(或分子)之间的距离非常小,更确切地说,流体分子运动的平均自由程非常小,即相对于流体力学问题中的任何物理尺度来说,非常小.在空气动力学中,机翼的厚度就比绕流空气分子的平均自由程大好几个量级.因此我们假定:所有(微积分中的)数学极限过程都是有意义的,同时,任何体积的流体都能够继续分割成更小的体积,而且保持流体连续介质的特性不变.显然,这种分割最终将破坏流体的连续介质特性.但是我们假定,这时体积的尺度已如此之小,已经进入微观世界,超出了我们讨论的范围.

然而,也有例外的情形.在稀薄气体流动中,分子平均自由程就可以和问题中物理尺度的量级相同.于是,流体的连续介质假定不再成立,我们只能采用严格的微观方法,例如自由分子流理论.本书不涉及稀薄气体理论,自始至终只讨论均匀各向同性的连续介质,严格地限制在能够用宏观方法处理的范围内.

流体力学中有五个基本变量:三个速度分量和两个热力学参量.例如压强、温度、密度、焓和熵中的任何两个热力学参量,都足以确定流体的热力学状态,因此也可以确定出所有其他的热力学参量.一旦规定了速度矢量 $\boldsymbol{V}$ 和两个热力学参量随时间和空间变化的函数,我们就可以完全确定出流体的流场.因此,我们需要五个独立的方程.通常是三个运动方程的分量方程、一个连续方程和一个能量方程.为了便于用三个变量(温度、密度和压强)来写出能量方程,往往还引入一个物态方程.在这种情形下,一共有六个变量和六个方程.在湍流中,同样数目的方程中还会出现附加的未知量,这就破坏了问题的完备的理论模式.

在不可压缩的流体中,由于密度是已知的.为了完整地描述流体的运动,只需求出压强和速度,因此不需要能量方程,此时温度与压强和速度没有耦合关系.如果需要温度的信息,就一定要利用能量方程来求解温度.

1.3 若干定义

流体的流动可以按许多不同的方法来分类.让我们来考察某些不同型的流动,并把这些流动与我们日常的经验和观察联系起来.但是,首先需要定义一些术语,只有这样,我们才有讨论流体各种流动类型的统一语言.然后,我们再来给出更为严格的定义.现在,我们先来给出一些简单并有启发性的定义.

压强 流体静力学(流体处于平衡状态)中的压强定义是作用**在浸没于流体中物体表面上单位面积上的法向压缩力(正应力)**.压强可以通过浸没于流体中单位立方体(单位尺度)表面上作用力来测量.我们必须设想该立方体不会干扰流体,所以,流体中一点的实际压强是作用在该立方体表面上的力除以表面面积,而且是当该表面面积趋于无穷小时的极限.在静止的流体中,一点的压强是各向同性的,即立方体各个面上的压强都相同,而且不管该立方体在空间的取向如何,各个面上的压强也都相同.这种各向同性的压强称为**流体的静压**.这也是热力学中所用的压强(气体定律),而且是热力学的特性之一.如果流体中的压强随空间的位置不同而变化,则在任何固定的流体体积上将存在一个净压力,一定要由某个体力来平衡,例如重力.否则,净压力将使流体产生加速度,导致流体流动.

在流体动力学的状态下(当流体运动时),流体中不仅存在有压强,而且还有其他的切向力,即切应力.然而,压强仍然是各向同性的,并且用上述同样的方法来定义.但是在测量作用在该面积上的正应力时,必须使该面积和当地的流体一起运动.有时在运动的气体中会发生困难,因为立方体的各个方面的正应力并不完全相同.我们仍旧可以定义一个流体静力学的各向同性的压强.不过由于流体黏性的影响,某些方向上将会出现小的附加力.这些概念将在下两章中再作更为详细讨论.

黏性、摩擦和理想流动 所有的流体都有黏性,黏性引起摩擦.在物理问题中,黏性的重要性取决于流体的类型和其物理位形,即流动图像.如果流动中的摩擦是可以忽略的,我们称为理想流动.摩擦可以由黏性或湍流引起.

粗略地讲，黏性是**运动流体对剪切反抗的度量**（注意，流体和固体不一样，流体没有运动是不能反抗剪切变形的）. 想像两块大尺寸的平行平板作定常的相对运动，见图 1-1. 两平板之间的流体具有图示的线性速度剖面（假设沿平面的运动方向上没有压强梯度）. 流体和平板之间没有相对滑移，即在流体和固体的接触面上，流体的速度一定和固体的速度相同. 如果我们讨论一块小的流体元，如图 1-1 所示，作用在顶部的剪应力 τ（在这种情形下，作用在顶部的剪应力在数值上和作用在底部的剪应力相等）可以写成

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.1}$$

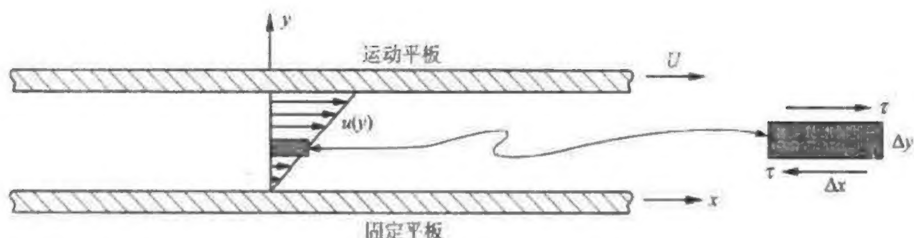


图 1-1 两平行平板之间的黏性流. 速度 u 沿 y 方向呈线性分布，有 $u(0)=0$、$u(l)=U$

其中 μ 是黏性系数，是剪应力和速度梯度之间的比例常数. 黏性系数的单位在英国的工程单位制（以后简称英制）中是 $\text{lbf}\cdot\text{s/ft}^2$；在国际单位制中是 $\text{N}\cdot\text{s/m}^2$. 同时，黏性系数在测量中常用的单位称为 P（泊），$1\text{P}=1\text{dyn}\cdot\text{s/cm}^2$. 黏性系数与质量密度之比称为**运动黏性系数**，通常记作 γ.

液体的黏性系数随温度的增加而减小（我们在寒冬的早晨启动汽车时就会感受到），但是气体的黏性系数都随温度的增加而变大. 流体的黏性系数的大小还依赖于压强，但是，这种依赖关系相对于对温度的依赖关系而言，在工程问题中通常是微不足道的.

剪应力和速度梯度之间这样一个简单的关系式称为**牛顿关系式**. 通常，遵守牛顿关系式的流体称为**牛顿流体**（在三维空间中，牛顿流体更为一般的表达式将在以后导出）.

尽管这个线性的牛顿关系式只是一种近似，但是却很好地适用于一类范围很广的流体. 然而，对于某些物质而言，剪应力不只是速度梯度的函数（速度梯度和剪应变率是相同的），通常还可以是应变的函数. 这种物质称为**黏-弹性流体**. 即使对于剪应力只依赖于速度梯度的简单黏性流体，也可以不是牛顿流体. 事实上存在着这样的流体，其剪应力和应变率之间有着相当复杂的非线性关系. 如果流体的应力-应变关系还取决于事前的工况，即应变状况，则称为**触变流体**（例如印刷油墨）.

另一种流体类型具有塑性行为，其特征是有一个表观的屈服应力，在达到表观的屈服应力之前，流体的性态像固体一样，一旦超过这个表观的屈服应力，则和黏性流体一样. 一些油脂和淤泥的性能就是这样. 塑性流体的另一个极端情形是：在低应变率时，黏性系数很小，很容易流动，但是随着应变率的增大，变得越来越像固体（例如流沙）. 这种流体称为**膨胀流体**. 图 1-2 中用图线说明了这些流体的特性.

水、空气和气体本质上是牛顿流体，但是在流体力学中，对于黏-弹性流体和非牛顿流体的研究，都是非常重要的，虽然通常不是很熟悉和关注.

黏性使流体中能够产生内摩擦力或剪应力. 除此之外，湍流也可以在流体中产生剪应力. 我们将在下节阐述.

如果流体没有黏性，并且不是湍流，这时的流体称为理想流体，或者更确切地说，这时的流动称为理想流动. 因此，理想流体中没有内摩擦，也就没有内耗散或损失. 事实上，真正的理想流体是没有的. 但是在一定的情形下，至少在特定的流动区域中，某些流体的流动非常接近于

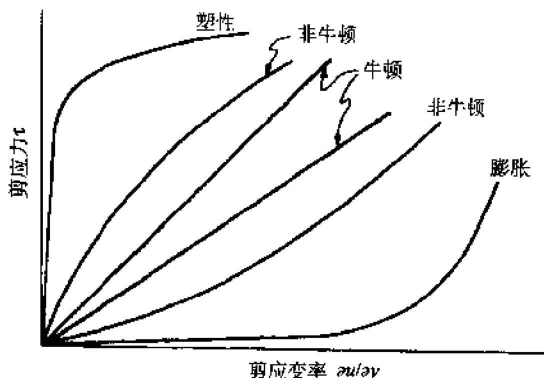


图 1-2 黏性流体和塑性流体的类型

理想流动的条件,在分析处理中可以当作理想流体.例如在空气绕物体的流动(空气动力学)中,除去邻接于机翼或物体表面的薄层(称为边界层)之外,在其余的流动区域中,空气动力学中都处理成理想流动.我们将会了解,将真实流体的流动分成不同的区域,分别可以处理成理想流动区域和黏性或湍流的流动区域,这会带来很大的方便.

层流和湍流 　**层流**和**纯黏性流**两个术语是同义词,是指流体的流动是分层或分片的.湍流则与之相反,在湍流中,速度分量在其平均值上还叠加有随机的湍流脉动(见图 1-3).嵌入层流中的染料和墨水的细线会显示出一条细线,而且总是由相同的流体质点组成.但是在湍流中,染色会很快地变粗,并且随着流动会和周围的流体混合,我们将会观测到许多细丝和混浊的流团逐渐变粗和弥散.层流的一个生动例子是将浓浓的糖蜜从瓶子里倾倒出来所产生的流动.

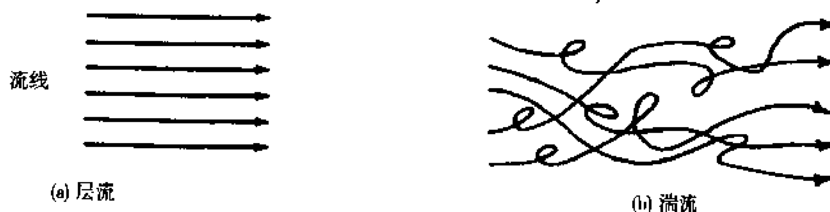


图 1-3 层流和湍流.图中曲线表示流体质点的路径

怎样来确定流动是层流还是湍流呢?对于特定的流体,则由流动的速度和通道的形状或大小来确定.当流动的速度变大时,流动就会经过一个过渡状态,从层流变为湍流.在自然界中,层流和湍流都存在.不过,湍流更为普遍.

观察从香烟和烟囱中升起的烟柱,我们就看到由层流到湍流的过渡的例子.在开始的一段距离上,烟以平缓的层流方式升起.然后是相当突然地,烟柱开始混合,从而转变成湍流,与此同时,烟柱迅速变粗并且扩散.湍流帮助烟柱扩散,同时将烟扩散成更大范围的混沌运动.

黏性效应一直存在于湍流中,但是被占优势的湍流剪应力所掩盖掉了.

表面张力 　用**表面张力**这个术语来表达液体表层的表观应力是不确切的.这一表层的特性像一张展开的薄膜,会出现弯曲的液面(如液-气的分界面,导致两边出现压力差.实际上,表面张力是一种和任何流体-流体之间分界面有关的能量,面液-气分界面是最常见的一种类型.由于液体表面像一张薄膜,这就是为什么液体会出现毛细管现象,以及雨滴几乎是球形的原因.

两种流体分界面两边的压力差 Δp 由表面张力 T(用单位长度上的作用力来度量)来平衡.任何一点分界面的特性,可以用两个曲率半径 R_1 和 R_2(在两个垂直于分界面并且相互正交的平面上的曲率半径)来表征,得出 $T(1/R_1+1/R_2)=\Delta p$.根据众所周知的几何关系,可以

利用曲面方程来给出曲率半径的表达式.

可压缩流和不可压缩流　习惯上将流体分成两类——**气体**和**液体**.气体是可压缩的,其密度很容易随着温度和压强变化.另一方面,**液体**是极难压缩的.所以,对于大多数问题来说,我们可以认为液体是不可压缩的.只有在研究声波在液体中传播的这类问题时,人们才需要考虑液体的可压缩性.

流体的密度是一个热力学参量,它依赖于流体的热力学状态.习惯上将密度 ρ 表示成压强和温度的函数.这个关系式可以从唯象的实验给出,也可以从微观的研究推出.这就是熟知的物态方程.对于理想气体,物态方程可以写成 $p=\rho RT$,其中 R 是常数.对于真实气体,由于它偏离了理想气体,就要用更为复杂的物态方程.对于液体,密度与温度之间的关系和固体一样,有一个膨胀系数,而密度对压强的依赖关系可以写成

$$dp = \beta d\rho/\rho \tag{1.2}$$

其中 β 是体积压缩系数.对于水来说,β 约为 3×10^5psi.所以水的密度的微小改变,都需要有很大的压强.(对于大气中的空气,在绝热压缩时的 β 约为 20psi.)因此,对于绝大多数的实际应用而言,认为液体是不可压缩的.事实上,空气在某些压强有微小变化的流动中,也可以认为是不可压缩的。(这是亚声速空气动力学的情形,低马赫数流动中的空气假定是不可压缩的.)

亚声速流和超声速流　在可压缩流中,速度小于声速的流动(**亚声速流**)和速度大于声速的流动(**超声速流**)之间存在着原则性的区别.(空气在标准条件下,声速约为 1080ft/sec,或 810mi/hr.)亚声速流和超声速之间的一些差别将在以后指出,但是记住这一点是很有用的,即激波只能在超声速中出现.

马赫数 M 是一个相对速度的度量,定义为流体的速度与当地声速之比.

$$M = V/a \tag{1.3}$$

其中 V 是流体速度,而 a 是当地的声速.当 $M<1$ 时,我们称为**亚声速流**;当 $M>1$ 时,我们称为**超声速流**.对于绕物体的流动,当 M 约小于 0.3 时,流动可以近似地看成是不可压缩的.在一个被绕流物体(例如飞机,导弹)上,当一部分区域上的流体绕流是 $M<1$ 时,而其余部分上的流体绕流是 $M>1$ 的,则在该物体的某些点上的绕流是 $M=1$,这种情形称为跨声速流.在同一物体的同一时间上,为什么绕流中同时会有 $M<1$ 和 $M>1$ 的区域呢?原因在于当地声速和流体速度在物面上都是变化的.一般来说,温度在流体流过物面时是变化的,因此,相应的当地声速也是变化的.

定常流　**定常流**的含义如下:在空间的任何点上,流动中的速度分量和热力学参量都不随时间改变.实际上,如果跟随单个流体质点来观察,则在流动过程中,该质点的热力学参量和速度分量都是可以变化的.但这并不影响大局.在流体力学中,我们经常要问的是:在空间的特定点上发生了什么情况?而并不去关心在任何特定的时间上是什么流体质点出现在这里.在这种意义上,定常流中的定常是指:在空间的任何点上都没有什么情况随时间变化.运动图像的快照上所看到的一定是相同的,分不出是什么时间拍的.要理解的重点是:即使在定常流中,空间中任何一点上的流体质点也可以有加速度.流体质点可以流走,但是空间的任一特殊点上,一个流体质点的特性就是所有流体质点到达该点时的特性.

流动分类和类型　我们已经讨论了为流体流动分类的一些基本定义.现在我们可以了解到在实际物理问题中会出现什么样的流动类型,并以此来分类.我们将会看到可以作如下的分类:不可压缩-层流、可压缩-理想-超声速流、可压缩-层流、不可压缩-湍流等等.

1.4　流动的物理分类和流动的类型

有许多将流动分类的方法,例如刚才提到的按流动的结构分类,或者根据流动的情况和形状分类.后者也是可以用来进行分类的,现在举出一些这种的类型.

基本上存在两种流体形状或流动空间区域的类型:外部流动和内部流动.内部流动是指管

道和渠道中的流动，以及类似的限制在一定结构中的流动．外部流动则是流过物体的流动，例如空气动力学中的绕流．下面来更详细地研究这类流动．

外部流动 围绕着物体的流动区域可以分成三个区域．远离物体的流动本质上是理想的，因为其中摩擦力并不重要．邻接物体的流动发展出一个剪切层（因为在物体的表面上流体的相对速度必须为零），剪切层中黏性和湍流是必须考虑的．这一内摩擦层称为**边界层**．边界层可以是层流的，也可以是湍流的．物体后面的尾迹（第三个不同的区域）发展出一个通常是高湍流度的低压区（因此由尾迹产生阻力）．图 1-4 给出了有尾迹的绕圆柱流动．尾迹是由于边界层从物体表面上分离出来所形成的．事实上，物体后面的理想流动区域（尾迹以外的区域）和尾迹区域的分界处，很清楚是一层剪切层（图 1-4(a)）．

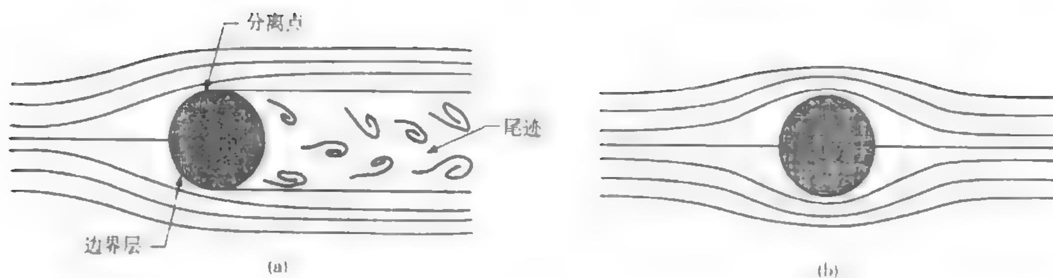


图 1-4 (a) 绕圆柱流动的边界层和分离；(b) 无边界层分离的理想流动

由流体黏性所带来的边界层是尾迹形成的原因．如果完全没有黏性，那么在这种绝对的意义上，流体是无摩擦的，流动就不会分离，也就不会有尾迹．如果不存在尾迹，物体前后的流动图像（理想情形）一定是对称的，则物体前面的压强与物体后面的压强相同，那么浸没入流体流动中的障碍物上就没有阻力．没有阻力的结论与实验相矛盾．这使我们认识到，所有流体都必须有一些内摩擦．流体力学作为一门科学在发展的早期，总认为黏性可以忽略，因此在数学上将流动当成处处是理想的．于是在理论上预言：浸没入流动中的障碍物不受阻力．因为这个结论与实验结果相矛盾，所以称为**达朗贝尔佯谬**．直到 19 世纪的初期，普朗特（德国的流体动力学家）引入边界层概念，才搞清楚并不存在什么佯谬，只要计及黏性，不管多小的黏性系数，都能带来相应的尾迹，并产生阻力．

如果物体是流线型的（图 1-5），即尾缘做成很平缓光滑的轮廓，就不会发生分离，整个边界层紧贴在物体上．流线型可以充分降低阻力，所以绝大多数空气动力学部件（机翼等）都是流线型的．在这种情形下，除去边界层和一层很薄的尾迹之外，环绕物体的流动都是理想的．正如我们将要看到的，在这种情形下的边界层很薄，除去计算摩擦阻力之外，流动图像可以很好地用理想流体的流动图像来描写．在亚声速空气动力学中，升力由（理想的）位势流来确定，而阻力在实质上是由边界层来确定的．

边界层本身可以是层流的，也可以是湍流的，依赖于所包含的参量．在大多数的实际情形

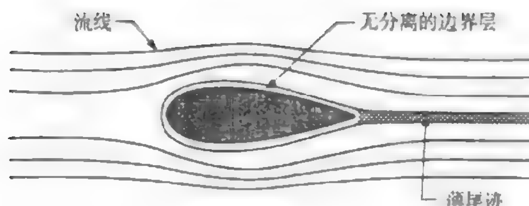


图 1-5 绕流线型物体的流动．尾缘缓慢地变尖，防止了边界层的分离

中,边界层沿着物面从层流转变成湍流.边界层过渡到湍流,通常会延迟分离.但是,在一部分流线型物体中,分离并不明显,最后湍流边界层并入尾迹,如图 1-6 所示.

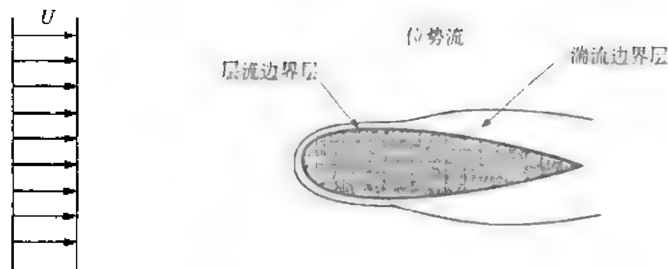


图 1-6 边界层无分离但有转捩的亚声速流.边界层增厚

如果流动速度很小,则密度的变化就很小,流动可以认为是不可压缩的.(这个概念将在第七章中证明.)于是流动图像如图 1-5 或图 1-6 所示.

如果流动速度增加到马赫数大于 0.3,则密度的变化就显得重要了.但是,一般的流动图像仍旧如前面的各图所示.不过,当马赫数的数值增加到超过 1 之后,就会出现激波,流动将如图 1-7 所示.

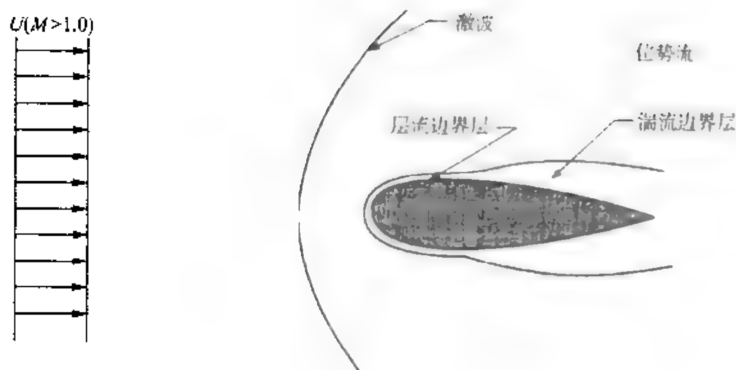


图 1-7 超声速绕流

如果马赫数的数值增加到超过 6,则离解和电离就会发生了.

内部流动 在管道、渠道和喷管内,以及在流体机械中,流体的流动受到壁面的限制,这种流动就是通常所指的**内部流动**.对于气体而言,内部流动在通道内的主要部分可以近似地认为是理想流.虽然如此,但是在管壁上发展出边界层(通常是湍流的).在既是黏性又是湍流的流动中,边界层厚度随着流动向下游增加,最后扩展到渠道或管道的整个横截面上.

现在,我们应该来作出专题的划分.如图 1-8 所示,从左到右,一般的是从最简单的到最复杂的.这些专题的划分完全是任意的,代表了由不同的特殊的数学方法表征的流动类型.

还有另一种流动的分类方法,也许更容易理解一些,这是按流动发生的物理背景来划分的.我们已经尽量将每章的结果应用于各种实际问题,因此本书主要是按应用来划分的.通常在标准的教科书中混合分类.我们能够按照下述专题分章,例如涡轮机、明渠流动、空气动力学、以及波动和声学(提到一些).我们在全书的正文以及习题的解答中,自始至终地穿插着讨论了许多上述问题的应用.

1.5 怎样描述流体的运动

为了描述流体的流动,我们通常要提出这样的问题:什么是流体的性质？哪些是热力学的

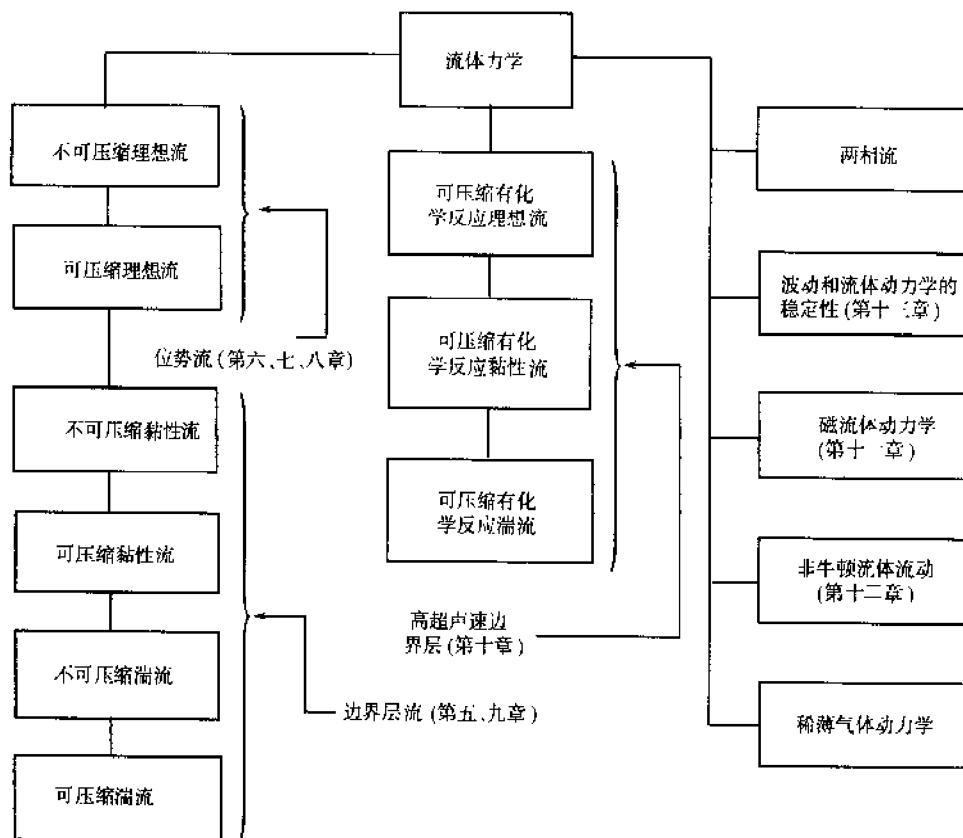


图 1-8　流体力学的专题分类

性质？哪些是力学的性质？以及空间特定位置上特定时间的速度矢量和加速度矢量是什么？一般地说，我们不去观察单个的流体质点. 我们首先建立一个坐标系，以确定空间中点的位置，就像地图上的经纬度一样. 于是，我们就可以描述一个空间点上随着时间的变化所发生的事情. 不同的流体质点不间断地通过该点，如果通过该点时，所有的流体都作着同样的运动，并且有着同样的性质，则我们说该点流动是定常的.（流体质点可以有速度和加速度，但是对于定常流动而言，这些量都不随时间变化.）

因此，在流体力学中，我们通常用空间坐标来表示“场的位置”或空间的位矢 $\boldsymbol{r}$. 这种坐标对时间的导数是没有意义的，例如 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. 于是，流体力学的主要问题是求出作为位矢 $\boldsymbol{r}$ 和时间 t 的函数的速度矢量（以及其他特性量）. 这种坐标系称为**欧拉坐标系**，是以 18 世纪著名的数学家 L. 欧拉的名字命名的.

欧拉坐标系和刚体力学中所用的拉格朗日坐标系相反（有时拉格朗日坐标系也在流体力学中用于特殊的问题）. 在拉格朗日坐标系中，质点的位矢可以表示成 $\boldsymbol{r}(t)$. 坐标确定出流体质点的空间位置，并且是时间的函数. 这时速度就是 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$，加速度就是 $\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2$.

显然，在欧拉坐标系中，$\boldsymbol{r}$ 对时间 t 的导数是没有意义的，必须用特殊的方法来表述速度和加速度，我们将在第三章中讨论这种方法. 不过，必须记住，速度和加速度都是矢量，不管怎样表述它们，速度和加速度矢量本身在欧拉表述和拉格朗日表述中都是一样的。

有时初学者会感到疑惑：在“定常流”中，流体怎么会有加速度. 我们必须记住，定常流是指空间的固定点上（随时间）发生什么情况. 如果我们跟着一个加速的流体质点一起运动，即使在定常流中，也会观察到速度随时间的变化. 总之，在定常流中，当流体质点经过流场中任意给定的位置时（即空间中任意给定的点时），每一个流体质点都表现出有相同的行为，具有相同的性质.

1.6 流体力学中的单位

本书中将给出流体力学的定律，并将其表达成数学方程的形式.这些方程不依赖于所用的单位制.目前，全世界有两种广泛应用的单位制：英国工程制(English engineening system)和国际单位制(Le Systéme International d' Unités).世界上的大多数国家已经用国际单位制来代替英制.但是在工程实际中，英制仍在广泛地应用，也许还将持续一个相当长的时期.因此，有必要精通这两种单位制.在附录中，我们将给出单位制更为完整的讨论.这里只作简要的介绍.

在任何一个特定的单位制中，一般都有两种方法，可以用来得出流体力学中的一套协调的单位.一种是采用M、L、T和θ(质量、长度、时间和温度)作为基本量纲，另一种则以F、L、T和θ(力、长度、时间和温度)作为基本量纲.一旦选定基本量纲之后，根据定义和定律，所有其他物理量的量纲都可以用基本量纲表示出来.(如果要研究电的现象，还需要再任意选定一个电学的量纲，例如电荷).

在M、L、T、θ和F、L、T、θ两者之间的选择是任意的，但是两者一定是关联的，根据牛顿第二运动定律，即力=质量×加速度($\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$)，可以相互转换.例如，我们选定lbf(磅力)为力的单位，则单位质量的物质在1lbf力的作用下，其加速度为1ft/sec^2.这个单位质量称为1slug.在国际单位制中，力的单位是N(牛顿)，相应的质量单位是kg(千克).1N的力使1kg的物体产生的加速度是1m/s^2.

在重力作用下，1slug质量物体的加速度为$g\text{ft/sec}^2$(这里g是由重力所产生的加速度).因此，作用在1slug质量上的重力为32.174lbf(在地球的标准海平面上).1slug质量的物体在地球表面的“重量”为32.174lbf.1kg质量的物体在地球表面上受到gN的力的作用，其中g在地球的标准海平面上为9.807m/s^2.

与牛顿定律无关的，还有其他的方法将质量和力联系起来.1lb(磅质量)的质量定义为在标准海平面上受到地球1lbf的力吸引的物体的质量.类似的，在国际单位制中，1kg(千克质量)的质量可以定义为在标准海平面上受到地球1kgf(千克力)吸引力的物体的质量.为了满足牛顿第二定律以及量纲的一致性，必须引入一个变换系g_c(有单位的)，使$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}/g_c$(其中$F$用lbf，$m$用lb，或者$F$用kgf，$m$用kg)，其中$g_c$在数值上等于地球标准海平面上的重力加速度$g$.因此

$$\text{英国工程制中}: g_c = 32.174\,\frac{\text{lb}}{\text{lbf}}\,\frac{\text{ft}}{\text{sec}^2},$$

$$\text{国际单位制中}: g_c = 9.807\,\frac{\text{kg}}{\text{kgf}}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

在本书中，我们用了英国工程制和国际单位制，可以总结成下述附表.必须注意，如果在我们所用的单位制中，质量单位用lb，力的单位用lbf，则在所有的动力学方程中，都必须加上一个变换系数g_c.开始时，这种单位系统经常引起混乱，不过定义了质量单位slug和kg之后，我们不再需要引入g_c，g_c不再出现了.贯穿本书的单位制中，g始终理解成是当地的重力加速度.从lb到slug的变换是很简单的，1slug=32.174lb，所以g_c的数值就是变换系数.

量纲	英国工程制	国际单位制
力	lb(磅)	N(牛顿)
质量	slug(斯)	kg(千克)
时间	sec(秒)	s(秒)

续表

量纲	英国工程制	国际单位制
长度	ft(英尺)	m(米)
压强	$lb \cdot ft^{-2}$	$N \cdot m^{-2} = Pa$(帕)
速度	$ft \cdot sec^{-1}$	$m \cdot s^{-1}$
加速度	$ft \cdot sec^{2}$	$m \cdot s^{-2}$
黏性系数	$lb \cdot sec \cdot ft^{2}$	$N \cdot s \cdot m^{-2} = Pa \cdot s$
绝对温度	°F(华氏度)	K(开尔文)
密度	$slug \cdot ft^{-3}$	$kg \cdot m^{-3}$
比重	$lb \cdot ft^{-3}$	$N \cdot m^{-3}$

例　　题

下面叙述了一些简单的实验,这些实验说明某些流体流动的特性:

1.1　将少量糖浆或糖蜜倒入盘中,再在糖浆上倒一些牛奶,并试着将它们混合起来.此时发生什么情况?

解　我们会看到:黏性如此之大,以致搅拌引起的混合是层流的,而且混合相当缓慢.湍流混合要远快于层流混合,为什么?在稠的糖浆中也有分子扩散,但是相对于混合效应来说,是微不足道的.

1.2　观察从香烟升起的烟柱.请注意,烟柱是如何从层流状态开始,然后突然地变成湍流的.随着烟柱的升起,流动变得不稳定了,最后发展成湍流.

1.3　打开自来水龙头,将其调整到水流呈一非常细的层流细流.在水龙头下面几英寸的地方将出现什么情况?

解　流动再一次变得不稳定而成为湍流.

1.4　在上例中再增加流量,将会发生什么情况?

解　自来水管中的水流将变成湍流,所以水流离开水龙头时就是湍流的.

1.5　在有风的日子里观察低空的云系,特别是大雨时的云系.云系的流动是湍流的吗?它与水龙头出来的流动有着不同的尺度吗?

1.6　设有点燃的香烟或由管道所产生的上升烟柱.取一铅笔并保持水平地放在烟流中.观察一段时间,烟流绕过铅笔,并从铅笔的两侧发生边界层分离.通过向管道或香烟吹气,能产生出浓烟柱,则效果最好.

1.7　在前面的实验中,烟为什么会升起?

补 充 习 题

1.8　1slug 质量的物体在地球表面上有多重?

答案:32.2lbf.

1.9　1lb 质量的物体在地球表面上有多重?

答案:1lbf.

1.10　月球的重力加速度约为地球上重力加速度的 1/6.问 1lb 质量的物体在月球表面上有多重?

答案:1/6lbf.

1.11　重量经常以 kgf 为单位.问 1kg 质量的物体在地球表面上有多重?

答案:1kgf.

1.12　N 是专门的重量单位.一物体重 1N,则用 kgf 来计量,其重量是多少?

答案:0.102kgf.

1.13 设一悬浮在空气中的球形肥皂泡.你能说出肥皂泡内的气压大致是多少吗?如果给你肥皂泡的直径 D 和肥皂泡薄膜的有效表面张力 T,则其内部的气压是多少?

答案:高出大气压力的部分 $\Delta p=4T/D$.

1.14 空气平台是一个很大的工作平面,用于将重物支撑在一空气的薄层上,使得重物在移动中受到的摩擦阻力很小.空气从工作平台表面上密布的小孔吹出.设一块 1m^2 重的平板放在空气平台上,气垫厚 1mm,为使重平板沿工作平台以速度 $1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 运动,若黏性系数 $\mu=2.18\times10^{-5}\text{N}\cdot\text{S}\cdot\text{m}^{-2}$,则需要多大的推力?

答案:$2.18\times10^{-2}\text{N}$.

1.15 若用机油来代替上题中的空气,其黏性系数 $\mu=0.10\text{N}\cdot\text{S}\cdot\text{m}^{-2}$.试对比空气和机油的摩擦特性.将答案的单位转换成 lbf,再进行比较.

第二章　流体静力学

2.1　压强

在开始流体力学的实际研究之前,有必要先讨论一下静流体力学.这是因为静流体力学可以将一些常识直接应用到真正的工程问题中去,而且不需要涉及复杂的概念.在静流体力学中压强的概念特别重要.例如确定水对水坝的作用力,水对水中物体的作用力,一般都离不开压强.还有海洋深度勘测,远距离物体探测并营救困于深水的人们都是近年来的热点.

压强定义为应力,或单位面积上的表面力,

$$p \equiv \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A} \tag{2.1}$$

在真实流体中,当我们假设面积元趋于零时,将出现流体连续性不再成立这个问题.因此,连续性假设与导数和微分的数学定义存在矛盾.这个矛盾也出现在流体力学微分方程的导出过程中.但是,我们可以这样来解决,假定在所有的感兴趣的宏观尺度上,流体是连续介质.

让我们来考察一个盛有静止液体的容器.设想从中取一小块液体体积,由于它没有加速度,因此受到的合力为零.为了说明问题,我们特别选择如图 2-1 所示的一个体积元.

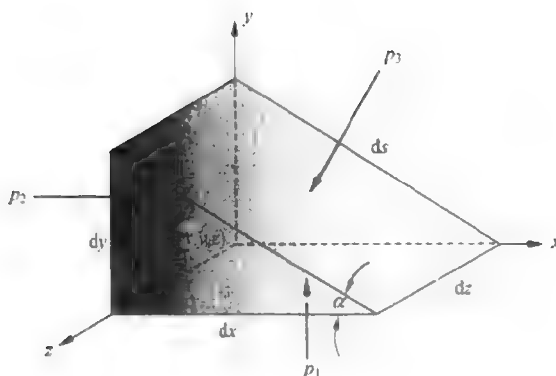


图 2-1　作用在流体体积元上压力的平衡

因为流体中没有相对运动,于是流体中的剪应力应该处处为零.惟一作用在体积元上的表面力沿表面的法向(压强).同时,惟一的体积力来自地球的重力场,沿着 y 的负向.因此,我们得出 x 方向的合力为

$$p_2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z - p_3 \mathrm{d}z\mathrm{d}s\sin\alpha = 0$$

其中 $\mathrm{d}s\sin\alpha = \mathrm{d}y$,因此,$p_2 = p_3$.在 y 方向上①:

$$p_1 \mathrm{d}x\mathrm{d}z - p_3 \mathrm{d}z\mathrm{d}s\cos\alpha - \frac{1}{2}\rho g \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

其中 ρ 为流体的质量密度,且有 $\mathrm{d}s\cos\alpha = \mathrm{d}x$,给出

---

①　在本书中,英制以 slug[斯(勒格)]为质量单位,国际单位制中以 kg 为质量单位.因此密度 ρ 的单位是 slug/ft^3 或 kg/m^3,重度 γ 的单位是 lbf/ft^3 或者 N/m^3.γ 定义为 $\gamma = \rho g$.由于本书中只将 lb 用于力的单位,在一般情况下,不再加下标 f,记作 lbf.关于单位与量纲的讨论见附录 B.

$$p_1 - p_3 - \frac{1}{2}\rho g \mathrm{d}y = 0$$

因为上式第三项远小于前面两项，所以

$$p_1 = p_2 = p_3$$

由于体积元的摆放位置与方向是可任意选取的. 因此，我们已经证明如下结论：静止流体中任意一点上的压力在所有方向都是相等的，即压强是各向同性的.

在英国工程单位制中，压强单位是 $\mathrm{lbf/ft^2}$ 或者 $\mathrm{lbf/in^2}$，记作 psi（$1\mathrm{psi} = 1\mathrm{lbf/in^2}$）. 在国际单位制中，压强的单位定义为 $\mathrm{N/m^2}$ 或者 Pascal（帕斯卡），记作 Pa（帕）. $1\mathrm{Pa} = 1\mathrm{N/m^2}$. 因为 1Pa 压强非常小，因此，常用的压力单位是 kPa 和 MPa. 为了对国际单位制中的压强大小有一个感性认识，1 个大气压强（14.7psi）约为 101 000Pa，即 101kPa 或 0.101MPa.

压强与大气压强的差值称为**表压**. 在许多问题中，重要的只是压强差，所以表压用起来很方便. 因为经常也要用到绝对压强，例如在作为理想气体定律的物态方程中，就是这样. 所以在应用中，一定要小心加以区分. 在英国工程单位制中，压强单位是 $\mathrm{lbf/ft^2}$，在表示绝对压强时记作 psia，在表示表压时记作 psig.

2.2　流体静力学的微分方程

我们定义流体的**平衡状态**为：流体的每个质点或者都处于静止状态，或者相互间都没有相对运动. 上述两个条件的重大区别在于：前者整个流体系统都不可能存在加速度，后者则整个流体系统都可以有加速度. 我们来讨论这两种情况.

这里有两种需要考虑的力：(1) 体积力——从远处物体作用在流体质点上的力（例如重力，磁场力等）；(2) 表面力——由于与其他流体质点或者固壁直接接触而产生的作用力[由压强和切向力（剪应力）而产生的作用力].

我们来考察盛有静止流体的容器. 现在，我们从容器中选取一个很小的流体体积，具有立方体的形状，如图 2-2 所示. 我们假设重力指向 z 的负方向.

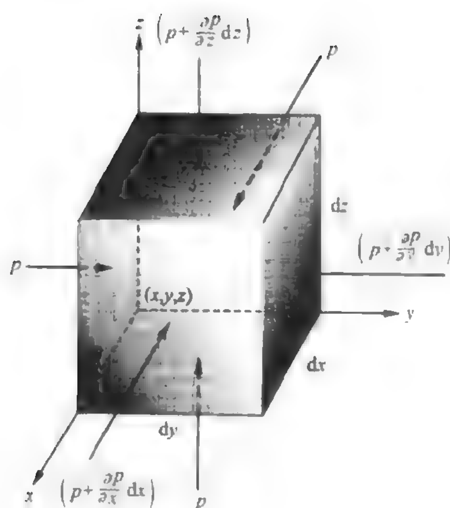


图 2-2

我们可以假设每一个表面力都是均匀作用的，因为可以证明：任何非均匀性带来的只是二阶微量，不会影响最后的结果. 不同坐标轴方向的合力为

$$x\ 方向\quad p\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

$$y\text{ 方向}\quad p\mathrm{d}x\mathrm{d}z-\left(p+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z=0$$

$$z\text{ 方向}\quad p\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\left(p+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\rho g\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

简化后得

$$\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g \tag{2.2}$$

根据方程组(2.2),我们有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=-\rho g \tag{2.3}$$

这是一个非常重要的流体静力学方程.如果流体的密度是常数,方程(2.3)可以在任何两点之间积分出

$$\int_{p_1}^{p_2}\mathrm{d}p=-\rho g\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{d}z$$

得

$$p_2-p_1=-\rho g(z_2-z_1) \tag{2.4}$$

对于静力学平衡的流体,方程(2.4)描述了其压强随高度变化的关系.在容器中选取一轴线垂直于地球表面的正圆柱流体,通过研究作用在这一流体柱上的力的平衡条件,也可以独立而简单地导出方程(2.3).

方程(2.4)只在不可压缩流体中成立.现在简要地研究一下可压缩流体的压强变化问题.从理想气体开始,根据方程(2.3),我们有

$$\mathrm{d}p=-\frac{pg}{RT}\mathrm{d}z$$

其中 R 是气体常数,T 是绝对温度.对于等温大气,我们可以从上述方程积分出

$$\ln\frac{p}{p_1}=-\frac{g}{RT}(z-z_1)$$

或者

$$p=p_1e^{-(g/RT)(z-z_1)} \tag{2.5}$$

其中 p_1 是某个已知高度 z_1 上的压强.我们可以取 $z_1=0$,则 p_1 对应于地球表面的大气压,于是我们看到:等温大气层的压强随着高度的增加按指数规律下降.实际上,地球表面大气层的温度通常是随高度增加而下降的.然而在特殊条件下,地球表面上一个小的距离内,温度可能是随高度而上升的.正好与压强相反.

2.3 压强的测量方法

压强计是一种利用流体柱位移来确定压强差的装置.利用方程(2.4)将压强差和流体柱的高度联系起来.我们可以将方程(2.4)写成

$$p_2-p_1=\gamma h=\rho gh \tag{2.6}$$

其中

$$h=-(z_2-z_1) \tag{2.7}$$

测量压强差的 U 型管压力计如图 2-3 所示. 压强 p_A 与 p_B 之间的差可用如下方法确定：设给定点 a 的压力为

$$p_a = h_1\gamma_{水} + (h_3 - h_1)\gamma_{空气} + p_A$$

或

$$p_a = h_2\gamma_{水} + (h_3 - h_2)\gamma_{空气} + p_B \tag{2.8}$$

相减得

$$p_A - p_B = (h_2 - h_1)(\gamma_{水} - \gamma_{空气}) \tag{2.9}$$

由于空气的比重远远小于水，所以压强差近似于液体的高度差乘上水的重度：

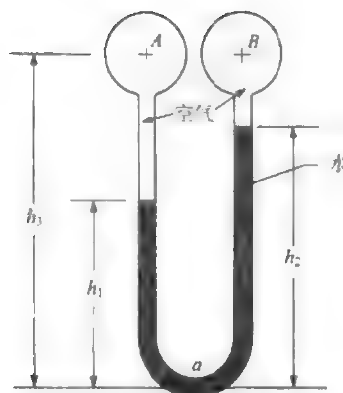
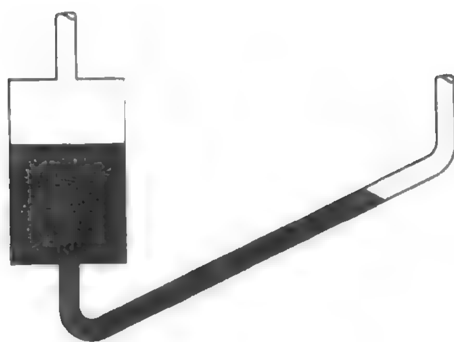


图 2-3　U 形管压力计

$$p_A - p_B = (h_2 - h_1)\gamma_{水} \tag{2.10}$$

根据实际应用，压强计可以有不同的形状、不同取向和采用不同的流体. 例如，为了改进垂直压力计的精度，可以采用倾斜压强计，如图 2-4 所示，或者采用双流体压强计，如图 2-5 所示，可以同样提高精度. 这两个例子中将压强差与流体柱的偏移联系起来的方法本质上与 U 型管原理相同.


图 2-4　倾斜压力计

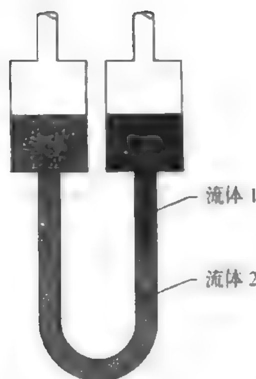


图 2-5　双流体压力计

2.4　流体对浸没其中物体的作用力

流体作用在物体上表面力的合力，可以通过整个表面上各面元表面力的矢量和来确定，

$$\boldsymbol{F} = \int_A \mathrm{d}\boldsymbol{F} \tag{2.11}$$

其中

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = p\mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

且

$$p = p_0 + \gamma h \tag{2.12}$$

这里 p_0 是自由面上的压强，h 是在自由面下的深度.

这些就是用来确定作用在浸没物体表面力的全部方程. 于是，在特定的应用中，就需要将深度 h 和面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 用同样的积分变量表示出来. 同时，在对方程进行积分之前，一定要将其

写成标量形式.我们来研究某些特殊情形.

水平的平面　设一水平平面位于液体下深度 h 处,如图 2-6 所示.作用在物体表面一侧的力为

$$F = \int_A \mathrm{d}F = \int_A (p_0 + \gamma h)\mathrm{d}A = (p_0 - \gamma h)A \tag{2.13}$$

倾斜的平面　其次,设浸没在流体中的倾斜平面,如图 2-7 所示.在此,我们有作用在平板上的力(垂直于平板)为

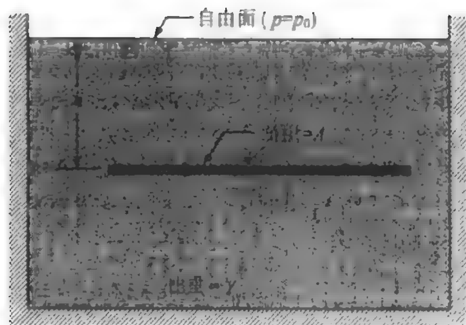


图 2-6　浸没的水平平板

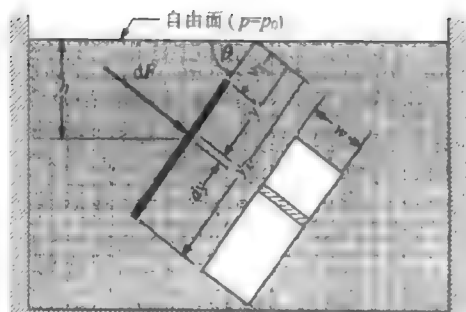


图 2-7　浸没的倾斜平板

$$F = \int_A \mathrm{d}F = \int_A (p_0 + \gamma h)\mathrm{d}A = p_0 A + \gamma \int_{y_1}^{y_2} wy\sin\theta \mathrm{d}y$$

$$= p_0 A + \frac{1}{2}\gamma w \sin\theta (y_2^2 - y_1^2) \tag{2.14}$$

其中 w 为倾斜平板的宽度。

曲面　设曲面如图 2-8 所示;力的分量为

$$F_x = \int_A (p_0 + \gamma h)\mathrm{d}A_x \tag{2.15}$$

$$F_y = \int_A (p_0 + \gamma h)\mathrm{d}A_y \tag{2.16}$$

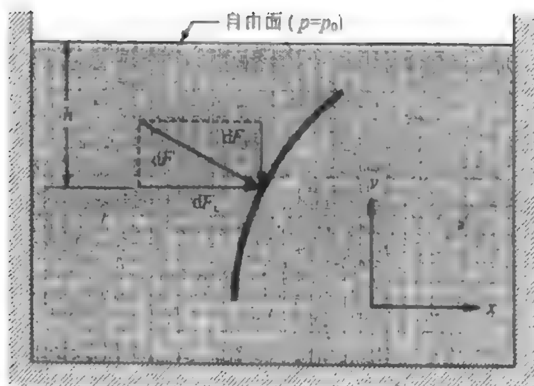


图 2-8　浸没的弯曲板

就确定浸没物体的受力来说,对这些方程进行积分并不总是最方便的方法.例如,我们可以观察到:任何浸没物体表面上作用力的垂直分量始终等于直接位于表面上方的流体的重量加上自由面压力,而水平分量由这个平面在垂直方向上的投影决定.

浮力　阿基米德原理说明：一个浸没在流体中物体受到的浮力等于它排开流体的重量.因此，这个力(浮力)一定等于浸没物体的体积乘上流体的重度.

我们认为这是很重要的,浮力也可以通过压强和面积的乘积的铅直分量对于整个浸没物体的表面求积来计算

$$F_B = \int_A p\mathrm{d}A_y \tag{2.17}$$

正如我们已经指出的,由此导出

$$F_B = \gamma \times V \tag{2.18}$$

其中 V 为浸没物体体积.

2.5　没有剪应力的加速运动流体

在前面几节中,我们已经研究了处于静止状态的流体.现在来研究等加速度(加速度不随时间变化)运动的流体,而且每个质点与其直接相邻的质点之间没有相对运动,流体的运动如刚体一样.例如:考虑一个具有等加速度向上和向右运动的液体容器,如图 2-9 所示.利用节 2.2 中相同的方法,很容易证明:对于容器中一个无穷小的体积元,牛顿第二运动定律给出

$$\partial p/\partial x = -\rho a_x,\quad \partial p/\partial y = -(\rho a_y + \gamma)$$

积分得

$$p = -[\rho a_x x + (\rho a_y + \gamma)y] + C \tag{2.19a}$$

自由面的形状由 $p = p_0$ 决定,自由面是一个平面.等压面都是平行面,它们相对于水平面的倾角为

$$\theta = \arctan a_x/(a_y + g) \tag{2.19b}$$

其中 θ 的含义见图 2-9.

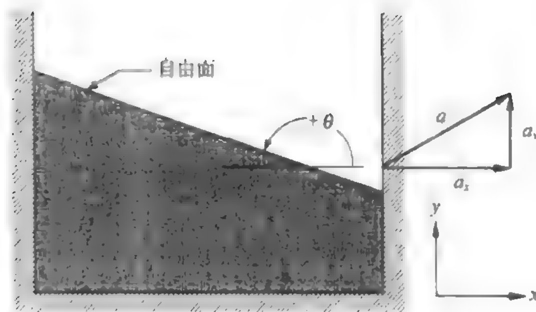


图 2-9　加速运动的流体容器.重力沿负 y 方向,所以 a_x 和 a_y 分别与地球表面平行和垂直.若 a_x 和 a_y 都是正的,则液面的斜率是负的,如图所示

流体的质点作等加速度运动的另一个例子为:流体作为一个整体作匀速转动,各部分之间没有相对运动.设 ω 为角速度,是一个恒定值,ρ 为流体的密度.选取以 z 和 r 为坐标的柱坐标系,如图 2-10 所示,极角为 ϕ.在半径 r 处,流体质点的向心加速度为 $-\omega^2 r$,沿着径向.对于 z 方向,根据牛顿第二运动定律,有

$$-\rho g r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z + pr\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi = 0 \quad 或 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

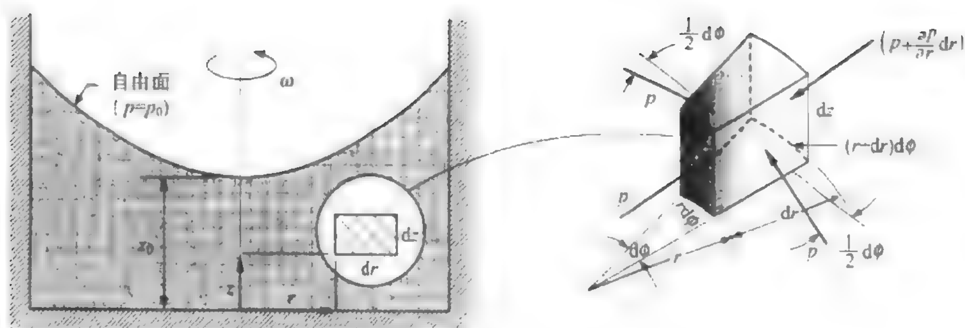


图 2-10　旋转的流体容器. 重力沿负 z 方向

沿 r 方向,假设 $\sin\left(\frac{1}{2}d\phi\right)\approx\frac{1}{2}d\phi$,

$$p dz r d\phi - \left(p + \frac{\partial p}{\partial r}dr\right)dz(r + dr)d\phi + 2p dz dr\left(\frac{1}{2}d\phi\right) = -\rho dz r d\phi dr \omega^2 r$$

略去高阶小量,得

$$\partial p/\partial r = \rho\omega^2 r \tag{2.20}$$

记 $p=p(r,z)$,则

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r}dr + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

用$\frac{\partial p}{\partial r}$和$\frac{\partial p}{\partial z}$的表达式代入,得

$$dp = \rho\omega^2 r dr - \rho g dz$$

积分得

$$p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + C \tag{2.21}$$

在 $r=0$ 和 $z=z_0$ 处,我们有 $p=p_0$. 于是方程(2.21)变成

$$p - p_0 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + \rho g(z_0 - z) \tag{2.22}$$

在自由面上有 $p=p_0$,得

$$z = z_0 + \frac{1}{2}\omega^2 r^2/g \tag{2.23}$$

这是旋转抛物面.

注意,当 z 不变时,p 随 r^2 增大而增加. 离心泵与离心分离机就是利用这个原理. 快速转动的容器中的流体,会在旋转中心到外缘之间产生一个巨大的压强差.

2.6　表面张力

如果两种不可混合的流体之间的分界面是曲面(有曲率),则曲面两边存在一个压强差. 这是因为分界面本身的作用像一层薄膜,薄膜的强度由表面张力来表征. 表面张力的单位是 lbf/ft 或 N/m,是两种接触的流体共同决定的特性. 我们最常遇到的是液体-气体的分界面,但是,相关概念适用于任何两类流体. 各种流体组合的表面张力可查有关的参考资料.

如果研究的分界面是曲面,则分界面两边的压强差为

$$\Delta p = T\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{2.24}$$

其中 R_1 与 R_2 是分界面上任何相互正交的两条曲线在交点处的曲率半径. 在这个交点上,任何两条相互正交的曲线的曲率半径倒数之和$(1/R_1+1/R_2)$都是相同的. 一旦 R_1 和 R_2 已知,Δp 就是该交点上的压强差. 例如:在分界面是球面的情况下,因为曲率半径处处为 R,因此,分界面上各点的压强差为 $T(1/R_1+1/R_2)=2T/R$.

空气中悬浮的肥皂泡就是球形分界面的例子,其中泡内的压强大于外界的大气压. 肥皂泡膜表面张力与该压强差平衡. 自由下落的水滴近似于球形,因为是表面张力将水滴凝聚成一个整体(尽管空气的阻力引起一些形变).

2.7 小结

在本章中,我们已经涉及到的作用在流体上的力有:(1)处于静平衡的(流体是静止的);(2)处于动平衡的(流体质点作等加速度的). 在这两种情况下,流体质点之间都没有相对运动,导致剪应力处处为零. 因此作用在流体上的力只有(1)压强(垂直于表面的应力)和重力(均匀的体积力).

已经证明:静平衡流体中任何点的压强都是各向同性的. 因此压强是时间和空间坐标的标量函数.

对于静平衡流体,已证明其压强随高度变化为

$$dp/dz=-\gamma=-\rho g$$

如果流体是不可压缩的,则

$$p_2-p_1=-\gamma(z_2-z_1)$$

这个公式非常有用,是各类压强计读数得出压强的依据.

作用在浸没物体表面上的合力,可以从压强和面积元的乘积对整个表面的积分求得. 合力分量的计算公式为

$$F_x=\int_A p\,dA_x,\quad F_y=\int_A p\,dA_y$$

其中 $p=p_0+\gamma h$. 因此,在利用上述公式解决具体问题时,要做的工作是将面积元和表面深度 h 用某个方便的积分变量表示出来.

浮力可以用下面两个方法计算:(1) 通过将压强与面积元乘积的铅直分量对物体整个浸没面积积分;(2) 通过物体所排开的水的体积乘上流体的重度.

对于作等加速度运动的流体,而且没有各流体质点之间的相对运动,则牛顿第二运动定律对于无限小体积元给出

$$\partial p/\partial x=-\rho a_x,\qquad \partial p/\partial y=-(\rho a_y+\gamma)$$

其中 a_x 和 a_y 是平行和垂直于地球表面的加速度分量.

例　题

2.1 图 2-11 中水银压强计与水泵的出口和人口相连(左边通人口,右边通出口). 设水泵的人口和出口处于同一高度,试确定水泵的增压.

解 通过左边液柱压强的计算,求出 a 的压强为

$$p_a=h_1\gamma_{水银}+h_2\gamma_{水银}+h_3\gamma_{水}+p_{人口}$$

通过右边液柱压强的计算,得

$$p_a=h_1\gamma_{水银}+h_2\gamma_{水}+h_3\gamma_{水}+p_{出口}$$

两式相减

$$p_{出口} - p_{入口} = h_2(\gamma_{水银} - \gamma_{水}) = \frac{6}{12}[62.4(13.6 - 1)] = 393\text{psf}$$

我们已经用了水的重度为 62.4lbf/ft³,水银的比重为 13.6.

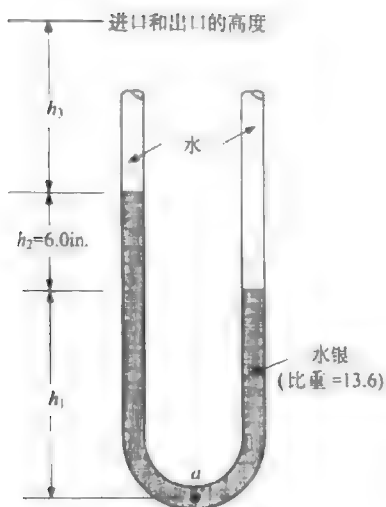


图 2-11

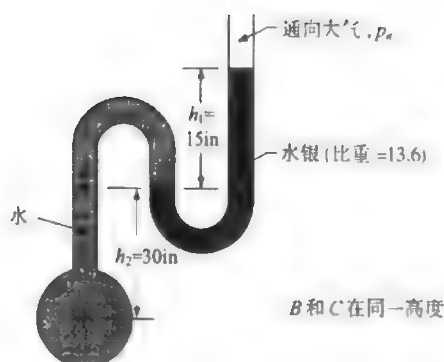


图 2-12

2.2 试从图 2-12 中求出点 A 的表压.

解 点 C 的绝对压强与点 B 的相同,而点 B 的绝对压强为 $\gamma_1 h_1 + p_a$,因此

$$p_A = (p_a + \gamma_1 h_1) + \gamma_2 h_2$$

为了方便,我们已经将水银和水的重度分别记作 γ_1 和 γ_2. 根据表压的定义,

$$p_{A表} = p_A - p_a = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 = 62.4(13.6)(15/12) + 62.4(30/12)$$
$$= 1216(\text{psf}) = 8.45(\text{psi})$$

2.3 试求图 2-13 所示的倾斜压强计在点 A 的压强.

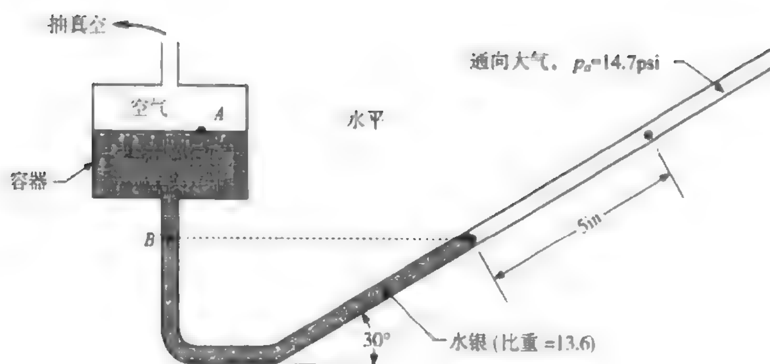


图 2-13

解 因为大气压

$$p_B = p_A + \gamma h$$

所以

$$p_A = p_a - \gamma h = 14.7 - 62.4 \cdot (13.6) \cdot (2.5/12) \cdot (1/144)$$
$$= 13.47(\text{psi})$$

注意,因为压强计的容器内抽真空,所以倾斜管中的水银面低于容器中的水银面.

2.4 设图 2-14 的管道中充满流动的水.试求管道中点 A、B 和 C 的表压.

解 设水的重度为 γ_1,水银的重度为 γ_2.

我们从点 D 开始,先下降到水平面 HH,然后再上升到管道中各点.则

$$p_A = p_a + \gamma_2 h_3 - \gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2$$

但是,$p_{表} = p - p_a$,所以

$$p_{A表} = \frac{62.4(13.6)}{1728}(5) - \frac{62.4}{1728}(8) - \frac{62.4(13.6)}{1728}(7)$$

$$= -1.28(\text{psi})$$

(数字 1728 是重度从单位 lbf/in^3 变成 lb/ft^3 的换算系数.)类似地

$$p_{B表} = \gamma_2 h_3 - \gamma_1 h_4 - \gamma_2 h_6 = -2.17\text{psi}$$

$$p_{C表} = \gamma_2 h_3 - \gamma_1 h_5 - \gamma_2 h_7 = 0.55\text{psi}$$

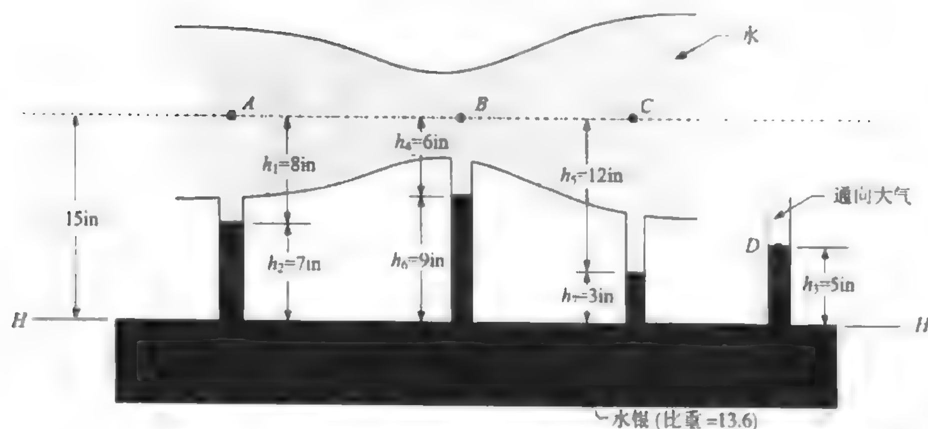


图 2-14

2.5 设水流通过一喷管如图 2-15 所示,若 A 点的表压为 5psi,试求出高度 h.

解 从自由面上点 B 绕到点 A,我们有

$$p_A = p_a + \gamma_2 h - \gamma_1(h + 24)$$

$$p_{A表} = 5 = \frac{62.4}{1728}(13.6h) - \frac{62.4}{1728}(h + 24)$$

因此得:$h = 12.9$m.

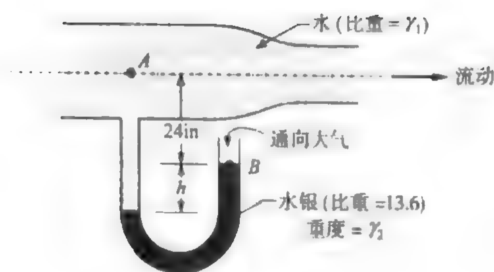


图 2-15

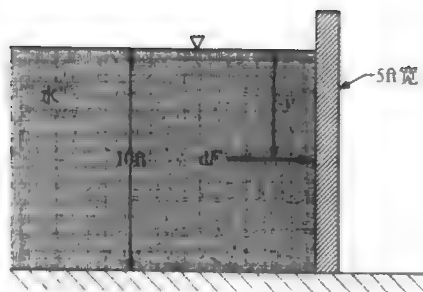


图 2-16

2.6 设一水坝如图 2-16 所示.已知坝宽为 5ft,水深为 10ft,试求水对坝面作用的合力.

解 为了求出合力,将压强对坝面积分,

$$F = \int_A \mathrm{d}F = \int_A p\mathrm{d}A = \int_0^{15} 5\gamma y\mathrm{d}y = 5\gamma y^2/2\Big|_0^{15} = 15.600\mathrm{lbf}$$

我们没有计及水面上的大气压强,因为它由大坝反面的大气压抵消了.

2.7 设大坝闸门如图 2-17 所示,已知闸门宽 5ft,阻止闸门打开的水平力作用在闸门底部,试确定力的大小.

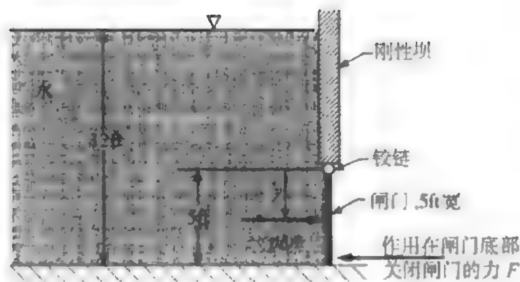


图 2-17

解 ☞ 对于静力平衡状态,所有对铰链的力矩之和必须为零.取矩得

$$5F - \int_A yp\mathrm{d}A = 0,$$

因此

$$5F = \int_0^5 y\gamma(T + y)\mathrm{d}y = 5(62.4)[7y^2/2 + y^3/3]_0^5$$

且求得

$$F = 8050\mathrm{lbf}$$

2.8 设一斜面如图 2-18 所示,已知斜面顶端用铰链连接,宽度为 3m,试求出水压作用在斜面上的合力.

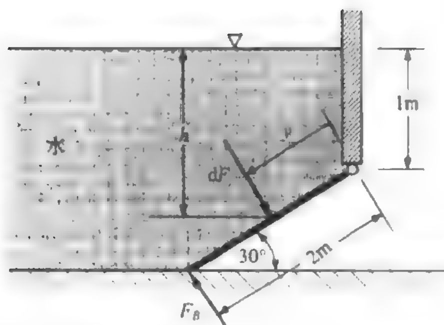


图 2-18

解 ☞ 合力垂直于闸门,可以由压强对斜面表面的积分求得

$$F = \int_A \mathrm{d}F = \int_A p\mathrm{d}A = \int_A \gamma h\mathrm{d}A$$

$$= \int_0^2 \gamma(1 + y\sin 30^\circ)(3\mathrm{d}y)$$

$$= 3(9810)\left[y + \frac{1}{4}y^2\right]_0^2 = 8.83 \times 10^4$$

同理,因为斜面右侧暴露在大气中,因此,我们计算中不需考虑大气压强.合力可以分解成 x 和 y 方向分量,并且可以求出合力作用的确切位置.因此,在确定铰链上和平板底部的反力中,单个合力的作用等价于压强的合成作用.在习题 2.9 中,我们计算了平板底部的反力.经这样的计算,则确定合力的位置就很简单了.

2.9 在习题 2.8 中,试确定作用在闸门底部末端上,地面对底部表面的总反力.设一力 F_B 等价于水压对斜面的作用,试求出该力 F 的作用点.

解 ☞ 对铰链力矩之和必为零.因为压强只能给出垂直于闸门的作用力.所以,如果忽略平板的重力,则铰链上和底部的反力都垂直于平板.忽略平板的重力不计,由对铰链的合力矩为

$$F_B \times 2 = \int_A y\mathrm{d}F = \int_A y(\gamma h)\mathrm{d}A$$

$$= \gamma\int_0^2 y(1 + y\sin 30^\circ)(3\mathrm{d}y) = (3)(9810)\left[\frac{1}{2}y^2 + \frac{y^3}{6}\right]_0^2$$

$$= 9.81 \times 10^4 \mathrm{N \cdot m}$$

则 $F_B = 4.905 \times 10^4 \mathrm{N}$.

如果压强的等价合力位于 $y = y_0$，则 $Fy_0 = F_B \cdot 2$，所以

$$y_0 = 2F_B/F = 2 \times 4.905 \times 10^4/(8.83 \times 10^4) = 1.11(\mathrm{m})$$

2.10 设一曲面如图 2-19 所示，已知曲面宽为 2ft，试确定作用在曲面上的总压力.

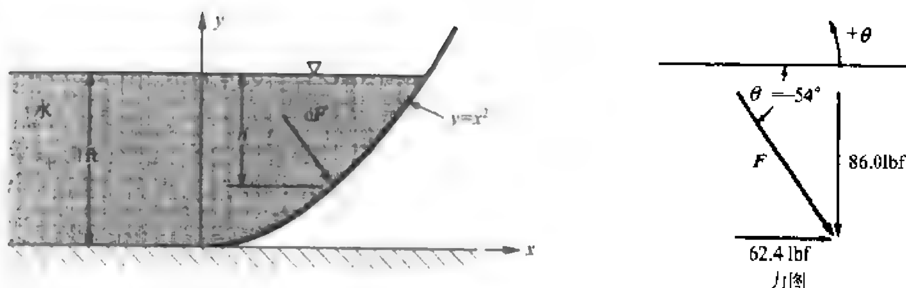


图 2-19

解 我们可以写出水对曲面作用力的一般公式为 $\boldsymbol{F} = \int_A \mathrm{d}\boldsymbol{F}$. 但是在进行积分之前，必须将上述公式写成标量形式

$$F_x = \int_A \mathrm{d}F_x = \int_A p\mathrm{d}A = \int_A (\gamma h)2\mathrm{d}y$$

将 h 写成 y 的函数，

$$F_x = 2\gamma\int_0^1 (1 - y)\mathrm{d}y = 2 \times 62.4 \times [y - y^2/2]_0^1 = 6.24\mathrm{lbf}$$

类似地，我们可以求出 F_y. 但是必需记住，沿正 y 向的 F_y 定义为正的. 而压力的作用沿着负的 y 方向，所以

$$F_y = -2\gamma\int_0^1 (1 - x^2)\mathrm{d}x = -86.0\mathrm{lbf}$$

负号表明 F_y 的作用向下. 压力合力的大小为

$$|\boldsymbol{F}| = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2} = 106.4\mathrm{lbf}$$

方向满足 $\tan\theta = F_y/F_y = -1.38$ 或 $\theta = -54°$. θ 是合力 $\boldsymbol{F}$ 对水平线的倾角，如图 2-19 所示. 由于 θ 为负的，所以合力作用沿斜下方.

2.11 一 U 形管加速计如图 2-20 所示，可用于测量汽车的加速度. 加速计安装在汽车上，两开口管铅垂向上. 开口 U 形管中装有一部分重度为 γ 的液体. 在等加速度的情形下，假定液体具有图中的位形，试找出相关参数与加速度大小的关系.

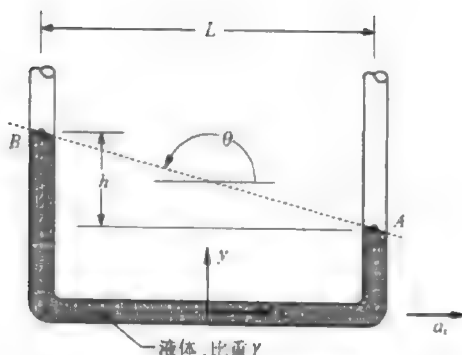


图 2-20

解 液体的位形完全和液体在宽度 L 的容器中一样，于是，由公式(2.19a)给出的角 θ 为

$$\tan\theta = -h/L = -a_x/g$$

立即得出 $a_x = gh/L$.

2.12 装水容器如图 2-21 所示.当容器静止时,水深 5ft.现在容器沿正 x 方向作加速运动.试求出水刚要溢出容器后壁时的 a_x.

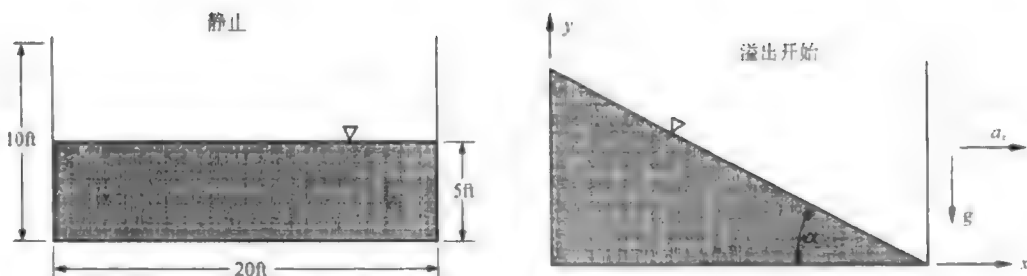


图 2-21

解 ☞ 随着 a_x 的增加,水在后壁的高度也增加.当水达到后壁的顶端时,水升高了 5ft,因此,水在前壁必降低 5ft.在刚要溢出的瞬间,$\tan\alpha = 10/20 = a_x/g$,所以 $a_x = g/2 = 16.1\text{ft/sec}^2$.注意,为了方便,我们已经定义角度 α 与公式(2.19b)中角 θ 符号正好相反.

2.13 在重力场 $\boldsymbol{g}$ 中,当装有液体的容器以等加速度 $\boldsymbol{a}$ 运动时,试证明容器中液体的压强分布和虚拟的重力场$(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{a})$中静止容器中液体的压强分布一样.也就是说,假定重力沿负 y 方向,则虚拟重力场的大小为$\sqrt{a_x^2+(a_y+g)^2+a_z^2}$,$\boldsymbol{g}$ 和 $-\boldsymbol{a}$ 的矢量和如图 2-22 所示.又若容器在重力场中自由下落,显然液体中表压处处为零.试解释之.

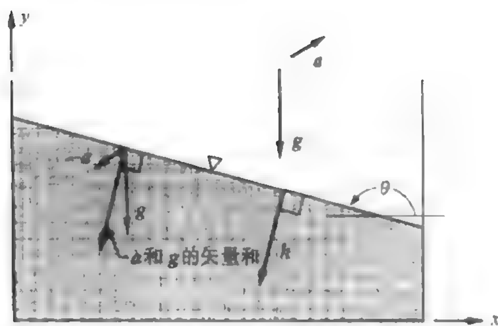


图 2-22

解 ☞ 根据公式(2.19a),我们知道流体中的等压面为一平面.假定压强沿 z 方向没有变化,而且重力作用沿负 y 方向,则根据等值面沿法向变化的导数规则,压强沿等压平面法向的变化可以写成

$$\mathrm{d}p/\mathrm{d}h = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}$$

直接进行计算,我们立即得到

$$\mathrm{d}p/\mathrm{d}h = \rho\sqrt{a_x^2 + (a_y + g)^2}$$

并且可以推广到三维情形(重力作用仍沿负 y 方向),得

$$\mathrm{d}p/\mathrm{d}h = \rho\sqrt{a_x^2 + (a_y + g)^2 + a_z{}^2}$$

积分后得

$$p = p_0 + \rho h\sqrt{a_x^2 + (a_y + g)^2 + a_z^2}$$

自由面和等压面都是倾斜的平面，根据公式(2.19b)立即可以看出，它们都垂直于矢量$(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{a})$.

2.14　容器装有两种密度不同且互不相溶的液体，并作等加速度运动，如图 2-23 所示. 设重力沿负 y 方向，加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 只有 x 分量与 y 分量，试讨论两种流体的状态.

解 ☞　根据习题 2.13 的结果，我们知道系统的状态和在重力场$(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{a})$中静止的情形一样，因此等压面是平面. 我们将问题简化成图 2-24 中的已知系统，在等价重力场中转化成一个静力学问题，正如我们处理一个双流体压力计一样，换句话说，我们可以解出平衡方程(2.19a)，并得到同样的结果，自由面和分界面的斜率和单流体的情形相同.

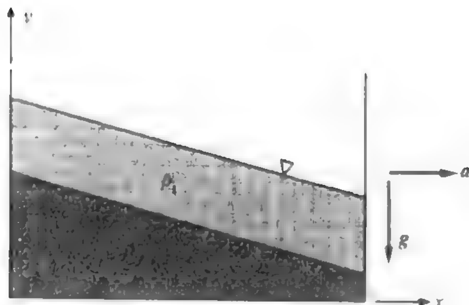


图 2-23

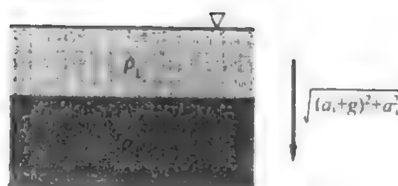


图 2-24

补 充 习 题

2.15　设一容器如图 2-25 所示，已知容器中液面的压强为 4.0psi，大于大气压强. 如果容器中液体为(a)水或(b)水银时，试分别确定其高度.

2.16　在图 2-26 中的垂直管道流动中，试确定出点 A 和点 B 之间的压强差.

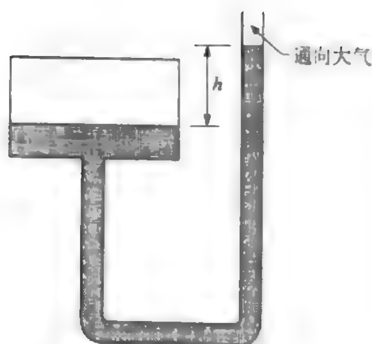


图 2-25

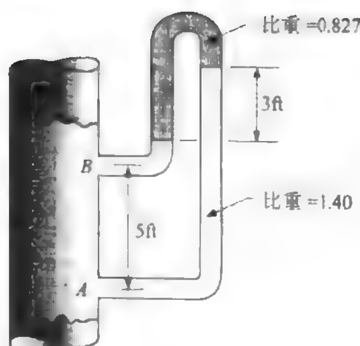


图 2-26

2.17　如果题 2-26 中的管流不是沿铅垂方向，而是沿水平方向，且点 A 和点 B 处于同一高度，而压力计仍在题 2-26 中的方向，试确定出压强计的读数.

2.18　设一倾斜压强计用来测量管道中两点之间的压强差，如图 2-27 所示. 根据图中给定的条件，试求出压力差的大小(psi).

2.19　设一双流体压强计如图 2-28 所示，可以用来测量较小的压强差，其精度比单流体压强计高. 对于双流体的分界面偏移 2in，试求出压力差 $p_A - p_B$(psi).

2.20　一装有水的水箱如图 2-29 所示，上面通大气. 设一三角形闸门，底边与箱底铰接，顶端用一水平力 F 关住闸门. 试求出力 F 的大小.

2.21　参考图 2-30，一蛙人想知道他和容器一起能潜入水下多深，并且仍能打开容器的检修门. 假定容器内部的压强为大气压，蛙人能够施出的最大拉力为 150lb. 试求出蛙人能够潜入水下的最大深度.

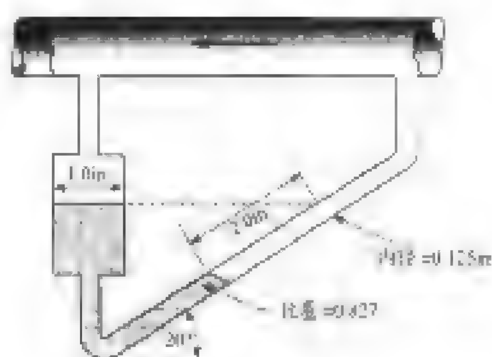


图 2-27

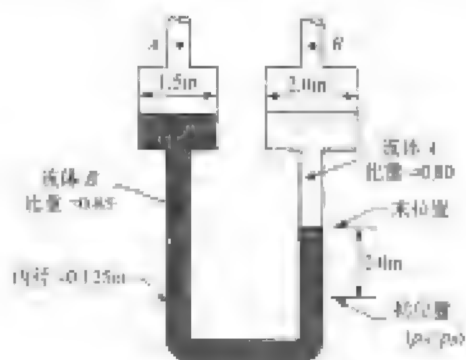


图 2-28



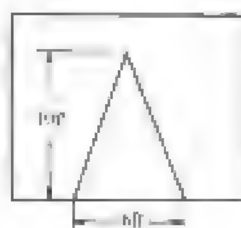
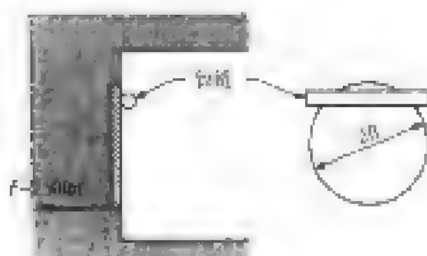


图 2-29



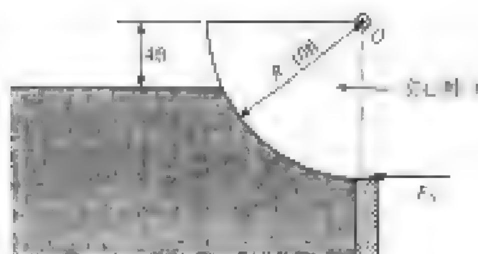
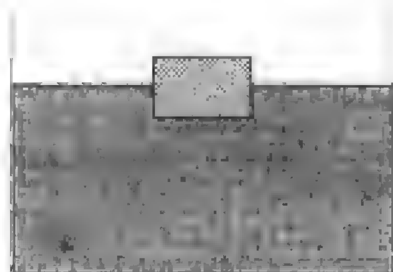


图 2-30　　　　图 2-31

2.22　图 2-31 中一闸门由四分之一的实心圆柱体构成，长为 30ft。如果其重量可以忽略不计，试求出由水的作用引起的在闸门点 O 处所受的力，以及闸门底部所受的力 F_c。

2.23　图 2-32 中物体的比重为 0.5，悬浮在容器的水中。如果容器和水一起以加速度 $10ft/sec^2$ 上升，试求出物体相对于水表面的位置。



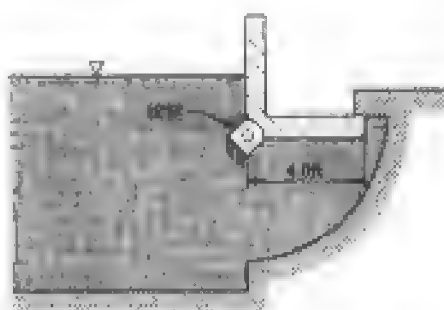


图 2-32　　　　图 2-33

2.24 当图 2-33 中直角形闸门左边的水面升高时，闸门会自动打开．试求出水面高出铰链多少时，闸门才会自动打开．

2.25 U 形管绕轴线 AB 旋转，如图 2-34 所示．假定 C 端是封闭的，试求中点 C、D 和 E 处的压强．

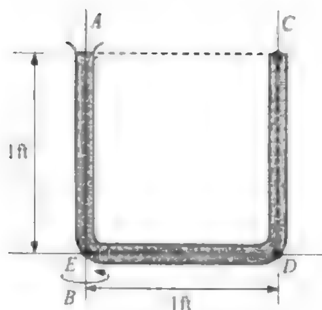


图 2-34

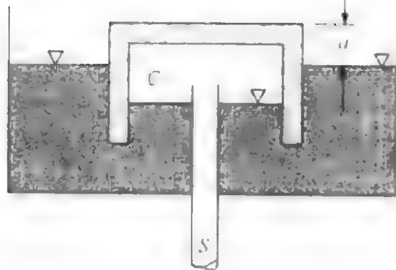


图 2-35

2.26 有人提出一种新型的压强计，要比通常的 U 形管压力计更加灵敏．新型压强计是将一个直边厚壁的杯子倒置在容器的液体中，如图 2-35 所示．再用一根导管 S 把欲测定的压强传入由倒置杯和液体形成的密闭室 C．容器上面开口与大气相通，保持液体足以浮起杯子．于是，由外部液面到杯顶的距离 a 可以用来测量压强．试问这种压强计的灵敏度如何计算？换句话说，试求出 a 随压强变化的关系．

2.27 假定闸门是由 1/4in 厚的均匀钢板制成，现在计及其重量，试重做习题 2.8 和习题 2.9．

2.28 假定闸门左边水深均为 2ft，试重新计算习题 2.7 和习题 2.8．

2.29 在习题 2.7 中，试求出作用在闸门上水压的合力矢量．也就是说，试求出等价于水压对闸门作用的一个集中力，在铰链处产生出相同的反力和在闸门底部要求有相同的关闭闸门的力．

2.30 设一水车自斜面上滚下，如图 2-36 所示．如果忽略轮子的摩擦力和风的阻力，试求出车内水的自由面的倾角．

2.31 设封顶的铅直圆筒内充满水，假设其绕自身轴线以角速度 ω 转动，并在顶盖中心有一小孔通大气，试求圆筒内水的压强分布．

2.32 在习题 2.31 中，若铅直圆筒在没有重力场的空间中转动，则圆筒内水的压强分布如何．

2.33 在无重力场的情形下，火箭作等加速度 a 运动，其燃料箱内装有密度为 ρ 的液体燃料，试求出燃料箱内的压强分布，会变形吗？试解释之．

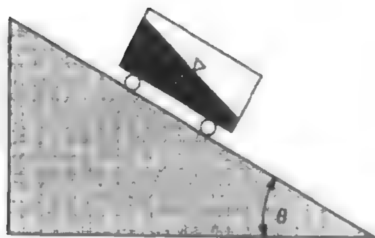


图 2-36

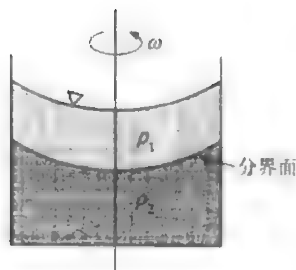


图 2-37

2.34 设一圆筒内装有两种不互溶流体，密度分别为 ρ_1 和 ρ_2，且 $\rho_2>\rho_1$，如图 2-37 所示．试求出圆筒的压强分布、两流体之间分界面的形状、以及自由面的形状．

2.35 试说明习题 2.11 中的 U 形管，就其性能而言，哪些参数是重要的？

2.36 在习题 2.12 中，当 a_x 的值增加时，会发生什么情况？依靠增加 a_x，能否排光容器内的水？

2.37 一气球充满氦气(氦气比空气轻)，用绳子系在小汽车内的座位上．如果小汽车的窗户全都关上，并以等加速度前进．试分析小汽车内空气的压强分布，气球相对于小汽车会向前倾斜还是向后倾斜？如果气球内充满空气，并系在小汽车内的天花板上，则回答是相同的吗？试解释之．

2.38 Buick 流体扭矩变换器设计者面临的一个问题是确定泵盖固定螺栓中的最大拉应力，如图 2-38 所示．

这个变换器的工作过程如下：发动机曲轴与泵壳刚性地连接在一起，使其获得发动机的转速 ω．泵

壳和泵盖构成油封的机构，围绕着输出轴有密封衬垫，输出轴以小于或等于泵壳的角速度转动. 通过辅助的增压泵，保持泵壳内的油压不变. 在实际中，增压泵不断在泵壳的转动中心向壳内注油.

附着在泵壳内的是径向叶片，它们驱动油在定子或涡轮中循环. 定子和涡轮固定在输出轴上，图中未显示.

设泵壳的直径为 Dft，旋转角速度为 ω/sec. 试求出泵盖固定螺栓中可能出现的拉应力的大小.

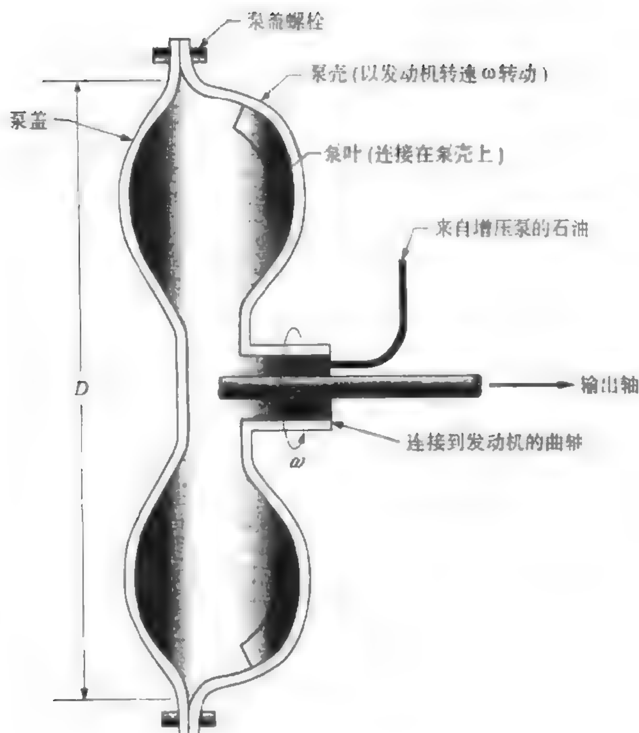


图 2-38

2.39 一矩形棱镜(即肥皂块形状)密度为 ρ. 悬浮在两不互溶液体的分界面处，液体的密度分别为 ρ_1 和 ρ_2，如图 2-39 所示. 根据有关的参数，试求出

(a) 棱镜在下层液体中的悬浮深度；

(b) 棱镜悬浮到上层液体顶部的判据；

(c) 棱镜悬浮在下层液体底部的判据.

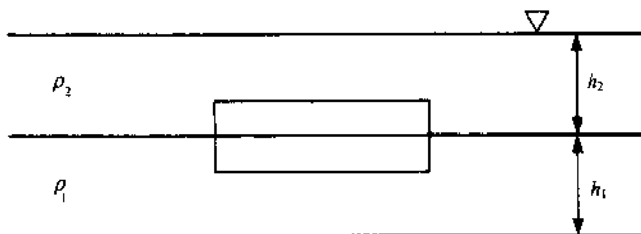


图 2-39

2.40 一细长玻璃管半径为 a，插入某种液体的自由面(图 2-40)，观察到液体在管中升高 H. 角 θ 依赖于液体对玻璃的"润湿"性质，是一个不变的参数(查表)，只取决于管壁和液体的材料. 如果 θ 是正的，如图所示，称液体对固壁是润湿的. 如果 θ 是负的，即管中液面是向上凸的，称液体对管壁是不润湿的. 对于不润湿的情形，管中液面是升高还是降低？给定正的角 θ，空气和液体分界面的表面张力 T 和管子的半径 a，试求出管中液面升高的 H. 液体在小管中的升高称为**毛细现象**，可以解释液体在多孔介质中的渗透. **提示** 利用球面半径的公式.

答案：$H=\frac{2T\cos\theta}{\rho g a}$.

2.41 试验在一碗水的表面上漂浮一根细的缝纫针．要非常小心，这是能做到的．解释缝纫针为什么不下沉（表面张力效应）．画一张缝纫针附近水面升高的示意图，解释其形状．水对针是润湿的吗？角 θ 是正还是负？（参阅图 2-40.）

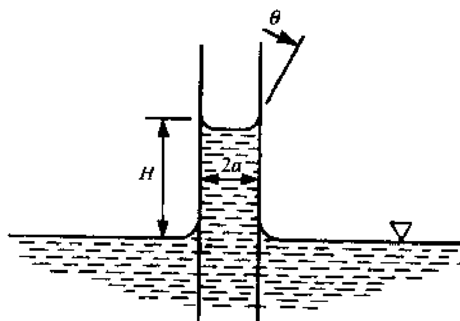


图 2-40

第二章符号表

$\boldsymbol{a}$ = 加速度

$\boldsymbol{F}$ = 力

g = 重力加速度

h = 高度

p = 压强

R = 气体常数

T = 温度，表面张力

V = 体积

w = 宽度

γ = 重度 = ρg

ρ = 密度

ω = 角速度

第三章　流体运动的数学模型

3.1　引言和方法

在这一章，我们将导出描述流体运动的数学模型．必须牢牢记住，数学模型仅仅是真实流动的近似描述．因此，了解本章中各个方程的局限性及其适用范围是非常重要的．

真实流体是由分子组成的，分子之间有很大的空隙．但是，在建立数学模型时，为了方便，通常假设流体是连续介质——连续统．这是我们以后一直采用的近似，为此，我们首先将流体的真正的结构抽象出来，给出流体本身的数学模型。必须指出，尽管大多数流体可以用连续介质来近似，但是也发展了研究大量流体分子统计特性的数学模型，这在稀薄空气的研究中是非常必要的．流体运动的流体动理学理论研究可以在 Chapman 和 Cowling[4] 以及 Curtiss 和 Bird[5] 的书中找到，见本章末所附参考书目．

在本章中，我们首先对控制体导出流体力学基本方程的积分形式，然后将积分方程应用到微元体，得出流体运动的微分方程．正如在第二章中所指出的，流体的流动有五个基本变量：三个速度分量和两个热力学参量．因此，描述流体流动的方程也有五个：动量的三个分量方程、连续方程和能量方程．通常，在不可压缩的流动中，由于密度是不变的，所以不需要考虑能量方程(能量方程与其他方程独立)．在湍流中，情况就更加复杂，一般得不到封闭的方程组．在第九章，我们再来讨论湍流流动的基本方程组．有些本构方程，例如物态方程，也可以用来引入某个附加的热力学参量．

3.2　积分方程

在流体力学中，我们用到四条基本规律：

(a) 质量守恒；

(b) 牛顿第二运动定律；

(c) 能量守恒定律(热力学第一定律)；

(b) 热力学第二定律．

这些定律适用于研究对象是固定的系统，即在经受各种条件变化过程中，研究对象本身始终相同．事实上，如果不能标识出选定的系统，也就无法应用上述基本定律．

在流体力学的分析中，要标识和跟踪固定的研究对象，通常是不方便的，习惯上宁可采用场论的观点，在空间中标识一个明确的固定区域或体积，称为控制体．但是上述四个基本方程不适用于空间的固定体积，而只适用于固定的研究对象．因此，我们接下来的任务就是从系统中已知的表达式来推导出适用于控制体的方程．于是，尽管控制体中的流体是经常更换的，但是我们要问：在任意一特定的时间，固定控制体内的流体具有什么样的特性？

我们现在来导出流体运动的积分方程组．为了让读者能更深入地理解应用这些方程的物理条件，在这里介绍方程的详细推导过程．从已知的基本定律导出控制体方程的方法是在基本图像上加上微小的修正，因为它们包含的对象有差别．一旦导出了方程就可用于求解在流体运动中发生的实际问题．

质量守恒

我们将注意力集中在图 3-1 流线所代表的流场上．现在来考察其时刻 t 由实线包围的一定量的流体．在稍后的时刻$(t+\Delta t)$，系统边界有了新物理位置，如虚线所示．

研究由 A、B、C 所指示的区域，我们的系统在 t 时刻位于区域 A、在$(t+\Delta t)$时刻位于区

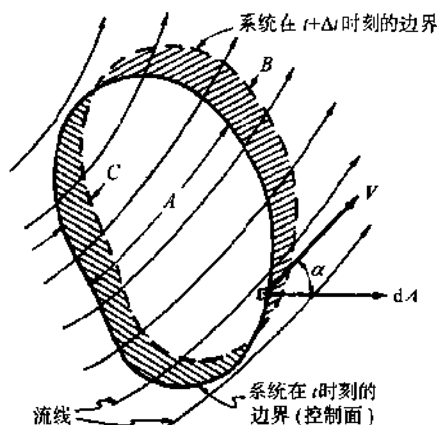


图 3-1　系统通过控制体

域 B 和 $A-C$. 令 m 表示质量，用相应的下标以区别不同的区域和不同的时间，

$$m_A(t) = m_A(t+\Delta t) - m_C(t+\Delta t) + m_B(t+\Delta t)$$

重新组合，并在两边除以 Δt

$$\frac{m_A(t+\Delta t) - m_A(t)}{\Delta t} = \frac{m_C(t+\Delta t) - m_B(t+\Delta t)}{\Delta t}$$

取 $\Delta t \to 0$ 的极限，左边为

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_A(t+\Delta t) - m_A(t)}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t}(m)_{\text{C.V.}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} \rho \mathrm{d}\mathcal{V}$$

其中 ρ 为质量密度，$\mathcal{V}$ 为体积，C.V. 是空间中固定的控制体，以控制面（C.S.）为边界. 方程的右边为

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left\{\frac{m_C(t+\Delta t)}{\Delta t} - \frac{m_B(t+\Delta t)}{\Delta t}\right\} = \dot{m}_{流进} - \dot{m}_{流出}$$

且

$$\dot{m}_{流进} - \dot{m}_{流出} = -\int_A \rho V \cos\alpha \mathrm{d}A = -\int_{\text{C.S.}} \rho \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

其中 $\dot{m}_{流进}$ 和 $\dot{m}_{流出}$ 分别表示流进与流出控制体的质量流量，$\boldsymbol{V}$ 是速度矢量；V 是速度矢量的大小，α 是速度矢量与控制体表面外法向的夹角. 于是，关于控制体的连续方程为

$$\int_{\text{C.S.}} \rho \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V}} \rho \mathrm{d}\mathcal{V} \tag{3.1}$$

方程(3.1)是连续方程的积分形式. 从物理上说，流出控制体表面的净质量流量等于控制体内质量对时间的减少率. 首先，我们通过某些一般性的简化，然后再通过某些特殊的例子来验证方程(3.1).

因为控制体是固定的，对于定常流（$\partial\rho/\partial t=0$），方程的右边为零，给出

$$\int_{\text{C.S.}} \rho \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0 \tag{3.2}$$

对于不可压缩流，我们有

$$\int_{\text{C.S.}} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0$$

研究图 3-2 中给的定常流体运动,其中从截面 1 流进,从截面 2 和截面 3 流出,我们有

$$\int_{C.S}\rho\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{A}=0$$

$$\int_{A_2}\rho\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{A}+\int_{A_3}\rho\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{A}+\int_{A_1}\rho\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{A}=0$$

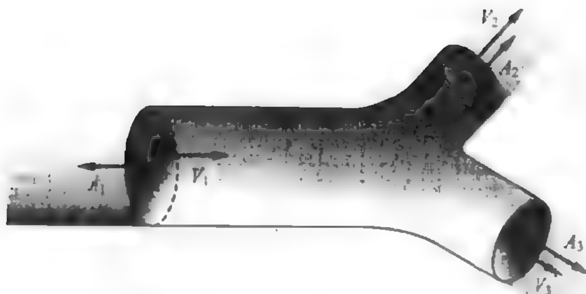


图 3-2　分枝流动中的连续性

假定速度垂直于所有流体通过的横截面,则

$$\int_{A_2}\rho_2V_2dA+\int_{A_3}\rho_3V_3dA-\int_{A_1}\rho_1V_1dA=0$$

如果密度和速度在这些横截面上是均匀的,则

$$\rho_2V_2A_2+\rho_3A_3V_3-\rho_1A_1V_1=0 \tag{3.3}$$

对于没有第三个出口的单管道,方程变成

$$\rho_2A_2V_2=\rho_1A_1V_1 \tag{3.4}$$

在得到方程(3.4)的过程中,我们假定了:(a)定常流动;(b)速度垂直于横截面;(c)速度和密度在各个截面上是均匀的;(d)控制体只有一个进口和一个出口.

动量

现在我们来导出控制体的动量方程.这个方程是流体运动中最重要的数学关系式之一,这个方程可以使我们处理流体对于固体,或流体对其他流体作用力的问题,例如管道拐弯处的受力,喷气发动机的推力,机翼的升力和阻力,以及许多其他问题.

作用在一个质点上或作用在有确定质量的质点系上的净力,由牛顿第二定律给出为

$$\boldsymbol{F}=\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} \tag{3.5}$$

其中 $\boldsymbol{M}$ 是系统总的线动量.如果假定在整个时间 Δt 上力是常量,我们可以得

$$\boldsymbol{F}\Delta t=\Delta\boldsymbol{M} \tag{3.6}$$

参考图 3-1,方程(3.6)的右边为

$$\Delta\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_A(t+\Delta t)-\boldsymbol{M}_C(t+\Delta t)+\boldsymbol{M}_B(t+\Delta t)-\boldsymbol{M}_A(t)$$

重新组合,并在两边除以 Δt,得

$$\frac{\Delta \boldsymbol{M}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{M}_A(t+\Delta t)-\boldsymbol{M}_A(t)}{\Delta t}+\frac{\boldsymbol{M}_B(t+\Delta t)-\boldsymbol{M}_C(t+\Delta t)}{\Delta t} \tag{3.7}$$

当 $\Delta t \to 0$ 时,对方程(3.7)取极限,右边第一项变为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{M}_A(t+\Delta t)-\boldsymbol{M}_A(t)}{\Delta t}=\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{M})_{\text{C.V.}}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}}\rho \boldsymbol{V}\mathrm{d}\mathcal{V}$$

第二项变为

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\boldsymbol{M}_B(t+\Delta t)-\boldsymbol{M}_C(t+\Delta t)}{\Delta t}\right]&=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{\left[\sum_B \Delta \boldsymbol{M}(t+\Delta t)\right]_B}{\Delta t}-\frac{\left[\sum_C \Delta \boldsymbol{M}(t+\Delta t)\right]_C}{\Delta t}\right\}\\&=\sum_B \Delta\dot{\boldsymbol{M}}-\sum_C \Delta\dot{\boldsymbol{M}}=\left[\sum \Delta\dot{m}\boldsymbol{V}\right]_{\text{流出}}-\left[\sum \Delta\dot{m}\boldsymbol{V}\right]_{\text{流进}}\\&=\int_{\text{C.S.}}\boldsymbol{V}\rho\boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

其中 $\sum_B \Delta \boldsymbol{M}(t+\Delta t)$ 是 Δt 时间内随流体通过边界进入区域 B 的动量,$\sum_B \Delta\dot{\boldsymbol{M}}$ 是通过表面进入区域 B 的动量在时间 t 的变化率.所以方程(3.6)变为

$$\boldsymbol{F}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}}\boldsymbol{V}\rho \mathrm{d}\mathcal{V}+\int_{\text{C.S.}}\boldsymbol{V}\rho\boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{3.8}$$

合力 $\boldsymbol{F}$ 由表面力的合力 $\boldsymbol{F}_s$(压强和应力)和体积力 $\boldsymbol{B}$(单位体积上的作用力)组成.对于控制体的动量方程为

$$\boldsymbol{F}_s+\int_{\text{C.V.}}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\mathcal{V}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}}\boldsymbol{V}\rho \mathrm{d}\mathcal{V}+\int_{\text{C.S.}}\boldsymbol{V}\rho\boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{3.9}$$

必须强调指出,因为牛顿定律的通常形式只在惯性系条件下成立①,所以方程(3.9)只在惯性坐标系中成立.

对于定常流,并在忽略体积力的条件下,方程(3.9)化为

$$\boldsymbol{F}_s=\int_{\text{C.S.}}\boldsymbol{V}\rho\boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{3.10}$$

此外如果我们还假定,密度和速度在流体穿过控制面的区域上是均匀的,对于一个进口(截面1)和一个出口(截面2)的情形,我们有

$$\sum \boldsymbol{F}_x=\dot{m}(V_{x_2}-V_{x_1}),\quad \sum \boldsymbol{F}_y=\dot{m}(V_{y_2}-V_{y_1}),\quad \sum \boldsymbol{F}_z=\dot{m}(V_{z_2}-V_{z_1})$$

角动量

我们不给出动量矩方程的严格推导,而仅仅将方程写出,然后讨论方程的物理意义.关于推导,请参阅参考文献[11]或[13].

让我们再次写出线动量方程(3.9)

$$\boldsymbol{F}_s+\int_{\text{C.V.}}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\mathcal{V}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}}\boldsymbol{V}\rho \mathrm{d}\mathcal{V}+\int_{\text{C.S.}}\boldsymbol{V}\rho\boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

然后,用位矢 $\boldsymbol{r}$ 与其中每个矢量作叉乘(矢量积),即

① 对于无旋转并作加速运动的控制体,方程(3.9)的左边还需加上一项 $-m\ddot{\boldsymbol{R}}$,其中 m 是控制体流体的总质量,$\ddot{\boldsymbol{R}}$ 是控制体相对于惯性系的加速度.在参考文献[13]中,给出了完整的方程的推导.

$$\int_{C.S.} \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{F}_s + \int_{C.V.} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B} \mathrm{d}\mathscr{V} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V.} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V}\rho \mathrm{d}\mathscr{V} + \int_{C.S.} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V}\rho\boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{3.11}$$

这就是角动量方程．我们现在来看看方程中的每一项的物理意义，参阅图 3-3．必须再一次强调指出，$\boldsymbol{V}$ 是相对于固定坐标系中的绝对速度，控制体在该坐标系中是静止的．

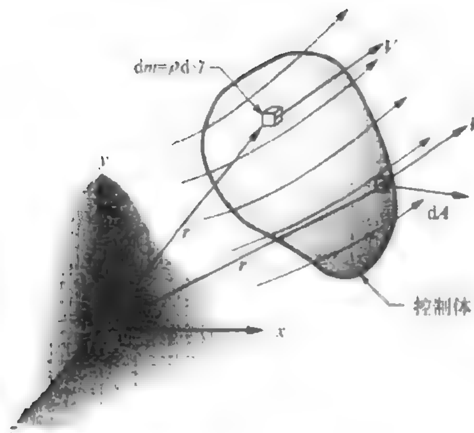


图 3-3　控制体中的角动量

在方程(3.11)中，第一项被积函数 $\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{F}_s$ 是控制面上力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_s$ 对于原点的力矩，第二项被积函数是作用在无限小体积元 $\mathrm{d}\mathscr{V}$ 上体积力对原点的力矩，第三项被积函数是无限小质量元 $\rho\mathrm{d}\mathscr{V}$ 的角动量．积分给出控制体内流体的总的角动量．最后一项则是通过控制面的角动量流出率．

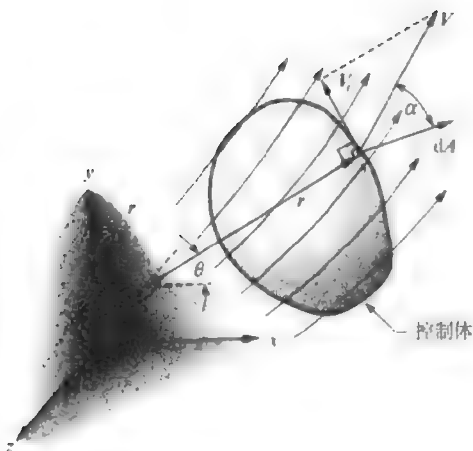


图 3-4　对 z 轴的角动量

在方程(3.11)的应用中，是用其分量形式．例如，我们选用 z 轴的分量方程，如图 3-4 所示．对于定常流并可以忽略体力的问题，则得

$$T_z = \int_{C.S.} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V})_z (\rho\boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}) \tag{3.12}$$

其中 T_z 表示控制体对于 z 轴的净力矩，以及

$$(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V})_z = rV_t, \qquad \rho\boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \rho V\cos\alpha \mathrm{d}A$$

V_t 是速度矢量垂直于 z 轴的分量，$\boldsymbol{r}$ 是位矢，α 是速度矢量与面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 之间的夹角．于是

$$T_z = \int_{C.S.} \rho r V_t V\cos\alpha \mathrm{d}A \tag{3.13}$$

假定流体流过控制体的整个流动是从截面 A_2 流出，并且 ρ、V 和 $\cos\alpha$ 在每个截面上都是均匀分布的.定义 r_2V_{t2} 是截面 A_2 上 rV_t 的平均值，r_1V_{t1} 是截面 A_1 上 rV_{t1} 的平均值，即

$$r_2V_{t2}=\frac{1}{A_2}\int_{A_2}rV_t\mathrm{d}A,\quad r_1V_{t1}=\frac{1}{A_1}\int_{A_1}rV_t\mathrm{d}A$$

连续方程给出

$$\rho_1A_1V_1\cos\alpha_1=\rho_2A_2V_2\cos\alpha_2=\rho_1Q_1$$

其中 Q 是体积流量，于是，方程(3.13)化为

$$T_z=\rho_1Q_1(r_2V_{t2}-r_1V_{t1})\tag{3.14}$$

因为涡轮机转子内部的绝对流动是环状的，所以可以应用方程(3.14).我们可以作一个合理的近似，假定在进口截面 1 和出口截面 2 上，ρ，V 和 $\cos\alpha$ 都是均匀的(见图 3-5 和 3-6).在图中，$\boldsymbol{v}$ 是相对于转子的速度(相对速度)，$\boldsymbol{V}$ 总是指相对于地球的速度(绝对速度).为了简明，图中只画出了一个叶片.

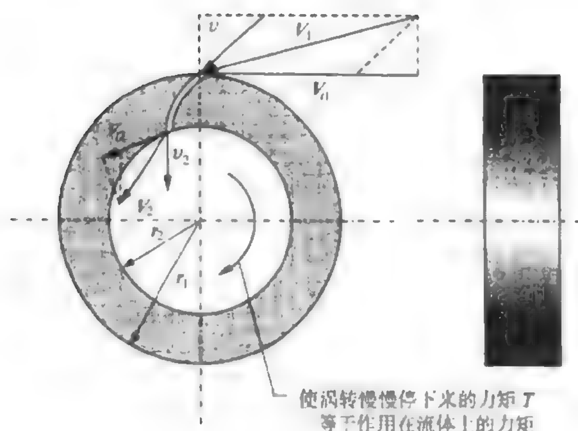


图 3-5　涡轮转子径向流的速度图

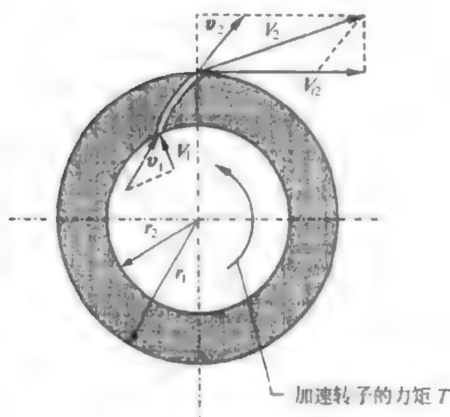


图 3-6　叶轮径向流的速度图

如果忽略轴承的摩擦、流体作用在转子外侧的阻力和流体在截面 1 和截面 2 的剪应力，则作用在轴上的外力矩就等于作用在系统上的总外力矩. 对于涡轮，T 是顺时针的，而对压缩机，T 是逆时针的. 因此，对于涡轮有

$$T = \rho_1 Q_1 (r_1 V_{t1} - r_2 V_{t2}) \tag{3.15}$$

而对于压缩机或者泵的叶轮(这里通常 $V_{t1}=0$)有

$$T = \rho_1 Q_1 (r_2 V_{t2} - r_1 V_{t1}) \tag{3.16}$$

这里所列举的涡轮机是径向的流动装置，即通过后流动是径向的，或垂直于转轴的. 涡轮机也可以是轴流式的(通过转于后流动平行于转轴)，也可以是混合式的(介于轴流式与径向式之间).

能量

热力学第一定律①的数学表达式为

$$Q - W = \Delta E \tag{3.17}$$

其中：Q = 输入系统的能量；

W = 系统作的功；

ΔE = 系统能量的变化.

如前几节所述，我们再次强调指出，这些基本定律适用于固定研究对象的系统. 和以前一样，我们的任务是给出这些定律用于控制体的数学表达式.

方程(3.17)中的热量和功是指一个系统和其他系统的相互作用，而能量与系统的质量有关，习惯上分成三个部分

$$E = U + \frac{1}{2} m V^2 + mgz$$

其中：U 为与分于和原子的行为有关的内能；

$\frac{1}{2} m V^2$ 为动能；

mgz 为与系统在地球重力场中的位置有关的势能.

相对于单位质量写出方程(3.17)，则得

$$q - w = \Delta e \tag{3.18}$$

其中 $q = Q/m, w = W/m, e = E/m$.

研究时刻 t 的系统，如图 3-7 所示. 在稍后的时刻($t + \Delta t$)，系统已经运动到另一个位置. 对于这一改变，系统的能量方程为

$$Q - W = E_f - E_i$$

其中 E_f 是系统的最后的能量，E_i 是系统的初始能量. 两边除以 Δt，得

$$\frac{Q}{\Delta t} - \frac{W}{\Delta t} = \frac{E_f - E_i}{\Delta t} \tag{3.19}$$

现在计算方程的右边

$$\frac{E_f - E_i}{\Delta t} = \frac{E_A(t + \Delta t) - E_C(t + \Delta t) + E_B(t + \Delta t) - E_A(t)}{\Delta t}$$

① 有关热量与功的定义，可以参阅参考文献[7]和[15]等.

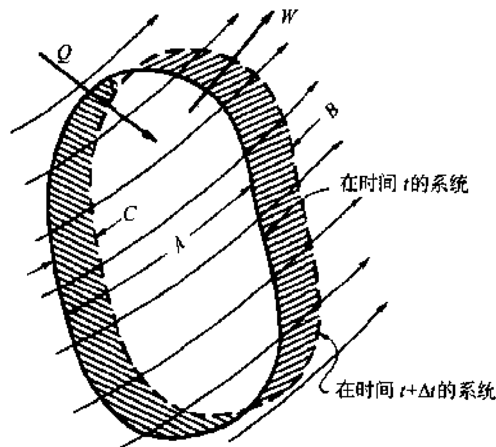


图 3-7　控制体的能量平衡

$$= \frac{E_A(t+\Delta t)-E_A(t)}{\Delta t}+\frac{E_B(t+\Delta t)-E_C(t+\Delta t)}{\Delta t}$$

当 $\Delta t\to 0$ 时,方程右边的第一项为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{E_B(t+\Delta t)-E_A(t)}{\Delta t}=\frac{\partial}{\partial t}(E)_{\text{C.V.}}=\frac{\partial}{\partial t}\int e\mathrm{d}m=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V}}e\rho\mathrm{d}\mathcal{V}$$

最后一项为

$$\frac{E_B(t+\Delta t)-E_C(t+\Delta t)}{\Delta t}=\frac{(\sum\Delta me)_B\big|_{t+\Delta t}}{\Delta t}=\frac{(\sum\Delta me)_C\big|_{t+\Delta t}}{\Delta t}$$

其中求和是对通过表面的流体质量求和,Δm 是特定的质量,e 是质量 Δm 的储能. 在 $\Delta t\to 0$ 的极限中,最后的方程变为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{E_B(t+\Delta t)+E_C(t+\Delta t)}{\Delta t}=\int_{流出}e\mathrm{d}\dot{m}-\int_{流入}e\mathrm{d}\dot{m}=\int_{\text{C.S.}}e\rho\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

于是我们得

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{E_f-E_i}{\Delta}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}}e\rho\mathrm{d}\mathcal{V}+\int_{\text{C.S.}}e\rho\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

系统边界上的正应力和剪应力都可以作功. 我们所指的功是系统边界上正应力(流体静压)在流体中所作的功. 例如:对于质量元$(\Delta m)_B$ 所作的功,是 Δt 时间内从区域 A 流出过程中静压作的功,等于 $p\mathrm{d}A\Delta x$ 而 $\mathrm{d}A\Delta x$ 是流体质量元的体积,可以写成$(\Delta m)_B/\rho$. 所以流出与流入的流动功为

$$\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right)_{流动力}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta W}{\Delta t}\right)_{流动功}=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\sum(p/\rho)(\Delta m)_B\big|_{t+\Delta t}}{\Delta t}-\frac{\sum(p/\rho)(\Delta m)_C\big|_{t+\Delta t}}{\Delta t}\right]$$

$$=\int_{\text{C.S}}(p/\rho)\rho\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

能量方程变为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}W_S}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}}e\rho\mathrm{d}\mathcal{V}+\int_{\text{C.S.}}(e+p/\rho)\rho\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}A \tag{3.20}$$

其中

$$e = u + \frac{1}{2}V^2 + gz$$

而$(\mathrm{d}W_S/\mathrm{d}t)$是除去上述流动功之外的所有功的总功率.方程(3.20)说明:进入系统的热流率减去系统作的功(除去流动的功),等于控制体内储能对时间的变化率加上储能和流动功对控制体的净流出率.

设一个装置如图3-8所示,讨论其中的一维定常流.转轴横截面上剪应力作的功称为轴功.边界上其余部分剪应力做的功均为零.因为这些地方速度或者为零,或者垂直于剪应力.因此,根据方程(3.20)有

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}W_S}{\mathrm{d}t} = \int_{A_1+A_2}\left(\frac{p}{\rho} + u + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho V\mathrm{d}A$$

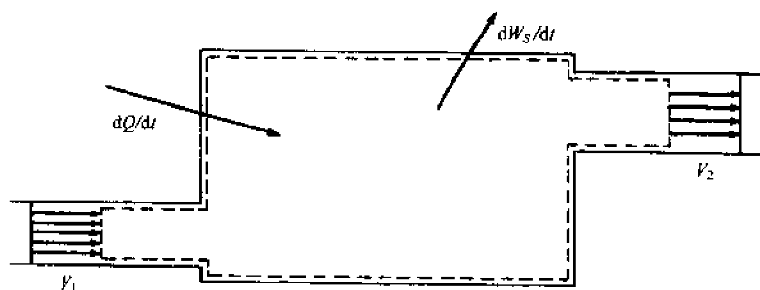


图 3-8　有热交换和作功的流动装置

由于流动是一维的,则 p、V、u 和ρ在A_1和A_2上都是均匀的.如果除去这些条件之外,我们还在整个范围内忽略沿 z 的变化,我们有

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}W_S}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{p_2}{\rho_2} + u_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right)\rho_2 A_2 V_2 - \left(\frac{p_1}{\rho_1} + u_1 + \frac{V_1^2}{2} + gz_1\right)\rho_1 A_1 V_1$$

根据连续方程,对于一维流动有

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \text{质量流率}$$

以此代入能量方程得

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}W_S}{\mathrm{d}t} = \left[\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) + (u_2 - u_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 + z_1)\right]\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{3.21}$$

我们对单位质量的流体来写出方程(3.21),得

$$q - w_S = \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) + (u_2 - u_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \tag{3.22a}$$

这就是通常的一维定常流中的热力学能量平衡方程.

这个方程也可以用比焓 $h(h = p/\rho + u)$写出

$$q - w_S = (h_2 - h_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

对方程(3.22a)重新整理,并假定是不可压缩流,得

$$-w_S = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + (u_2 - u_1 - q)$$

在大多数实际流动中,除去内能和热量传递之外,在上述方程中,所有的能量都是可以直接测量的.例如管道中液体的流动,情况更是如此.因此,通常的做法是定义

$$gH_L = u_2 - u_1 - q$$

所以

$$-w_S = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + gH_L \tag{3.22b}$$

其中 H_L 称为"损失"或者"压头损失",代表了机械能向热能的转化.当流体的流动经过泵或管道时,因为与固体壁接触的流体没有滑移,所以流体经受着剪切形变.这种形变的结果,在黏性流体中出现剪应力.此时温升要高于理想流动中的值,温升使$(u_2 - u_1)$和传输给周围的热量均增加.

对于无轴功的不可压缩流体的理想流动,因为 H_L 为零,所以方程(3.22b)变成

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = 0 \tag{3.22c}$$

我们将这个方程与稍后将从动量方程导出的伯努利方程进行比较.实际上,通过方程(3.22a)与不可压缩流体运动方程的第一积分作比较,我们只能证明$(u_2 - u_1 - q)$是压头损失项.我们将在第3.3节中说明,上述第一积分与方程(3.22b)相同,并且是直接从运动方程得出的广义伯努利方程.认识这一点非常重要,即方程(3.22b)可以严格从动量方程导出,而方程(3.22a)却不能.方程(3.22a)是可压缩流动的一般的能量方程.但是,一旦当我们说流动是不可压缩的,且式$(u_2 - u_1 - q)$是无摩擦损失项时,则我们已经排除了所有真实的热力学信息,只留下了运动方程中的机械能平衡原理.对于理想不可压缩流,方程(3.22c)就是通常的伯努利方程,而方程(3.22b)中的 $H_L = 0$,其余部分就是热力学第一定律.即对于单位质量的流动流体,有 $q - \Delta u = 0$.这就是热力学第一定律,并且不依赖于方程(3.22c).

热力学第二定律

按照上述对各定律所做的同样的过程,可以得出对于控制体的热力学第二定律.但是在此不作完整的推导,我们只给出其最后的形式.读者要查阅详细的推导过程,请见参考文献[8]和[9].

系统的热力学第二定律为

$$\mathrm{d}S - \frac{\mathrm{d}Q}{T} \geqslant 0$$

(其中 S 是系统的熵.)上式说明:熵变化减去传给系统的热量被温度除,等于或大于零.用前几节中同样的步骤,得适用于控制体的热力学第二定律的形式为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{C.V.}} s\rho \mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\mathrm{C.S.}} s\rho \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} - \int_{\mathrm{C.S.}} \frac{\boldsymbol{q}}{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \geqslant 0 \tag{3.23}$$

其中 $\boldsymbol{q}$ 是热通量矢量,即通过单位面积的传热率;s 是比熵,即单位质量的熵.

若假定流体流动是定常的和绝热的,且只有一个出口和入口(如图3-8),于是方程(3.23)化为

$$s_2 - s_1 \geqslant 0$$

如果进一步假定过程是可逆的,则

$$s_2 - s_1 = 0$$

这就是说过程是等熵的.

熵是一个热力学参量,而且是与其他热力学参量相关的,热力学第二定律在气体流动中特别有用.

3.3 微分方程

在前几节中,适用于系统的基本定律用来建立了应用于控制体的积分方程.现在,我们要用这些基本定律来导出流体动力学中的微分方程.导出微分方程的方法有很多种,但是最常用的有三种.第一种方法,我们可以在形式上应用矢量的微积分学,从积分表达式得出微分表达式,不需要附加任何物理论证.这个方法是纯数学的和严格的;第二种方法,我们可以将积分关系式应用于体积元,再令体积元趋向于零,从取极限来得出微分表达式;第三种方法是将系统的基本方程直接应用体积元,再将得到的体积元的基本积分表达式取极限.

为了说明这些方法,我们用第一种方法导出微分形式的连续方程;第二种方法来导出动量方程的微分形式,最后用第三种方法来导出能量方程的微分形式.

这里必须记住的要点是:坐标用于空间中的点和时间,而不代表单个流体质点的位置.换句话说,我们要问:流动的特性和速度 $\boldsymbol{V}$ 是空间位置和时间的什么函数? 例如,在笛卡儿坐标中的 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r},t)$ 或 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}(x,y,z,t)$.这种场的特性坐标称为**欧拉坐标系**.与之对应的是**拉格朗日坐标系**.拉格朗日坐标系用于刚体动力学.在拉格朗日坐标系中,加速度就是 $\ddot{\boldsymbol{r}}$,其中 $\boldsymbol{r}$ 表示质点或刚体上固定点的位矢.在流体力学中,我们也可以用拉格朗日坐标,不过这种描述方法不是特别有用,而欧拉坐标是应用最广泛的.在欧拉坐标系中,显然加速度不可能是 $\ddot{\boldsymbol{r}}$,因为这样的量是没有意义的;$\boldsymbol{r}$ 是空间中固定点的位矢,其时间的导数没意义.但是,当流体流过流场中任何点时,它确实会有加速度,这个加速度能够用流体速度表示出来.现在来导出加速度的表达式.

连续性(质量守恒)

从方程(3.1)出发,

$$\int_{C.S}\rho\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{A}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V.}\rho d\mathcal{V} \tag{3.1}$$

我们可以形式地应用高斯定理,将方程的左边变换体积分.因此,方程(3.1)可以写成

$$\int_{C.V.}\nabla(\rho\boldsymbol{V})d\mathcal{V}+\frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V}\rho d\mathcal{V}=\int_{C.V}[\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})+\partial\rho/\partial t]d\mathcal{V}=0 \tag{3.24}$$

因为控制体是任意的,所以被积函数必须为零.于是,我们得出连续方程的微分形式为

$$\partial\rho/\partial t+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0 \tag{3.25}$$

将方程(3.1)直接用于体积元,也可以得出上式.

对于定常流,则$\partial\rho\partial t=0$,推出

$$\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0 \tag{3.26}$$

对于不可压缩的定常流,则有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0 \tag{3.27}$$

在笛卡儿坐标系中,连续方程为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)=0 \tag{3.28}$$

对于不可缩流,则化为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{3.29}$$

在笛卡儿张量符号系统中,连续方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)=0 \tag{3.30}$$

笛卡儿张量符号的简要复习见附录E.

动量方程

我们将把动量定理的积分形式用于体积元,从而导出其微分形式.我们在空间取一小的固定的立方体,所以结果只有笛卡儿坐标系中成立.按照正规的数学方法,最好是用一般的矢量形式,但是,我们这里只给出最后的结果.当然,对于任何一个坐标系(柱坐标,球坐标等等),只要一开始就选取合适的体积元,则按照我们的做法,就可以导出该坐标系中动量方程的微分形式.

在开始推导之前,首先让我们来回顾一下应力张量的概念.我们将在动量平衡下来说明剪应力和正应力(包含压强).(在我们推导之后,我们再将这些应力和速度分量联系起来,得出动量方程的最后形式.)

设一流体的立方体为图3-9所示.应力记作 σ_{ij}.第一个下标表示应力作用的表面,第二个下标表示作用在正面上应力的方向.作用在背面上的应力,其大小与正面上的应力相同,而方向相反.(作用面是指与下标对应的轴的垂直平面,例如第一个下标为1,则作用面指与 x 或 x_1 轴垂直的平面).正负面的含义已在图3-9中标明.空间各点的应力可以不同,因此存在应力梯度.但是,可以确认空间中每一点都存在应力阵列 σ_{ij}(共九个应力),并且是 r 和 t 的函数.于

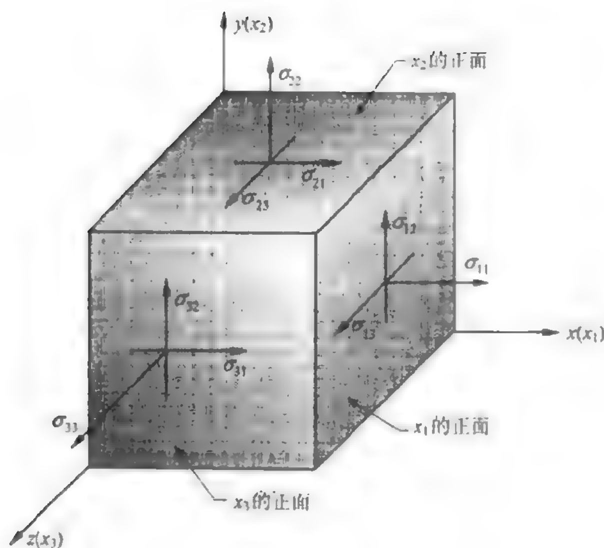


图3-9　空间一点的应力.图中画出了正面,反面是负面.
负面上的应力大小和正面相同,方向与正面相反

是应力张量可以写成

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix} \tag{3.31}$$

应力张量一定是对称的，即 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$，否则，当体积元收缩成无限小时，必将以无限大的角速度旋转.因此，应力张量只有六个独立的分量.

我们现在可以将积分形式的动量方程用于立方体元，由应力张量组成外力 $\boldsymbol{F}_s$，参考图3-10，我们可以写出 x 方向的动量平衡为

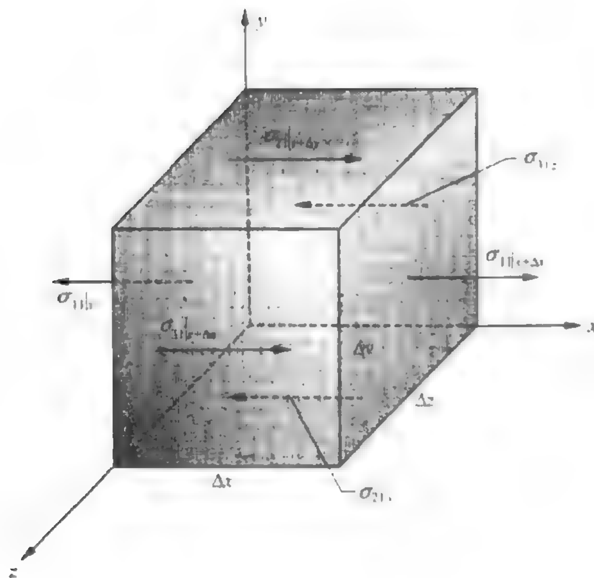


图 3-10　推导动量方程的立方体元.图中只画出了 x 方向的应力

$$
\begin{aligned}
&(\sigma_{11}\big|_{x+\Delta x}-\sigma_{11}\big|_{x})\Delta y\Delta z+(\sigma_{21}\big|_{y+\Delta y}-\sigma_{21}\big|_{y})\Delta x\Delta z\\
&\quad+(\sigma_{31}\big|_{z+\Delta z}-\sigma_{31}\big|_{z})\Delta x\Delta y+B_x\Delta x\Delta y\Delta z\\
&=\frac{\partial}{\partial t}(u\rho)\Delta x\Delta y\Delta z+\Delta y\Delta z(\rho u^2\big|_{x+\Delta x}-\rho u^2\big|_{x})\\
&\quad+\Delta x\Delta z(\rho uv\big|_{y+\Delta y}-\rho uv\big|_{y})+\Delta x\Delta y(\rho uw\big|_{z+\Delta z}-\rho uw\big|_{z})
\end{aligned}
$$

两边除以 $\Delta x\Delta y\Delta z$，取 Δx、Δy、$\Delta z\to 0$ 的极限，并利用连续方程(3.28)来简化，我们得到下述方程(用同样的方法得出 y 和 z 方向的分量方程)：

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}&=\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial z}+B_x\\
\rho\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}&=\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial z}+B_y\\
\rho\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t}&=\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z}+B_z
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

或用笛卡儿张量符号给出

$$
\rho\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t}=\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+B_i \tag{3.33}
$$

上述方程左边的项为加速度.$\partial/\partial t$ 项是非定常项，表示空间中固定点上物理量随时间的变化，而且方程左边其余的项则是熟知的**对流加速度项**，表示我们现在正在欧拉坐标系中工作.

算子 D/Dt 称为**随体导数**或**物质导数**. 一般说来,D/Dt 是一个矢量算子,所以除去在笛卡儿坐标系之外,D/Dt 对矢量作用后所得的分量与 D/Dt 对该矢量分量的作用结果是不同的. 方程(3.32)可以推广成任何坐标系中都适用的矢量形式. 此时加速度为 D$\boldsymbol{V}$/Dt①,得

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\nabla(V^2/2)-\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})$$

附录 C 中列出了各种坐标系中矢量算子 D/Dt 的具体形式. 在计算对流项($\boldsymbol{V}\cdot\nabla$)$\boldsymbol{V}$ 的过程中必须小心核实. 虽然对流项是经常用的,但是它只在笛卡儿坐标系中很容易展开(实际上它不是一个真正的矢量公式). 关于对流加速度的一个更好的和真正矢量表达式的等价形式是 $\left[\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})\right]$,在任何坐标系中都很容易展开成分量的形式.

物质导数算子也可以作用于标量,例如温度. 其结果是标量,物理意义为:随流体一起运动的观察者在空间特定位置和特定瞬时所测得的该物理量的随体导数.

为了说明对流加速度的物理意义,我们研究流体在收缩管中的流动,如图 3-11 所示. 由于点 B 处的截面小于 A 处的截面,所以点 B 处速度大. 因此,当流体质点从 A 向 B 运动过程中,受到由于面积变化引起的加速度(对流加速度). 如果我们又加上质量流量随时间的变化率,(例如某瞬时的质量流量为 3lb/sec,而 5s 后的质量流量为 4lb/sec),于是流动中各点受到速度的局部增量,即局部加速度. 所以,局部加速度产生的原因是流动是非定常的,而对流加速度产生于面积的变化. 必须强调指出:加速度是一个矢量,无论我们选用欧拉坐标还是拉格朗日坐标去表达它,都不会改变其大小和方向. 换句话说,在空间的点上和特定的时间上,流体都有确定的速度和加速度,包括大小和方向. 因此,D$\boldsymbol{V}$/Dt = $\ddot{\boldsymbol{r}}$ 其中 $\boldsymbol{r}$ 是拉格朗日坐标系中的位矢,而 D/Dt 是用欧拉坐标系来表示的算子.

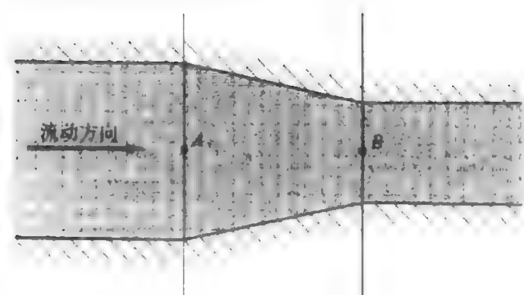


图 3-11　收缩管道

我们最经常研究的是定常流动. 这意味着大多数问题中局部加速度为零,因而流体质点的加速度,完全是由对流效应引起的.

理想流动的动量方程

理想流中没有剪应力,正应力就是压强,理想流是各向同性的. 由于我们已经规定正应力(σ_{11}、σ_{22} 和 σ_{33})是拉力时为正,所以现在令

$$\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=-p$$

因此,笛卡儿坐标系中的运动方程为

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+B_i \tag{3.34}$$

① 原文中 ρD$\boldsymbol{V}$/Dt 有误,应为 D$\boldsymbol{V}$/Dt——译者注.

原书缺页

现在我们转向黏性流动，但是首先要来讨论一下流体中的应力和应变率的关系.

3.4　运动学和流体中的应力-应变率关系

如果我们希望将研究扩展到黏性流体，我们就要对应力和应变率作更详细的讨论. 首先让我们来研究一个小的流体系统的运动，形状任意，例如取成立方体. 小立方体的运动可以分成两种类型：刚体运动和变形运动. 刚体运动又可进一步分为平动和转动. 对于刚体运动，我们通常是通过系统随质心的平动和系统绕质心的转动来描述的. 系统除去刚体运动之外，还可以有变形. 此时流体系统的变形完全可以由膨胀系数(体积的膨胀率)和系统的剪应变率来表征. 示意图如图 3-12.

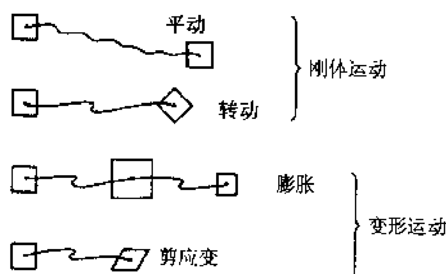


图 3-12　流体微元运动在运动学上的分类. 小立方体的形状是任意的. 图中只给出二维的情形，但是实际运动可以是三维的

现在，可以用速度矢量 $\boldsymbol{V}$(或 u_i)以及其导数给出上述各量的定量表达式如下：

平动

平动只需由一个速度矢量 $\boldsymbol{V}$ 给定，这个速度对应于流体微元趋向于无限小时，其质量中心的速度.

转动

转动速度(角速度)是可以定义在一个点上的物理性质. 一个有限的流体系统有一个平均的角速度，当系统趋向于无穷小时(取极限)，平均角速度的极限 $\boldsymbol{\Omega}$ 就是转动角速度的严格定义. $\boldsymbol{\Omega}$ 严格地等于$\frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{V})$. 通过在两个方向上检查转动，就可以很容易看出这一点. 设一个正方形，如图 3-13 中 xy 平面上所示. 我们画出两条对角线，这两条对角线在转动中保持相互垂直，微元边线的平均角速度为 Ω_z. 边线 Δx 的角速度为$(v|_{x+\Delta x}-v|_x)/\Delta x$，边线 Δy 的角速度为 $-(u|_{y+\Delta y}-u|_y)/\Delta y$. 对这两个表达式作平均，并在 $\Delta x\to 0$ 和 $\Delta y\to 0$ 时取极限，我们求出正方形的角速度

$$\Omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\tag{3.41}$$

类似可得

$$\Omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \Omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

我们发现 $\boldsymbol{\Omega}$ 笛卡儿分量的这些表达式和速度旋度的分量一样，所以

$$\boldsymbol{\Omega}=\frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{V})=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\tag{3.42}$$

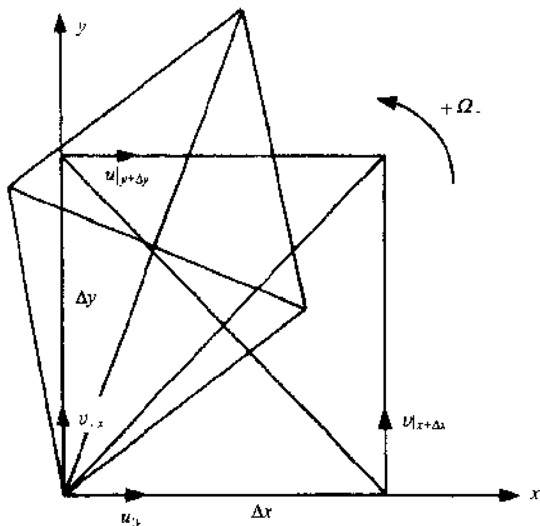


图 3-13　立方体流体微元在 x-y 平面上的转动和剪切

速度矢量的旋度称为**涡量**，$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{V}$，并且在流体力学中起着重要的作用.

在特定的流体流动中，转动可能发生，也可能不发生. 一般来说，流体中的黏性效应或摩擦效应使涡量增长. 如果流体流动中的角速度 $\boldsymbol{\Omega}$（和涡量 $\boldsymbol{\omega}$）为零，就称为**无旋流动**. 正如我们将在第六章看到的，这是空气动力学流动的一个特性. 无旋流动的一个简单例子是**旋涡**，在流体力学中称为**位势涡**.

显示涡量的简单方法是在水面上漂浮一小目标，注意它是否随水运动而旋转. 在水槽或浴缸中排水形成的旋涡是无旋流动，漂浮目标没有转动，在目标环绕排水孔的运动中，始终保持与自身平行.（即目标作没有转动的圆形平动.）

涡量计通常由一个标有箭头的小刚性漂浮十字形制成，可以观察转动. 用十字形代替小棒的原因是，必须测量两条垂直线的平均角速度来指示微元的角速度. 例如，在有旋的黏性剪切流动中，小棒将调整自身沿流动方向，并停止转动，而十字形将继续转动（图 3-14）.

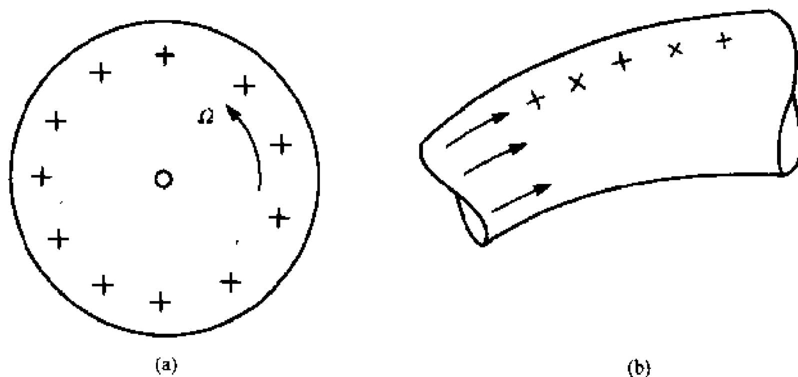


图 3-14　(a)汇涡的无旋流动. 十字标记沿圆形路径作平动，没有转动；
(b)管道中黏性流体的有旋流动

剪应变变形

再次来讨论图 3-13 中的正方形微元，我们可以求出其在 xy 平面中的剪应变率 γ_{xy}. γ_{xy} 是正方形两边夹角随时间的变化率，即

$$\gamma_{xy}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{3.43}$$

同理,三维中其他两个分量也很容易写出

$$\gamma_{xz}=\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\qquad \gamma_{yz}=\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

采用笛卡儿张量符号,则

$$\gamma_{ij}=\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\gamma_{ji} \tag{3.44}$$

容易验证,γ_{ij}是对称的,因为交换 i,j 并不改变表达式.剪应变率很难写成矢量形式.上述表达式只适用于笛卡儿坐标系.必须注意,如果采用其他坐标系,则表达式是不同的.附录C中给出了其他各种坐标系中的剪应变率的表达式.

膨胀系数

膨胀系数代表了流体微元系统的膨胀率或收缩率,查阅图3-15,膨胀系数可以用速度来表示.

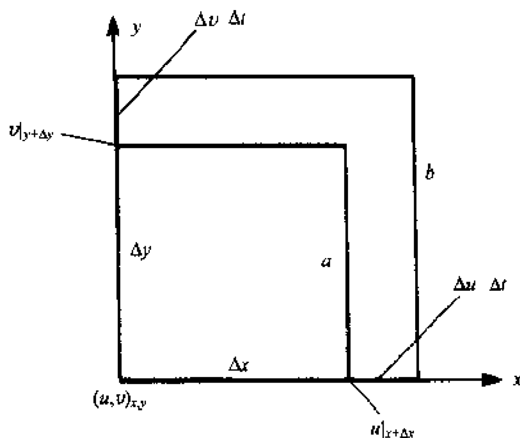


图3-15　立方体流体微元膨胀的示意图

我们研究一个以 Δx 和 Δy 为边的正方形,标以 a,这是以 Δx、Δy 和 Δz 为边的立方体体积元在xy 平面上的投影.经过 Δt 时间,正方形 a 膨胀成的正方形标以b.在其他的坐标系平面上,也可以给出类似的图形.于是在 Δt 时间内,立方体元增加的体积为

$$\Delta u\Delta t\Delta y\Delta z+\Delta v\Delta t\Delta x\Delta z+\Delta w\Delta t\Delta x\Delta y$$

除以 $\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$,并令 Δx、Δy、Δz、$\Delta t\to 0$ 取极限,我们得体积元的增长率(流体单位体积的)为

$$\phi=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{3.45}$$

用矢量形式可以写成

$$\phi=\nabla\cdot\mathbf{V} \tag{3.46}$$

这个膨胀系数的数值与所用的坐标系无关①.

① 在数学上,ϕ 是应变率张量的第一不变量.

流体中的应力-应变率关系

在流体力学中，速度梯度张量写成$\partial u_i/\partial x_j$. 这个张量的对称部分是**应变率张量**，反对称部分为**转动张量**，这与$\nabla \times \mathbf{V}$有关. 我们定义应变率张量为e_{ij}，转动张量为Ω_{ij}. 于是，速度梯度张量可以写成

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \Omega_{ij} \tag{3.47}$$

转动张量的分量与无限小流体元的角速度Ω_i的关系为

$$\Omega_1 = \Omega_{32} = -\Omega_{23}, \quad \Omega_2 = \Omega_{13} = -\Omega_{31}, \quad \Omega_3 = \Omega_{21} = -\Omega_{12} \tag{3.48}$$

其中Ω_1、Ω_2和Ω_3是角速度矢量(轴矢量)的分量. Ω_{ij}是相应的反对称转动张量($\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$)的分量. 通过纯数学的方法，可以证明任何一个轴矢量对应一个反对称张量.

采用矢量符号，下述重要的关系式可以写成

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \tag{3.49}$$

流体实际的角速度等于其速度矢量旋度的二分之一.

应变率张量的对角分量可以直接看成是真正的法向应变率. 但是，非对角元素(剪应变率分量)e_{ij}, $i \neq j$，却等于真正的剪应变率分量γ_{ij}的一半. 为了使e_{ij}成为真正的张量，必须有二分之一的系数. 我们可以写成$e_{ii} = \gamma_{ii}$和$e_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$ $(i \neq j)$. 应变率张量的笛卡儿分量和转动张量均列于下述公式(更完全的列表见参考文献[6])：

$$\begin{aligned}
&e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
&e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad e_{xz} = e_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\
&\Omega_x = \Omega_{zy} = -\Omega_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\omega_x \\
&\Omega_y = \Omega_{xz} = -\Omega_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\omega_y \\
&\Omega_z = \Omega_{yx} = -\Omega_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\omega_z
\end{aligned} \tag{3.50}$$

用笛卡儿张量完整地写出来，其中1,2,3分别对应于x, y, z，则$\partial u_i/\partial x_j$可以表示成和$e_{ij} + \Omega_{ij}$. 对角分量之和为$\phi$，可以将它看成是$\partial u_i/\partial x_j$的迹.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$
+\begin{bmatrix}
0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\
-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\
-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & 0
\end{bmatrix} \tag{3.51}
$$

现在看来,对于牛顿流体,根据定义,其应力和应变率是线性关联的.大多数常用的关系可以证明具有下述形式(用笛卡儿张量表示):

$$
\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\sigma'_{ij}=-p\delta_{ij}+2\mu e_{ij}+\delta_{ij}\lambda\phi \tag{3.52}
$$

σ'_{ij}称为**偏应力张量**,是总应力张量和各向同性压强 p 张量之差.力学中的压强定义为 $p=\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})=-\frac{1}{3}\sigma_{ii}$,而且是应力张量的不变量.偏应力张量的法分量 σ'_{11}、σ'_{22}和 σ'_{33}是真正的法应力 σ_{11}、σ_{22}和 σ_{33}与它们平均值之差.σ'_{ij}的法分量是应力张量各向异性的度量,只出现在运动流体中,通常是可以忽略的小量.必须注意,这里定义的力学上的压强并不总是等于热力学压强,但是从工程观点来说,其间的差异通常不太重要.ϕ 是流体的膨胀系数,定义为 $\nabla\cdot\boldsymbol{V}$(或$\partial u_k/\partial x_k$),在不可压缩流体中,$\phi=0$.$\delta_{ij}$是克罗内克符号.$\lambda$ 是第二黏性系数,另一个第二黏性系数定义为 $\zeta=\lambda+\frac{2}{3}\mu$,在单原子气体中 $\zeta=0$.方程(3.52)可以写成

$$
\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)+\zeta\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \tag{3.53}
$$

这个表达式的完整推导,读者可以查阅参考文献[6].

现在,可以将 σ_{ij} 的表达式(3.53)代入动量方程,得到黏性流体的完整的运动方程.这些方程通称为**纳维-斯托克斯运动**方程.

3.5　纳维-斯托克斯方程

纳维-斯托克斯方程是黏性牛顿流体的完整的运动方程组.利用方程(3.53),则方程(3.33)化为

$$
\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+B_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) \tag{3.54}
$$

通常,在允许误差下可以去掉黏性项.对于不可压缩流体($\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0$),上述方程组简化为

$$
\rho\frac{\mathrm{D}\mathbf{V}}{\mathrm{D}t}=-\nabla p+\boldsymbol{B}+\mu\nabla^2\mathbf{V} \tag{3.55}
$$

这是非常重要的方程,对于流体力学家应该是十分熟悉的.在体力为重力的条件下,$\boldsymbol{B}$ 可以写成 $-\rho\nabla\psi$.最重要是要记住,$\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ 和∇^2是矢量算子,除去在笛卡儿坐标系之外,不可以直接作

用于速度分量,必须首先完成对矢量的作用,然后再取分量.在各种坐标系中,上述方程的分量列于附录 C 和参考文献[6]中.如果根据公式$\nabla^2\boldsymbol{V}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{V})$,$\nabla^2\boldsymbol{V}$就可以直接进行计算.

虽然方程(3.55)看起来很简单,但是由于方程右边的非线性项,使得求解非常困难.事实上,它代表了流体力学研究中遇到的主要挑战之一.

现在,我们可以将完整的纳维-斯托克斯方程与理想流动的欧拉方程作一比较,其差别是前者含有黏性系数的附加项.如果流体是不可压缩的,附加项都是$\partial u_i/\partial x_j(i\neq j)$的形式.因此,对于不可压缩的,即使 μ 不为零,只要$\partial u_i/\partial x_j$ 形式的导数很小,黏性项就可以略去,方程简化为欧拉方程.

因此,若黏性系数很小,或速度对其他方向的导数远小于速度对自身方向的导数,则纳维-斯托克斯方程就简化为欧拉方程.在流体力学中,后一种近似是非常重要的.对于大多数的流动,假定存在两个区域:一个是在固体表面附近的区域,在这个区域中黏性项很重要(就必需用纳维-斯托克斯方程);另一个远离固体表面的区域,在这个区域中,欧拉方程是很好的近似.这两个不同区域是后面两章的内容:"边界层流动"(第五章)和"势流动"(第六章).由于这两个内容中方程的形式不同,所以各自处理的方法也是完全不同的.

有时要用到运动方程的其他形式,特别是不可压缩流动,因为其中 ρ 假定为常数.在不可压缩流动中,矢量形式的运动方程和连续方程组成了四个未知量(三个速度分量和一个压强)的四个方程.

对于基本变量($\boldsymbol{V}$ 和 p)的求解,也可以换成对其他变量的求解,即可以引入描述流场的新变量,先解出新引入的变量,再由新变量来确定出 $\boldsymbol{V}$ 和 p.

特别有兴趣的是用涡量 $\boldsymbol{\omega}$ 给出的运动方程.如果我们对矢量方程(3.55)(设 $\boldsymbol{B}=-\rho\nabla\psi$)中所有的项取旋度,利用标量梯度的旋度为零的性质(所以压强项和体力项都消去了),我们得

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}-\nabla\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{\omega})=\nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}\tag{3.56}$$

其中 $\nu=\dfrac{\mu}{\rho}$是运动黏度系数.展开并利用连续方程$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0$,以及$\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{V})=0$(因为任何一个矢量的旋度的散度为零),我们有

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}-(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{V}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}=\nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}\tag{3.57}$$

根据算子 D/Dt 的定义,可以写成$\partial/\partial t+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)$,得

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{D}t}=(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}+\nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}\tag{3.58}$$

这个方程和连续方程一起,可以用来描述不可压缩黏性流动的速度场(压强可由原来的运动方程来确定).

在物理上,这个方程告诉我们涡量在运动流体中是如何输运的.方程右边第一项是输运项,第二项是扩散项,且依赖于运动黏度系数 ν,所以也称为**黏性扩散系数**.如果假定 $\nu=0$(这是在黏性效应可以忽略的无黏性流动中),这个方程告诉我们,涡量不会通过流体扩散.事实上,涡量场是"冻结"在流体中的.涡量场和电磁场完全一样,可以用场线绘制出来.得到一个涡量场.涡线表示出各点涡矢量的方向,涡线的间距代表了涡量的强度.如果涡量场是"冻结"的,则涡线黏附在相同的流体分子上随流体一起运动.这个概念可以解释为流体线与涡线重合.**流体线**是由流体分子组成的物质链,即使发生了移位和扭曲,仍保持由原有流体分子组成.从这个物理概念出发,可以得出许多定理,详细情形读者可以查阅第六章.

在二维流动中,一定有$(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=0$(因为 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 是互相垂直的),方程(3.58)简化为

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{D}t} = \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{3.59}$$

在不可压缩流体的二维流动中,可以定义一个流函数.流函数的物理意义在第六章中讨论,不过,这里先介绍它在求解黏性运动方程中的应用.流函数是一个标量函数,定义为

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

(ψ 是流函数和重力势两者的常用符号.)

这样定义的流函数自动满足连续方程$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$,而且表明它是用于描述二维不可压缩流的.将上述流函数代入二维流动的涡量方程,得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi) + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\psi) + \nu\nabla^4\psi = 0 \tag{3.60}$$

其优点是:描述流动只需要一个标量方程(优于矢量方程).但是,边界条件往往很难用公式表示出来.

这里不再继续讨论这些方程,但是指出:涡量和流函数在流体流动的数值分析中是很有用的.

3.6 能量方程

我们从控制体的能量平衡来导出能量方程,然后用纯数学的方法在形式上得出微分形式.我们从类似于本章前面推导积分形式方程的方法开始,因此不去考察运动系统,而可以直接研究控制体.设控制体如图 3-16 所示.

假定图中表面上一点的速度矢量为 $\boldsymbol{V}$,导热和辐射的热通量矢量为 $\boldsymbol{q}$.则进入控制体的总的热流率 $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ 将是

$$-\int_{\mathrm{C.S.}} \boldsymbol{q}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = -\int_{\mathrm{C.S.}} q_i \mathrm{d}A_i$$

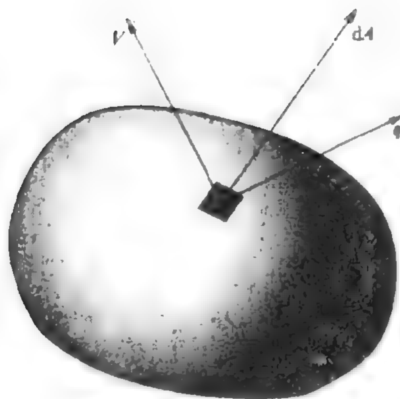


图 3-16 能量平衡的控制体

控制体内流体作的功又分为两部分:由控制面表面上压强所做的可逆功以及控制体表面上剪应力作的不可逆功.用应力张量来表示,由控制体内流体作的总功率(在笛卡儿张量形式中)为

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\int_{\mathrm{C.S.}} u_i\sigma_{ji}\mathrm{d}A_j$$

现在可以指出:控制体内总能量(包括动能、内能和势能)的净增率等于进入控制体的热流率,加上内部热量的生成率,再减去控制体内流体对周围作功的功率,因此有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{C.V.}} \rho e \mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\mathrm{C.S.}} \rho e u_i \mathrm{d}A_i = -\int_{\mathrm{C.S.}} q_i \mathrm{d}A_i + \int_{\mathrm{C.S.}} u_i\sigma_{ij}\mathrm{d}A_j + \int_{\mathrm{C.V.}} q''' \mathrm{d}\mathcal{V}$$

记住:e 是单位质量的总能量,由 $e = V^2/2 + u + \psi$ 给出,其中 ψ 是重力势,以前在推导积分形式方程时记作 gz. q'''是单位体积的内部热量生成率.应力张量可以分成压强部分和剪应力部分,即 $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$. 于是,利用高斯定理,能量方程化为

$$\int_{\mathrm{C.V.}} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho e u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}q_i + q''' + \frac{\partial}{\partial x_i}(p u_i) - \frac{\partial}{\partial x_i}(u_j\sigma'_{ij})\right]\mathrm{d}\mathcal{V} = 0$$

因为积分的体积是任意的,所以被积函数本身必须为零,将各项展开,并利用连续方程后,我们

得

$$\rho\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}=-\frac{\partial}{\partial x_i}q_i-p\frac{\partial u_i}{\partial x_i}-u_i\frac{\partial p}{\partial x_i}+u_i\frac{\partial\sigma'_{ji}}{\partial x_j}+\Phi+q''' \tag{3.61}$$

其中 $\Phi=\sigma'_{ij}\partial u_j/\partial x_i$ 是耗散函数①,是偏应力对流体作不可逆的功率.在附录C中给出了用 u_i 表示的式子.这里物质导数作用于标量,而不需要像在运动方程中那样,考虑其矢量的性质.各种坐标系中 D/Dt 的形式列于附录C.在物理上,这个导数是随流体一起运动的观察者所看到的性质或参数的变化率.如果不是考虑一个控制体,而是考虑一个特殊认定的流体质点,则用符号$\partial/\partial t$ 来代替.符号 D/Dt 的引入为了在欧拉坐标系中对一个流体系统(控制体内)写出瞬时的平衡关系.

方程(3.61)是很有用的,但是其中隐含着动量方程,如果将其消去,则可简化,我们注意到,方程左边是动能和势能的增长率,而右边的第三、四项是应力(包括压强)的功率.设体力 B_i 是保守的重力 $-\rho\partial\psi/\partial x_i$,则 $\boldsymbol{V}$ 与运动方程(3.33)作点乘,我们得

$$\rho u_i\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t}=\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{V^2}{2}\right)=-u_i\frac{\partial p}{\partial x_i}+u_i\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial x_j}-\rho u_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i} \tag{3.62}$$

这就是机械能方程.由于 ψ 不含时间 t,我们可以在方程右边加上 $\rho\partial\psi/\partial t$(因为是零),于是得

$$\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(V^2/2+\psi)=-u_i\frac{\partial p}{\partial x_i}+u_i\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial x_j}$$

能量方程(3.61)减去上式,得

$$\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}=-p\frac{\partial u_i}{\partial x_i}-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\Phi+q''' \tag{3.63}$$

这是能量方程的最后形式.这里 u 是单位质量的内能.

可以对方程(3.63)作各种简化.首先引入热传导的傅里叶定律,$\boldsymbol{q}=-\kappa\nabla T$,并假定热传导系数为常数,而且是完全气体($\mathrm{d}u=c_v\mathrm{d}t$).因此有$\partial u_i/\partial x_i=\nabla\cdot\boldsymbol{V}$ 和$\nabla\cdot\nabla T=\nabla^2T$,所以,我们最后可以写出

$$\rho c_v\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}=-p\nabla\cdot\boldsymbol{V}+\kappa\nabla^2T-\nabla\cdot\boldsymbol{q}_r+q'''+\Phi \tag{3.64}$$

其中 $\boldsymbol{q}_r$ 是辐射热通量矢量.这里必须指出:c_v 可以是温度的函数.尽管如此,c_v 总是在导数的外面(不是在里面).

方程(3.64)可以写成其他形式.如果我们引入比焓 $h=u+p/\rho$,则方程可以写成

$$\rho\frac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t}+\kappa\nabla^2T-\nabla\cdot\boldsymbol{q}_r+q'''+\Phi \tag{3.65}$$

对于完全气体,则化为

$$\rho c_p\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t}+\kappa\nabla^2T-\nabla\cdot\boldsymbol{q}_r+q'''+\Phi \tag{3.66}$$

必须注意,c_v 和 c_p 都在导数的外面(即使 c_v 和 c_p 是 T 的函数).这是根据 c_v 和 c_p 的定义得出的.

必须记住,不可压缩流体不一定是完全气体.且其 h 和 u 两者都依赖于 T 和 p.此时最好从方程(3.63)开始,并令$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0$.对于大多数液体(液态金属是例外),$c_v$ 和 c_p 近似相等,并有一定的精度,通常已足够了.在液体中,u 只是p 的弱函数,所以 $\mathrm{d}u=c_v\mathrm{d}T\approx c_p\mathrm{d}T$.于是,我

① 有时耗散项写成 $\mu\Phi$,这与我们的定义的耗散项差一个因子 μ.

们得到适合于液体的方程

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = \kappa\nabla^2 T - \nabla\cdot \boldsymbol{q}_r + q''' + \Phi \tag{3.67}$$

如果希望有更高的精度，为了计算方程(3.63)和(3.65)中的 u 和 h，必须利用热力学特性表．这两组方程都是正确的，u 与 h 的选取依赖于状态．

有时直接应用完整的方程(3.61)是有用的，特别是对于理想流体．对于理想流体，因为 $\sigma'_{ij}=0$ 所以方程(3.61)变成(设 $\psi=gz$，利用傅里叶定律并引入焓)

$$\rho \frac{D}{Dt}(V^2/2 + gz + h) = \frac{\partial p}{\partial t} + \kappa\nabla^2 T - \nabla\cdot \boldsymbol{q}_r + q'''$$

$$\rho \frac{D}{Dt}(V^2/2 + gz + u) = - p\nabla\cdot V - V\cdot\nabla p + \kappa\nabla^2 T - \nabla\cdot \boldsymbol{q}_r + q''' \tag{3.68}$$

除去包含电阻加热的情形之外，通常 $\boldsymbol{q}_r$ 是可以忽略的，而且 q''' 为零．所以流体动力学中几乎不考虑 $\boldsymbol{q}_r$ 和 q'''，只是为了完整起见，我们将它们包含在内．

现在回过头来比较一下方程(3.22b)，(3.22c)和(3.40)是很有意义的．方程(3.22b)是真正的能量方程．但是我们现在知道，由于总的能量方程[(3.61)或(3.68)]隐含有动量方程，方程(3.22c)事实上是机械能方程，在意义上和伯努利方程(3.40)相同．

热力学第二定律和熵增

通过引入单位体积熵生成率 θ 的概念，我们可以将方程(3.23)改接成等价形式．引入热通量矢量 $\boldsymbol{q}$，我们得出

$$\int_{C.V.} \theta d\mathcal{V} - \int_{C.S.} \frac{\boldsymbol{q}}{T}\cdot d\boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V.} \rho s d\mathcal{V} + \int_{C.S.} \rho s V\cdot d\boldsymbol{A} \tag{3.69}$$

利用高斯定理和连续方程，则得

$$\theta - \nabla\cdot(\boldsymbol{q}/T) = \rho\frac{Ds}{Dt} \tag{3.70}$$

通过引入能量方程，并利用基本热力学关系式

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho T\frac{Ds}{Dt} - p\nabla\cdot V \tag{3.71}$$

这是

$$du = Tds - pd(1/\rho)$$

的欧拉坐标形式．方程(3.70)可以写成(假定傅里叶定理成立，并忽略辐射)

$$\theta = \frac{\Phi}{T} + \frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}}{\kappa T^2} = \frac{\Phi}{T} + \kappa\frac{(\nabla T)^2}{T^2} \tag{3.72}$$

上式给出了用热流和黏性耗散两者不可逆性的耦合所表示的熵增率．

3.7　动量方程、能量方程、热力学方程和伯努利方程之间的关系

当我们在节 3.2 推导普适的能量方程时就指出，存在着两种独立的能量平衡：一个是功、能量和内能之间的热力学第一定律的平衡，另一个独立的是纯机械能的平衡．

我们现在可以直接从运动方程来导出机械能的关系式．机械能平衡说明流体中动能和势能的增长率等于外力对该流体作的功率，其中没有丝毫热力学的信息．这种机械能平衡的一般形式称为**广义伯努利**方程．通过沿流线对普通的非定常的运动方程(纳维-斯托克斯方程)积

分,我们可以得到机械能的平衡方程.为了简化,假定黏度系数为常数.此外,设由重力引起的单位体积的体力记作 $-\rho\nabla\psi$,则矢量形式的运动方程为

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V})\right]=-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{V}-\rho\nabla\psi$$

设一流线和流线上的弧元为 $\mathrm{d}\mathbf{s}$.上述方程的两边除以 ρ,变成单位质量的方程.将 $\mathrm{d}\mathbf{s}$ 与运动方程作矢量的点乘,并沿流线按流动方向从点 1 积分到点 2.我们得到

$$\int_1^2\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}+\int_1^2\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}-\int_1^2[\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V})\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}]$$

$$=-\int_1^2\left(\frac{\nabla p}{\rho}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}-\int_1^2\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}+\int_1^2\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\mathbf{V}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}$$

由于 $\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V})$ 垂直于流线,所以与 $\mathrm{d}\mathbf{s}$ 的点积为零.尽管证明已超出本书的范围,但是,黏性项代表了摩擦力对运动中单位质量流体所作的功,是阻碍流体从点 1 到点 2 运动的.因此,单位质量流体的方程可以写成

$$\int_1^2\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}+\frac{V_2^2-V_1^2}{2}+\int_1^2\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+(\psi_2-\psi_1)+w_f=0 \tag{3.73}$$

其中 w_f 是摩擦力阻碍流体从点 1 到点 2 运动所作的功.

如果我们研究管道和导管中的流动,而且通道内还有机器,则方程(3.73)还可以扩充成更普遍的形式.通道中的机器可以通过轴(穿过管道)连结在外部的动力源上或转换器上——例如涡轮机、抽水机或桨轮.或者我们设想管壁的一部分可以运动.如同一条运动在管壁洞口的连续的皮带,不是皮带驱动流体,就是流体驱动皮带.通过管壁输送给单位质量流体或从单位质量流体取出的功记作 w_s,称为**轴功**.根据习惯,以运动流体作的功为正,而对流体作的功为负.轴功 w_s 千万不要与 w_f 混淆.w_s 是通过控制体(管道)边界输入或输出的功,而 w_f 是管道内摩擦力所作的功.

方程(3.73)可以对通过管道、导管或机器内腔的每一条流线成立,而且,对整个管流按质量流率加权平均,或者管流在横截面上基本上是均匀的(像湍流中的情形),则方程(3.73)对整个管流亦成立,如图 3-17 所示.在管道中通过机器对运动方程积分,则机器各部分对流体的作用力(剪应力或压强)相当于局部的非保守的体力,可以直接加入运动方程.由于流线经过机器可以失去其完整性,因此直接积分也不容易.考虑到这些力所作的功,当然也包括通过管壁输入的轴功,由此得出下述方程,称为**推广的伯努利方程**.我们加上定常流动和在管道横截面上速度和热力学性质均匀的限制,并且将单位质量重力势 ψ 写成 $-\rho z$,其中 z 指某个基准面上的高度,则方程可写成

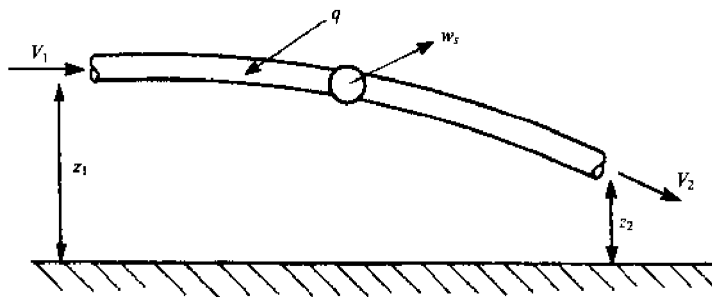


图 3-17　管道中的流动.w_s 和 q 分别是单位质量流体的轴功输出和传入的热量.z 是某个基准线以上的高度

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + g(z_2 - z_1) + w_s + w_f = 0 \tag{3.74}$$

因为 $\dot{m}$ 是质量流量,所以与 w_s 有关的功率就是 $\dot{m}w_s$. w_f 总是正的,但是 w_s 可以正可以负——对涡轮来说是正的,对水泵来说是负的.

习惯上将 w_f 用运动流体的**当量压头**来表示成**压头损失**:$w_f = gH_L$,其中 H_L 为压头损失(长度的量纲). 作为一个特殊的例子,设一水平的等截面管道($z_2 = z_1$),流体的密度为常数(连续性给出 $V_1 = V_2$),且 $w_s = 0$. 于是 H_L 代表摩擦效应引起的压头损失,则在差动压力计测出管道两点液柱高度差为 $H_L = z_1 - z_2$.

于是方程(3.74)可以写成

$$+ w_s = -\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} + g(z_1 - z_2) - gH_L \tag{3.75}$$

对于不可压缩流体,则有

$$+ w_s = \frac{p_1 - p_2}{\rho} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} + g(z_1 - z_2) - gH_L \tag{3.76}$$

对于涡轮,有

$$(p_1/\rho + V_1^2/2 + gz_1) > (p_2/\rho + V_2^2/2 + gz_2)$$

且 w_s 为正数,由此我们看到:在入口条件和出口条件给定的条件下,压头损失减小了功率输出. 对于水泵,有

$$(p_1/\rho + V_1^2/2 + gz_1) < (p_2/\rho + V_2^2/2 + gz_2)$$

且 w_s 为负的,因此在给定入口条件与出口条件的情况下,压头损失的出现要求增大水泵的输入功率.

总的能量方程(3.22)形式与方程(3.75)非常相似,而且在同样的假设下导出. 这两个方程都给出了 w_s 的表达式,在不同的情况,各有各的方便之处. 利用总的能量方程需要知道 q 和 Δu,面利用推广的伯努利方程则需要知道 H_L. 此外能量方程有一项 $p_2/\rho_2 - p_1/\rho_1$(不可压缩流动和可压缩流动都有),而在伯努利方程则是

$$\int_1^2 dp/\rho$$

两者通常是不同的. 两个方程之间的关系可以这样来看,根据定义

$$\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} = \int_1^2 d(p/\rho) = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \int_1^2 p d(1/\rho)$$

将这个关于 $p_2/\rho_2 - p_1/\rho_1$ 的表达式代入能量方程(3.22a),得

$$- w_s = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 p d(1/\rho) + (u_2 - u_1) - q \tag{3.77}$$

这是基于单位质量写出的方程(即流动的流体系统). 相对于随流体一起运动的观察者,对于处于状态 1 和状态 2 之间的"系统",热力学第一定律可以表述成

$$q - w = u_2 - u_1 \tag{3.78}$$

其中 w 是系统对外界作的总功,包括可逆功

$$\int_1^2 p d(1/\rho)$$

和等于$(-w_f)$的不可逆功. w_f 就是伯努利方程所定义的. 同时由热力学第二定律可知, w_f 一定是正数,即 $+w_f$ 是摩擦对系统作的功,摩擦力在本质上起着对系统加热的作用,在热力学上称为耗散. 将这些加在一起,方程(3.78)变成

$$w_f = (u_2 - u_1) + \int_1^2 p\mathrm{d}(1/\rho) - q$$

现在如果从能量方程(3.77)减去上式,就得到推广的伯努利方程(3.74). 同样因为 $w_f = gH_L$,我们确认 gH_L 一定等于

$$(u_2 - u_1) + \int_1^2 p\mathrm{d}(1/\rho) - q$$

对于不可压缩流动(ρ 为常数),则上式简化为

$$gH_L = (u_2 - u_1) - q$$

由此可见,推广的伯努利方程和普遍的能量方程是等价的. 能量方程中所包含的热力学信息,在推广的伯努利方程中是用等价的不可逆功来表示的. 换句话说,能量方程中包含着两个独立的能量平衡条件,一个是机械的,另一个是热力学的. 但是,伯努利方程是一个纯粹的机械能平衡方程. 根据情形不同,两个方程各有方便之处. 对于不可压缩的液体流动而言,伯努利方程更为有用,而对于热机中可压缩流而言,焓的变化是重要的因素,通常总的能量方程更为有用.

在第四、五章中,我们将了解到如何在实际情况下计算压头损失.

3.8 小结 应用和问题

本章中对方程推导既冗长又繁琐. 这些方程不可能表述成"简便的公式". 选择几个方程,加上一些数据,就祈求得到所需的结果,这种短平快的方法已不太可能了. 了解这些方程的意义,以及了解这些方程特殊形式的限制和约束,是最最重要的.

本章的顺序是从基本定律出发,列出相应系统的方程组,导出控制体的积分方程,导出微分方程,然后介绍这些方程某些简化的或应用的形式. 现在总结如下:

基本定律 →	系统方程组 →	(控制体)积分方程	或 微分方程
1. 连续性	1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m)=0$	1. 方程(3.1)	1. 方程(3.25)
2. 动量(线)	2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{V})=\boldsymbol{F}$	2. 方程(3.9)	2. 方程(3.32),(3.34),(3.54)
3. 动量(角)	3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$	3. 方程(3.11)	3. —
4. 能量	4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E)=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$	4. 方程(3.20)	4. 方程(3.64),(3.65)
5. 热力学第二定律	5. $\mathrm{d}S-\frac{\mathrm{d}Q}{T}\geqslant 0$	5. 方程(3.23)	5. 方程(3.69),(3.72)

积分方程

关于控制体的全部四个积分方程为

$$\text{外部效应} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{C.V.}} \xi\rho \mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\mathrm{C.S}} \xi\rho \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{3.79}$$

其中

基本定律	外部效应	ξ
连续性	0	1
线动量	$\boldsymbol{F}_s + \int_{C.V.} \boldsymbol{B} d\mathcal{V}$	$\boldsymbol{V}$
角动量	$\int_{C.S.} \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{F}_s + \int_{C.V.} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B} d\mathcal{V}$	$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V}$
能量	$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}$	e

对这些方程通过总结列出表格,我们很容易看出其间的相似之处.此外我们可以回顾和观察导出控制体方程的方法在本质上是一样的.

积分方程的特殊形式

1. 连续性——一维定常流

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 \tag{3.4}$$

2. 动量——在入口截面和出口截面上密度和速度均匀的一维定常流

$$F_x = \dot{m}(V_{2x} - V_{1x}),\quad F_y = \dot{m}(V_{2y} - V_{1y}),\quad F_z = \dot{m}(V_{2z} - V_{1z})$$

3. 角动量——在截面 A_1 和 A_2 上速度均匀地通过转子的定常流

$$T_z = \rho_1 Q_1 (r_2 V_{t2} - r_1 V_{t1}) \tag{3.14}$$

4. 能量方程——一维定常流

$$q - w_S = (p_2/\rho_2 - p_1/\rho_1) + (u_2 - u_1) + (V_2^2 - V_1^2)/2 + g(z_2 - z_1) \tag{3.22a}$$

5. 推广的伯努利方程

$$w_S = -\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} + g(z_1 - z_2) - gH_L \tag{3.75}$$

微分方程

1. 连续性

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = 0 \tag{3.25}$$

在不可压缩流中为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0 \tag{3.27}$$

2. 动量

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + B_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) \tag{3.54}$$

对于常密度和常黏性系数的流动,动量方程为

$$\rho \frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = -\nabla p + \boldsymbol{B} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{V} \tag{3.55}$$

3. 能量方程

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -p\nabla \cdot \boldsymbol{V} + \kappa \nabla^2 T - \nabla \cdot \boldsymbol{q}_r + \Phi + q''' \tag{3.64}$$

在各种坐标系中,各个方程更为具体的形式,见附录和参考文献[6].

问题求解的方法

在本章中,我们已经导出了流体力学中一些普遍而重要的方程. 一旦我们了解了这些方程之后,下一步就是要能够应用这些方程来解决实际问题.当缺乏求解实际问题的经验时,给出这方面一些一般性的引导应该是很有用的.

让我们来研究一下解决实际问题的可能的方法.一般来说,有如下三种方法:

1. 积分方程组——得出总的效果;

2. 微分方程组——得出分布规律;

3. 从基本定律出发,导出适合于特殊情形的方程.

积分方程通常适用于希望确定出总体的效果,例如运动流体作用在管道壁面或转子叶片的合力.微分方程则通常适用于希望得到分布的情况,例如围绕空气动力学部件的速度分布(速度场)和压强分布(压力场).从基本定律出发,对于任何特定问题导出合适的方程的可能性总是存在的(尽管在合适的假设下,从基本的积分方程或微分方程出发,总可以得出方程组).我们将发现,这种方法特别适用于导出边界层方程.

本章的方程是我们用以求解物理问题的工具(或者说是我们更好地去了解自然界的工具).求解的出发点是物理问题,而得到的解已经不再是(或很少是)原有物理问题的精确描述,但至少是一个近似的描述,其精确程度依赖于数学模型的精度.举例来说,求解的步骤可以概括如下:

1. 特定的物理问题.

2. 物理模型描述——我们用一个新的或简化的问题来代替原有的物理问题.例如,我们可以假定为一维流动,定常流动,流体遵循理想气体的物状方程等等.由这些假定建立起来的物理模型.

3. 数学模型——列出与物理模型相对应的数学方程.

4. 求解——在流体力学中,虽然有很多真正的实际问题有简单而精确的解,但是从数学观点来看,大多数问题的求解是非常困难的.通常是作简化假设,把求解的方程组简化成可以解的形式,或者求助于数值分析方法,以此来实现求解的.本书后面的章节将利用不同的假设条件对流体的流动进行各种分类.

5. 实验——最后一步是通过实验来确定模型的正确性.这一步在流体力学中是非常重要的,实验将促使模型的改进.

参考文献

1. Batchelor, G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge, 1967.
2. Bird, R.B., Stewart, W. E., and Lightfoot, E.N., *Transport Phenomena*, John Wiley, 1960.
3. Brenkert, K. Jr., *Elementary Theoretical Fluid Mechanics*, John Wiley, 1960.
4. Chapman, S., and Cowling, T.G., *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge University Press, 1961.
5. Curtiss, C.F., and Bird, R.B., *Molecular Theory of Gases and Liquids*, John Wiley, 1954.
6. Hughes, W.F., and Gaylord, E.W., *Basc Equations of Engineering Science*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1964.
7. Keenan, J.H., *Thermodynamics*, John Wiley, 1941.
8. Landau, L.D., and Lifshitz, E.M., *Fluid Mechanics*, Addison-Wesley, 1959.
9. Pai, S.I., *Viscous Flow Theory*, Vols. I and II, Van Nostrand, 1956.
10. Reynolds, W.C., *Thermodynamics*, McGraw-Hill, 1965.
11. Sabersky, R.H., Acosta, A.J., and Hauptmann, E.G., *Fluid Flow*, 3rd ed., Macmillan Co., 1971.
12. Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, 7th ed., McGraw-Hill, 1986.

13. Shames, I. H., *Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill, 1962.
14. Sommerfeld, A., *Dynamics of Deformable Media*, Academic Press, 1950.
15. Van Wylen, G. J., and Sonntag, R. E., *Fundamentals of Classical Thermodynamics*, 3rd ed., John Wiley, 1985.
16. White, F. M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, 1974.

例　题

3.1 设一可压缩流体通过弯曲管道的定常流动，如图 3-18 所示. 试求出流体作用在截面 1 和 2 之间管道上的力.

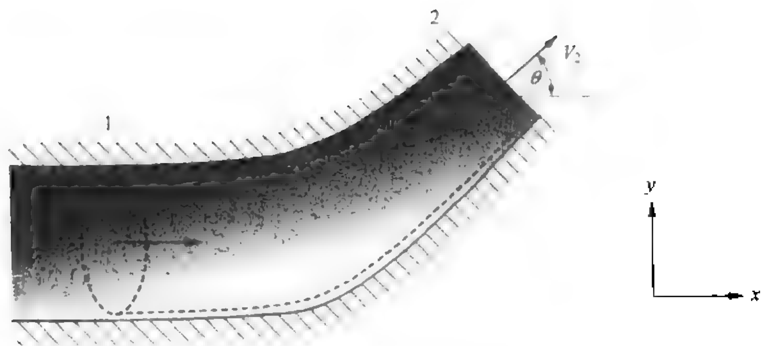


图 3-18

解 ☞ 首先，按图中虚线选定流体的控制体. 定常流的方程(3.9)为

$$\boldsymbol{F}_s + \int_{C.V.} \boldsymbol{b}\, d\mathcal{V} = \int_{C.S.} \boldsymbol{v}\rho \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{A}$$

假设在横截面 A_1 和 A_2 上速度和压强是均匀的，则 x 和 y 方向的表面力分别为

$$F_{sx} = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\theta + F_{px}$$

$$F_{sy} = - p_2 A_2 \sin\theta + F_{py}$$

其中 p 为压强，F_{px} 和 F_{py} 是管壁作用在流体上的未知力. 惟一的体力是重力的，等于截面 A_1 和 A_2 之间流体的重量. 对于大多数问题，重力相对于其他的力可以忽略. 特别是对于气体来说，更是如此. 因此我们略去体力，则动量通量项变为

$$\int_{C.S.} V_x \rho \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{A} = \rho_2 A_2 V_2^2 \cos\theta - \rho_1 A_1 V_1^2$$

$$\int_{C.S.} V_y \rho \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{A} = \rho_2 A_2 V_2^2 \sin\theta$$

于是上述方程变为

$$F_{px} = p_2 A_2 \cos\theta - p_1 A_1 + \rho_2 A_2 V_2^2 \cos\theta - \rho_1 A_1 V_1^2$$

$$F_{py} = p_2 A_2 \sin\theta + \rho_2 A_2 V_2^2 \sin\theta$$

流体作用在管道上的力(R_x, R_y)与力 $\boldsymbol{F}_p$ 是一对作用与反作用力，所以

$$R_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\theta - \rho_1 A_1 V_1 (V_1 - V_2 \cos\theta)$$

$$R_y = - p_2 A_2 \sin\theta - \rho_2 A_2 V_2^2 \sin\theta$$

3.2 设一水的射流冲击在固定叶片上形成定常流动，如图 3-19 所示. 试求保持叶片位置固定所需的力. 假设射流沿叶片表面顺流而过，并保

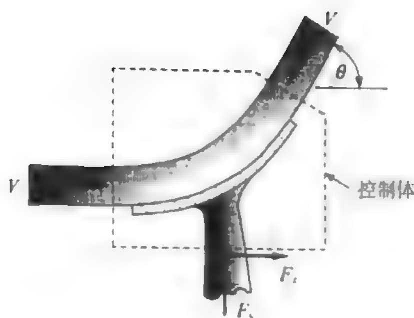


图 3-19

持其形状和横截面面积不变，然后可以对图 3-19 所示控制体列出动量方程.

解 将射流的整个表面暴露在大气压下，再加上射流与叶片接触面上的附加力，这就是射流的受力情况.这个附加的力就是射流转向所需的力.射流一侧的大气压力一定为其反侧的大气压力抵消.

于是，我们有

$$F_x = \rho AV^2\cos\theta - \rho AV^2, \quad F_y = \rho AV^2\sin\theta$$

同时这也是保持叶片位置固定所需的力.

3.3 在习题 3.2 中，设叶片沿 x 轴正向以某个速度 V_v 运动，其中 V_v 小于射流速度 V_j，叶片的运动如图 3-20 所示，试求出保持叶片作常速运动所需的力(即没有加速度).

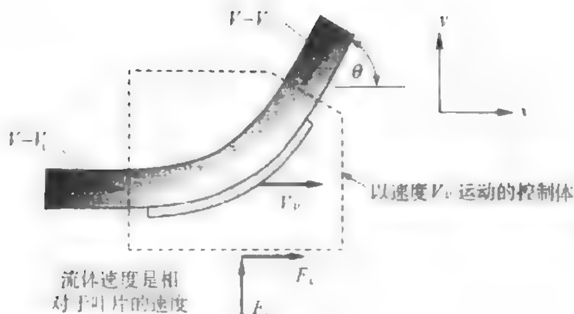


图 3-20

解 我们必须在相对于叶片静止的坐标系中写出动量方程.因此，所有的速度必须是相对于叶片的速度.流体进入控制体的相对速度为 $V_j - V_v$，如果略去叶片的摩擦力不计，则伯努利方程给出射流离开叶片的相对速度也是 $V_j - V_v$ 而方向转过了 θ 角.因为速度的大小相同，所以流动的横截面也一定相同.动量方程给出

$$F_x = \rho A(V_j - V_v)^2\cos\theta - \rho A(V_j - V_v)^2, \quad F_y = \rho A(V_j - V_v)^2\sin\theta$$

由此给出叶片保持常速所需的净作用力.因为叶片处于平衡状态，所以流体作用在叶片的力一定为 $-F_x$ 和 $-F_y$.因此叶片对流体的反力就是 F_x 和 F_y.

反之，我们以叶片的内表面为控制面，则控制体只包含流体.于是，分析是完全相同的，但是我们直接得出叶片作用在流体上的力为 F_x 和 F_y.

3.4 如图 3-21 所示，叶片以等速 $u = 30\text{fps}$(英尺/秒)运动，同时受到水射流的作用.射流离开喷嘴的速度 $V = 100\text{fps}$，喷嘴的出口截面积为 0.04ft^2.试求出射流作用在运动叶片上的力.

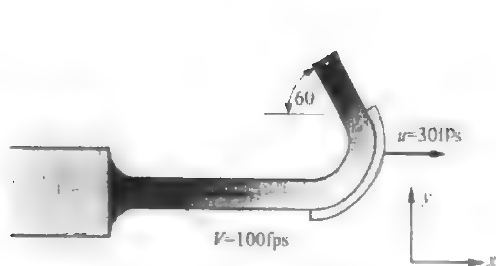


图 3-21

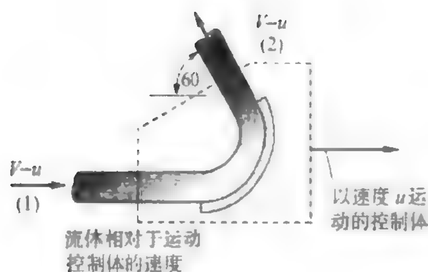


图 3-22

解 取包围叶片的控制体，如图 3-22 所示，相对于控制体的速度为 $V - u = 100 - 30 = 70\text{fps}$，沿 x 轴方向入射，以 $V - u = 70\text{fps}$ 沿图示方向离开.因此，由定常流动的动量方程确定出作用在流体上

的力为

$$F_x = \dot{m}(V_{2x} - V_{1x})$$

其中相对于控制体的质量流量 $\dot{m} = \rho A(V-u) = \rho A(100-30)$. 相对于控制体的入射速度和离开速度的 x 分量分别为 $V_{1x} = V - u$ 和 $V_{2x} = -(V-u)\cos60°$. 代入动量方程

$$\begin{aligned} F_x &= \rho A(V-u)[-(V-u)\cos60° - (V-u)] \\ &= -\rho A(V-u)^2(\cos60° + 1) = -(62.4/32.2)(0.04)(100-30)^2(\cos60° + 1) \\ &= -569\text{lbf} \text{ 作用在流体上} \end{aligned}$$

或 $F_x = 569$lbf, 作用在叶片上.

在 y 方向, 我们有

$$F_y = \dot{m}(V_{2y} - V_{1y})$$

入射速度的 y 向分量为 $V_{1y} = 0$, 出射速度的 y 向分量为 $V_{2y} = (V-u)\sin60°$. 以此代入动量方程.

$$\begin{aligned} F_y &= \rho A(V-u)[(V-u)\sin60° - 0] = \rho A(V-u)^2\sin60° \\ &= (62.4/32.2)(100-30)^2\sin60° = 329\text{lbf} \text{ 作用在流体上} \end{aligned}$$

或 $F_y = -329$lbf, 作用在叶片上.

作用在叶片上合力的大小为

$$|\boldsymbol{F}| = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2} = [(569)^2 + (-329)^2]^{1/2} = 658\text{lbf}$$

合力的方向为 $\tan\theta = -329/569 = -0.578$, 或 $\theta = -30°$, 其负号说明力指向下游. 最后, 作用在叶片上的力如图 3-23 所示.

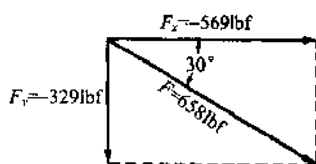


图 3-23

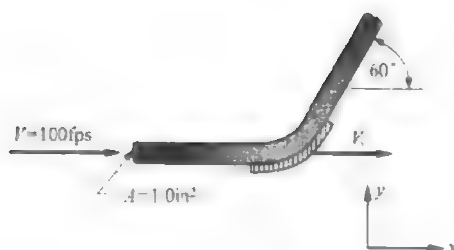


图 3-24

3.5 设一速度为 100fps 的水射流冲击在以速度 40fps 运动的叶片上, 如图 3-24 所示. 试定出 (a) 传输给叶片的功率和 (b) 射流离开叶片的绝对速度.

解 (a) 传输给叶片的功率等于在叶片运动方向上的力乘以叶片速度, 因此

$$\text{功率} = F_x \cdot V_v$$

而流体作用在叶片上的力可以由和叶片一起运动的控制体的动量方程来确定. 此时控制体以叶片速度运动, 如图 3-25 所示.

控制体的动量方程为

$$F_x = \dot{m}(V_{2x} - V_{1x}) \quad \text{(作用在流体上)}$$

这个 F_x 也是外部支架作用在叶片上的力, 见习题 3.3. 相对于控制体的质量流量为 $\dot{m} = \rho A(V - V_v)$, 在 x 方向的进出控制体的速度为 $V_{1x} = V - V_v$ 和 $V_{2x} = (V - V_v)\cos60°$. 以此代入 F_x, 得

$$\begin{aligned} F_x &= \rho A(V - V_v)[(V - V_v)\cos60° - (V - V_v)] = \rho A(V - V_v)^2(\cos60° - 1) \\ &= (62.4/32.2)(100/12 - 40/12)^2(\cos60° - 1) = -6.48\text{lbf} \text{ 在流体上} \end{aligned}$$

或作用在叶片上的 $F_x = 6.48$lbf. 因此, 功率 $= 6.48(40) = 259$ft-lbf/sec $= 0.472$ 马力.

(b) 脱离叶片的速度等于流体相对于叶片的速度加上叶片的速度, 所以流体离开叶片绝对速度在 x 方向的分量为

$$V_{2x} = V_{x\text{相对}} + V_v = (100-40)\cos60° + 40 = 70(\text{fps})$$



图 3-25

流体离开叶片的速度在 y 方向的分量为

$$V_{2y} = (100 - 40)\sin 60^\circ = 51.9(\text{fps})$$

流体离开叶片的绝对速度为

$$|\mathbf{V}_2| = (V_{2x}^2 + V_{2y}^2)^{1/2} = [(70)^2 + (51.9)^2]^{1/2} = 87.2(\text{fps})$$

流体离开叶片的方向为 $\tan\theta = 51.9/70 = 0.741$ 或 $\theta = 36.6^\circ$. 流体离开叶片的速度矢量示于图 3-26.

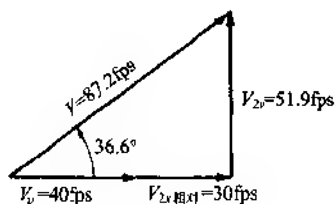


图 3-26

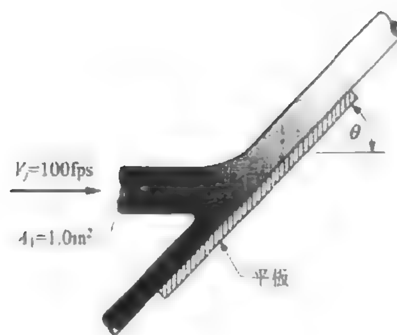


图 3-27

3.6 如图 3-27 所示,设平面的倾角为 θ. 试求出水的射流作用在斜面的力.

解 设控制体如图 3-28 所示,其中流体从截面 1 流入,在截面 2 和 3 流出,流体进入控制体的质量流量等于流体离开控制体的质量流量,给出

$$\rho A_1 V_j = \rho A_2 V_2 + \rho A_3 V_3 \quad 或 \quad A_1 V_j = A_2 V_2 + A_3 V_3$$

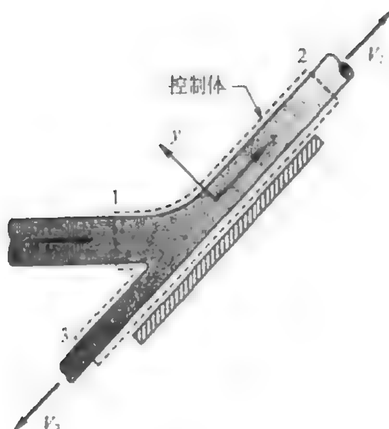


图 3-28

其次写出截面 1 和 2 之间和截面 1 和 3 之间沿流线的伯努利方程，得

$$p_1/\rho + \frac{1}{2}V_j^2 = p_2/\rho + \frac{1}{2}V_2^2$$

$$p_1/\rho + \frac{1}{2}V_j^2 = p_3/\rho + \frac{1}{2}V_3^2$$

其中已经略去了高度的变化，只要假定截面 1、2 和 3 上均为大气压，于是从伯努利方程给出 $V_1 = V_2 = V_3$. 利用三个速度相等的结果，则从连续方程得出 $A_1 = A_2 + A_3$.

现在我们来写出沿平板 x 轴方向的定常流的动量方程，略去流体与平板接触后的剪应力，参考图 3-29，得平板作用在流体上的力 F_x，即

$$F_x = 0 = \rho A_2 V_2^2 - \rho A_3 V_3^2 - \rho A_1 V_j^2 \cos\theta$$

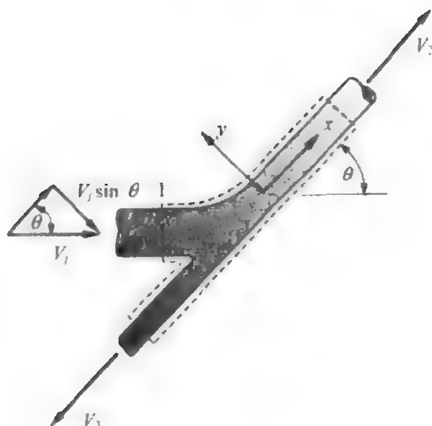


图 3-29

简化后得 $A_1\cos\theta = A_2 - A_3$. 将上式与由连续方程得出的表达式相加，我们得到

$$A_2 = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)A_1 \quad 和 \quad A_3 = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)A_1$$

其次，我们来列出垂直于平板的 y 轴方向的动量方程，得平板作用在流体上力的 y 轴方向分量 F_y 为

$$F_y = \rho A_1 V_j^2 \sin\theta$$

在上述给定的数值条件下，得

$$F_y = (62.4/32.2)(1.0/144)(100)^2 \sin\theta = 135\sin\theta(\text{lbf})$$

3.7 设二维收缩管如图 3-30 所示. 其截面面积呈线性变化，不可压缩流体的流量 Q 不变，且每秒流过收缩管单位宽度的流量 $Q = 10\text{ft}^3$. 试求出流动中加速度随距离 x 变化的函数？以及在离收缩段开始处下游 1ft 点上的加速度.

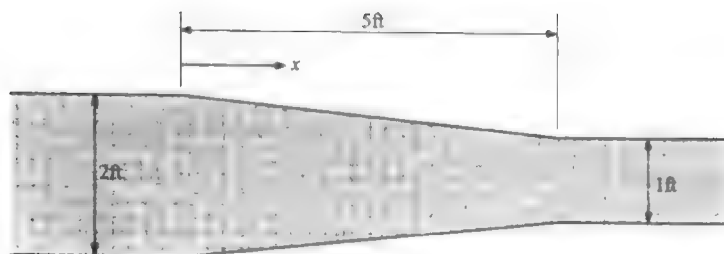


图 3-30

解☞　我们假定流动是准一维的，不计横向的变化（假定横截面上各量是均匀的），于是根据连续方程给出流量 Q 为

$$Q = uA = u(2 - x/5)$$

其中 u 是收缩管中流动的速度. 因为 Q 是常量，根据上式给出 u 是 x 的函数. 于是加速度公式为

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}$$

因为流动是定常的，有$\partial u/\partial t = 0$；又因为 u 只是 x 的函数，所以$\partial u/\partial x = \mathrm{d}u/\mathrm{d}x$. 于是直接将 u 的表达式对 x 求导，就可以得出 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$，最后得

$$a_x = u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{5Q}{10 - x}\right)\left[\frac{5Q}{(10 - x)^2}\right] = \frac{(5\times 10)^2}{(10 - x)^3} = \frac{2500}{(10 - x)^3}(\mathrm{ft/sec^2})$$

其中 x 的单位是 ft. 在 $x = 1\mathrm{ft}$ 处，$a_x = 3.43\mathrm{ft/sec^2}$.

3.8　在上一习题中，假设流动是非定常的，其流过收缩管单位宽度的流量 Q 的增长率为 $2\mathrm{ft^3/sec^2}$. 试求出通过收缩管道单位宽度流量为 $Q = 10\mathrm{ft^3/sec\cdot ft}$ 时流动中的加速度.

解☞　加速度公式 $a_x = \partial u/\partial t + u\partial u/\partial x$，而 $u\partial u/\partial x$ 与上题的结果相同. 不过现在$\partial u/\partial t$ 不等于零. 我们求出其为

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}(2 - x/5) = 2\mathrm{ft^3/sec^2/ft}$$

因此$\partial u/\partial t = 10/(10 - x)\mathrm{ft/sec^2}$，得出在 $x = 1\mathrm{ft}$ 处，$\partial u/\partial t = 1.11\mathrm{ft/sec^2}$. 然后，根据 $a_x = \partial u/\partial t + u\partial u/\partial x$，在 $x = 1\mathrm{ft}$ 处，得出 $a_x = 1.11 + 3.43 = 4.54\mathrm{ft/sec^2}$.

3.9　设一喷气发动机在试验台上进行静力试验，如图 3-31 所示，其空气的入口速度为 500fps，排出气体的出口速度为 3500fps，入口处空气的压强和出口处排气的压强均为大气压，其油气比为 1/50，进气口和排气口面积均为 $2\mathrm{ft^2}$，入口处空气的密度为 $0.0024\mathrm{slug\ s/ft^2}$. 试求出保持喷气发动机固定所需的力.

解☞　取截面 1 和 2 之间环绕发动机内流体的控制体，如图 3-32 所示. 定常流体的动量方程为

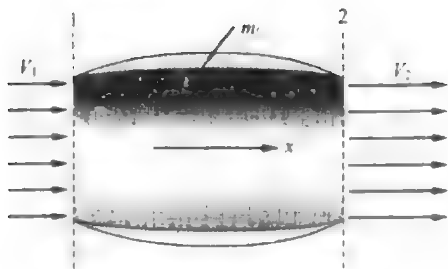


图 3-31

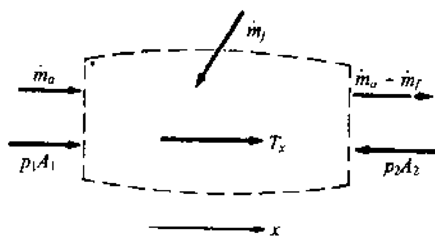


图 3-32

$$F_x = (\dot m_a + \dot m_f)V_{2x} - \dot m_a V_{1x}$$

其中 F_x 是作用在发动机上总的外力，包括流体的压强和支架的反力 T_x. $\dot m_a$ 是空气的质量流量，$\dot m_f$ 是燃料的质量流量，根据连续性，$\dot m_a$ 必须在入口端和出口端相同. 我们假设燃料在进入发动机时的 x 轴方向的动量可以忽略不计. 于是，我们可以得出

$$p_1A_1 - p_2A_2 + T_x = (\dot m_a + \dot m_f)V_{2x} - \dot m_a V_{1x}$$

但是，由于发动机的进出口面积相等，并且我们假设了 p_1 和 p_2 均为大气压强，我们有

$$T_x = (\dot m_f + \dot m_a)V_{2x} - \dot m_a V_{1x} = (\dot m_f/\dot m_a + 1)\dot m_a V_{2x} - \dot m_a V_{1x}$$

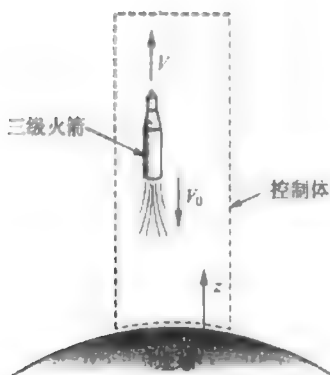
假设进口空气在标准条件下有 $\rho = 0.0024\mathrm{slugs/ft^3}$，空气的质量流量为 $\dot m_A = \rho_1 A_1 V_1 = (0.0024)(2)\times(500) = 2.40\mathrm{slugs/sec}$. 于是，我们有 T_x 为

$$T_x = (1/50+1)(2.40)(3500) - (2.40)(500) = 7300(\text{lbf})$$

发动机的静推力等于 T_x，方向相反.

3.10 设一用于空间探测的三级火箭. 前两级火箭将携带第三级火箭离开地球达到发射高度，在这个高度以上运行，地球引力可以忽略，摩擦阻力也可以忽略. 当第二级火箭达到这一最大高度时，再将第三级火箭发射出去. 显然，此时第二级火箭相对于地球的速度为零. 最后一级火箭发动机的排气速度设计成相对于火箭不变，其值为 V_0ft/sec. 试用相关的参数表示出第三级火箭的末速度.

解 在图 3-33 中取一圆柱形控制体，从发射高度开始，向上延伸到足够的高度，可以包含第三级火箭、第三级火箭的燃料以及其排出的所有物质. 因为控制体内不存在任何外力，所以火箭、燃料和所有排出物质加在一起的总动量不变(守恒). 记 M 为第三级火箭的质量，m 为火箭燃料的瞬时质量，$\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ 为火箭燃料质量随时间的变化率(因为 m 是减少的，所以 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ 是负的)，V 为火箭的速度. 所以，火箭和燃料的总动量在 t 瞬时的 z 轴方向分量为 $(M+m)V$，排出物质动量的 z 轴方向分量为 $\int_0^t -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(V-V_0)\mathrm{d}t$. 因此，动量平衡为



$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(M+m)V] - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(V-V_0) = (M+m)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + V_0\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

图 3-33

其中 V 是火箭绝对速度在 z 轴方向的分量，但是 $m = m_0 + (\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)t$，这里 m_0 是 $t=0$ 时刻燃料原有的质量，即第三级火箭刚点火时的燃料质量，同时假设 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ 为常数，并记作 $\dot{m}$. 于是我们有

$$0 = (M + m_0 + \dot{m}t)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + V_0\dot{m}$$

由此可以积分，当 $t=0$ 时 $V=0$，当燃料用完时，$V=V_f$，$m=0$，V_f 是第三级火箭的末速度，燃料在时间 $t=m_0/(-\dot{m})$ 时完全耗尽，记住 $\dot{m}$ 是负的，于是得

$$\int_0^{V_f}\mathrm{d}V = -\int_0^{-m_0/\dot{m}}\frac{V_0\dot{m}}{M+m_0+\dot{m}t}\mathrm{d}t \quad 和 \quad V_f = V_0\ln\frac{M+m_0}{M}$$

3.11 设水流过平板所形成的边界层，简化成二维流动，如图 3-34 所示. 在平板前缘处，水流的速度均匀，等于 U. 在平板后缘下流处，速度剖面如图所示，试利用控制体法求出流体作用在平板上的剪力.

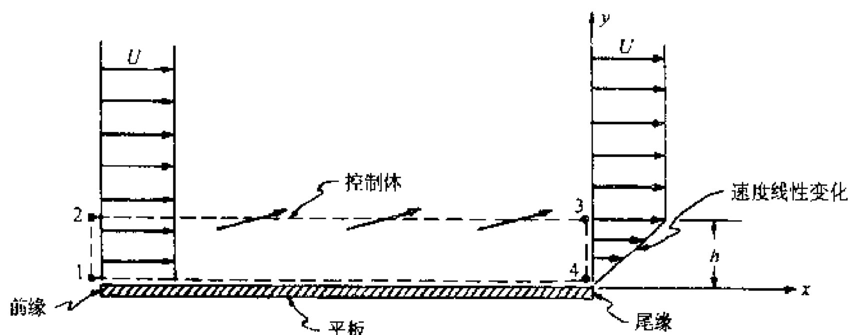


图 3-34

解 取一矩形控制体如图所示，写出

$$\boldsymbol{F} = \int_{CS}(\rho\boldsymbol{V})\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 是作用在流体上的合力.由于,我们假设整个流动中的压强是均匀的,当我们写出平行于平板的 x 轴方向的动量方程时,F_x 就是平板作用在流体上的剪力.穿过控制面 2－3,流体的流动有很小的垂直于平板的速度分量,而平行于平板的速度分量近似为 U.因此,单位宽度平板上的剪力为

$$F_x = \underbrace{-\rho U^2 h}_{1-2} + \underbrace{\int_0^h (\rho U^2 y^2/h^2)\mathrm{d}y}_{3-4} + \underbrace{\dot{m}U}_{2-3}$$

其中 $\dot{m}$ 是平板单位宽度上流过控制面 2－3 的质量流量,有 $\dot{m} = \rho Uh - \rho Uh/2 = \rho Uh/2$,于是

$$F_x = -\rho U^2 h + \rho U^2 h/3 + \rho U^2 h/2 = -\rho U^2 h/6$$

F_x 的值是负的,表明它是作用在流体上的阻力(作用在负的 x 轴方向),流体作用在平板的力的大小等于 F_x,方向与其相反.

3.12 一离心泵,如图 3-35 所示.抽水量为 1.0ft^3/sec,水沿轴向进入叶轮.叶轮半径为 10in,在外径处,叶片高为 1.0in,沿着径向.设离心泵的转速为 1000rpm.试求输入给转子的功率.

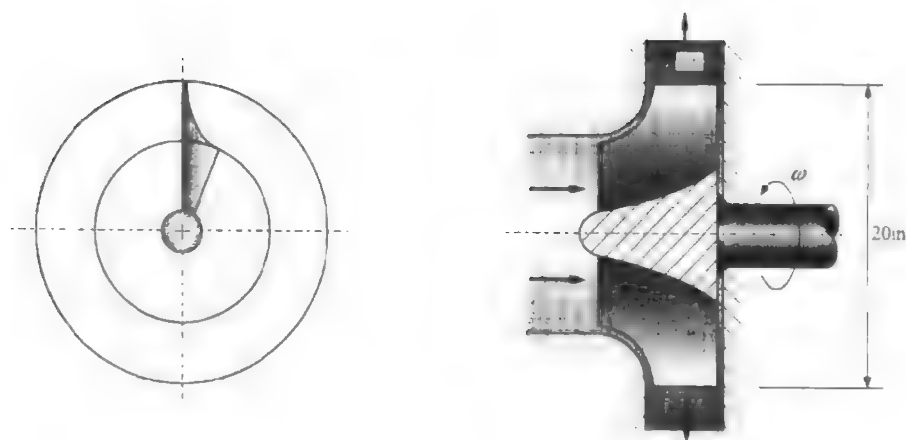


图 3-35

解 输入功率为作用在转子上的扭矩 T 乘上转子作功的角速度 ω,功率 $= T\omega$.已给角速度,而扭矩可以由定常流的角动量方程确定.对于旋转轴的扭矩,我们有

$$T_z = \int_{CS} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V})_z \rho \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

其中选取环绕叶轮的控制面如图 3-36 所示,所以方程中的扭矩是驱动轴作用在转子上的转矩.假设

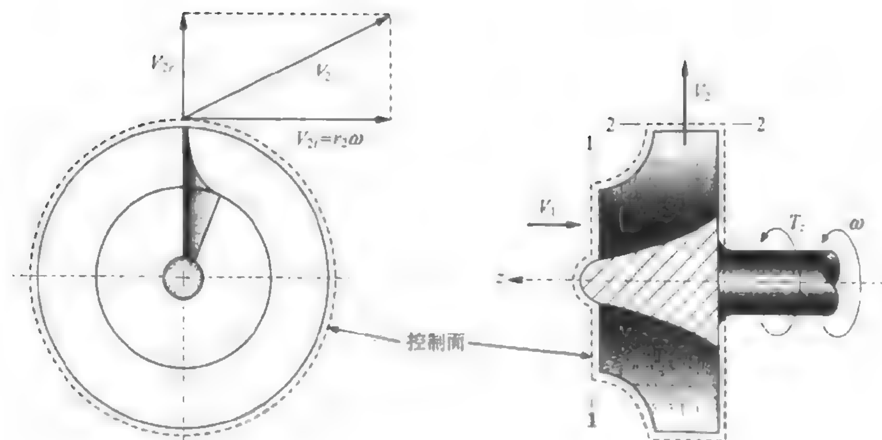


图 3-36

入口截面和出口截面上的速度是均匀的，我们有

$$T_z = \rho_1 Q_1 (r_2 V_{t2} - r_1 V_{t1})$$

其中 $\rho_1 Q_1 = \dot{m}$ 是质量流量. 因为在叶轮进口处的流动是沿轴向的，所以沿周向的速度分量 $V_{t1}=0$. 于是，我们只需确定出出口处的周向速度分量. 假如在叶轮的出口处无滑移，流体严格地沿叶片型线流动，则出口处流体的周向速度 $V_{t2} = r_2\omega = (10/12)(100\times 2\pi/60) = 87.3$ft/sec，且转矩 $T_z = (62.4/32.2)(1.0)(10/12)(87.3) = 141$lbf-ft. 所需的输入功率 $= 141(1000\times 2\pi/60) = 14\ 800$ft-lbf/sec $= 27$h·p.

3.13 设水从导管上 1/8 in 的狭缝中水平地流出，如图 3-37 所示. 总流量为 1ft^3/sec，速度呈线性变化，一端有最大值，一端为零. 试求出从狭缝流出的流体对垂直导管管轴的力矩.

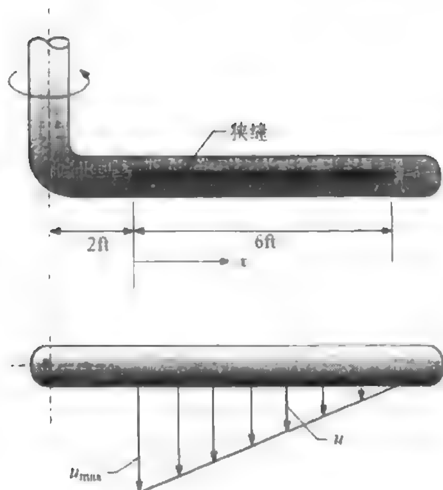


图 3-37

解 首先确定出速度分布的表达式，令 u_{max} 为在狭缝处的最大速度，如图 3-37 所示. 于是沿导管的速度分布为

$$u = u_{max}(1 - x/6)$$

u_{max} 的值可根据连续方程来确定. 总流量

$$Q = \int_A u\,\mathrm{d}A = \int_0^6 u_{max}(1 - x/6)\left(\frac{1}{8}\bigg/12\right)\mathrm{d}x = 1$$

得 $u_{max} = 32$ft/sec. 其次，连接管对水平管的反作用力矩可通过图 3-38 所示的控制体的讨论来确定. 因为 $\boldsymbol{r}$ 垂直于 $\boldsymbol{V}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 平行于 $\boldsymbol{V}$，记 M 为由连接管给出的力矩，则

$$M = \int_{C.S.} (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V})\rho\boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_{C.S.} (ru)\rho u\,\mathrm{d}A$$

同时因为 $r = 2 + x$ 和 $u = 32(1 - x/6)$，所以得

$$M = (32)^2 \rho\int_0^6 (2 + x)(1 - x/6)^2\left(\frac{1}{8}\bigg/12\right)\mathrm{d}x$$

当 $\rho = 62.4/32.2$slugs/ft^3 时，上式给出 $M = 145$lbf-ft. 这是对连接管轴的矩，它在确定导管中的应力时是很重要的，矩的符号是正的，如图 3-38 所示. 水平导管作用于垂直的连接导管的力矩，其大小等于 M，符号与之相反.

3.14 图 3-39 给出一草地洒水装置的俯视图，它由两个有直角喷嘴的臂组成，在水平面内绕枢轴转动，通过每个喷嘴的流量为 Q，喷嘴的出口面积为 A. 当洒水器转动时，(a)没有阻碍转动的摩擦力；(b)有不变的摩擦力矩 T_f 作用在洒水器上，试求水离开喷嘴时的绝对速度.

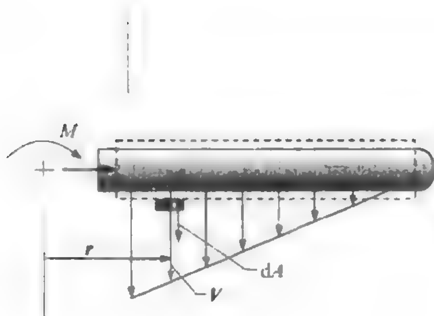


图 3-38

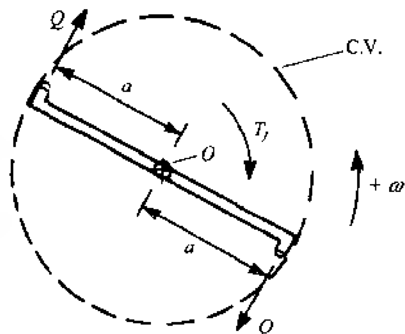


图 3-39

解 取圆柱形控制体如图所示.进入枢轴的流动没有角速度,对点 O(即枢轴)用角动量方程(3.14),得

$$T = 2\rho QaV_t$$

其中 V_t 为周向的绝对速度(即相对于固定控制体的速度),是流体穿过固定控制体的速度,Q 是流体穿过控制体表面的流量,相对于运动臂或相对控制体的 Q 相同,其中因子 2 是由于有两个喷嘴,喷嘴的圆周速度为 $a\omega$,所以喷嘴的绝对速度可以写成

$$V_t = \left(a\omega - \frac{Q}{A}\right)$$

所以

$$T = 2\rho Qa(a\omega - V)$$

其中 $V = Q/A$ 为喷流相对于喷嘴的速度.对于情形(a).$T=0$,所以 $V_t=0$,因此 $a\omega = Q/A = V$.在物理上,这表明水离开喷嘴时相对地面的速度为零,水只能铅垂地落向地面,所以只浇湿了喷嘴下面的一个圆周,给出 ω 为

$$\omega = \frac{V}{a} = \frac{Q}{aA}$$

情形(b).此时 $T_f = 2\rho Qa(a\omega - V)$,由于 T_f 是阻力矩,所以是负的,于是 ω 为

$$\omega = \left(\frac{V}{a} - \frac{T_f}{2\rho Qa^2}\right)$$

喷流的绝对速度为 $-(T_f/2\rho Qa)$.如果 T_f 增大到洒水装置不能转动,所以 $\omega=0$,$(T_f = 2\rho Q^2 a/A)$,于是离开喷嘴的绝对速度最大,变成 Q/A.我们知道,对于洒水区域呈一圆形,摩擦力矩必须作用于转子,有关这个问题的有趣的讨论,见习题 6.35.

3.15 水跃是一种自然界中经常发生的扰动现象,这是流动液体在液面深度上突然出现的不连续性,在有潮汐的河流中,经常可以观察到水跃现象,或固定在一定的位置上,或者向上流传播.水跃很容易在实验室中产生,将西餐大盘水平地放在水龙头下,就可以演示水跃现象.让水龙头针对盘的中心打开,就可以观察到水流在一个紧贴盘的薄层中呈辐射状向外流出,而且在水流越过盘缘之前,突然出现水层厚度的增加.试用图 3-40 中的

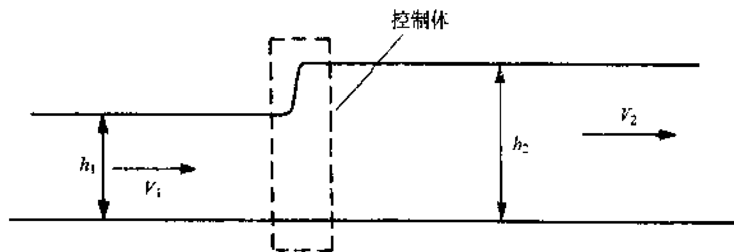


图 3-40

相关参数,求出上下游厚度之间的关系.

解 取图上控制体、宽度为 w. 水跃相对控制体是固定的. 假定速度 V_1 和 V_2 沿渠是均匀的. 假定控制体非常薄、底部的摩擦力可以忽略不计,根据连续方程

$$w\rho h_1 V_1 = w\rho h_2 V_2 = Q$$

根据动量方程(考虑各个面上的流体静压强),有

$$\frac{\rho g h_1^2}{2} - \frac{\rho g h_2^2}{2} = \rho V_2^2 h_2 - \rho V_1^2 h_1$$

综合上述方程,我们得

$$(h_1 - h_2)\left(h_1 + h_2 - \frac{2h_1 V_1^2}{g h_2}\right) = 0$$

在上式的解中,$h_1 = h_2$ 对应于均匀流动;而令第二个括号为零,我们解出 h_2 由 h_1 和流量 Q 给出的关系式为

$$\frac{h_2}{h_1} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2Q^2}{w^2 g h_1^3}}$$

由此从能量观点和热力学第二定律出发,得出 $V_2 < V_1$ 和 $h_2 > h_1$,因为经过水跃一定有摩擦损失.

考察一下当 h_1 趋向于 h_2 的结果是很有趣的,此时水跃变成小的表面波. 在此极限情况下,可以从上述方程看出:$V_1 = V_2 = \sqrt{gh}$,其中 $h \approx h_1 \approx h_2$.

3.16 水库的水面高于涡轮机,高度为 h(图 3-41),水通过直径为 D 的管道流下,并通过涡轮机排入河流,排水管与涡轮机位于同一高度. 试求出可以从涡轮机输出的最大功率(略去系统中的所有损失).

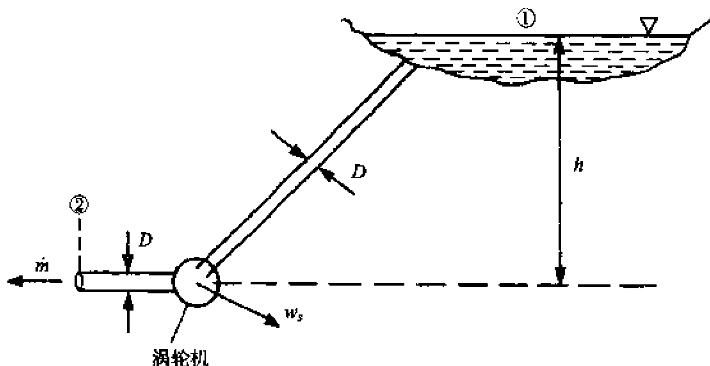


图 3-41

解 现在来写出点 1 和点 2 之间的不可压缩流体的推广的伯努利方程,假定水库的水面不变,点 1 处的速度可以忽略不计,略去损失.

$$w_s = \frac{p_1 - p_2}{\rho} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} + g(z_1 - z_2)$$

令 $z_2 = 0, z_1 = h, V_1 = 0, p_1 = p_2 = 0$(表压),所以

$$w_s = -\frac{V_2^2}{2} + gh$$

输出功率为

$$\dot{m}w_s = \rho V_2 A w_2 = \rho V_2 \pi D^2 w_s / 4 = T\omega$$

其中 T 是涡轮机输出力矩、ω 是角速度,于是

$$\text{输出功率} = \dot{m}w_s = \frac{\rho V_2 \pi D^2 w_s}{4} = \frac{\rho V_2 \pi D^2}{4}\left(gh - \frac{V_2^2}{2}\right)$$

此处 V_2 有两个值使输出功率为零,即 $V_2 = 0$ 和 $V_2 = \sqrt{2gh}$,在 $V_2 = 0$ 时,有一个力矩作用在涡轮机

上，但是没有流动．这就是说涡轮轴被卡死了．不能转动（$\omega=0$）．在 $V_2=\sqrt{2gh}$ 时，涡轮机可以自由转动，但是没有输出力矩产生．我们对给出输出功率的上式求最大值．先将上式对 V_2 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V_2}(功率)=\frac{\rho\pi D^2}{4}\left(gh-\frac{3V_2^2}{2}\right)=0$$

于是解出

$$V_2\mid_{最大功率}=\sqrt{2gh/3}$$

所以最大输出功率为

$$\frac{\rho\pi D^2}{4}\left(\frac{2gh}{3}\right)^{3/2}$$

补 充 习 题

3.17 产生真空的一种方法是将系统连接在文丘里管的喉部，然后通过文丘里管的高速水流来抽真空，如图 3-42 所示．为产生 20in 汞柱的真空，试求所需的水流流量．

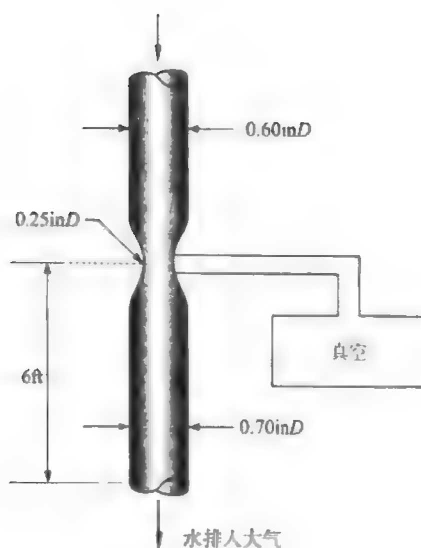


图 3-42

3.18 一根长为 Lft，半径为 $a$ft 的圆管，借助于法兰和螺钉，装配在贮液罐光滑的圆形出口上，如图 3-43 所示．在法兰截面处，截面上速度均匀，大小为 V_0．在管子的出口处，排入大气，由于管道内摩擦力的作用，速度剖面呈抛物型．为了保持圆管固连在贮液罐口上，螺钉必须承担多大的作用力．

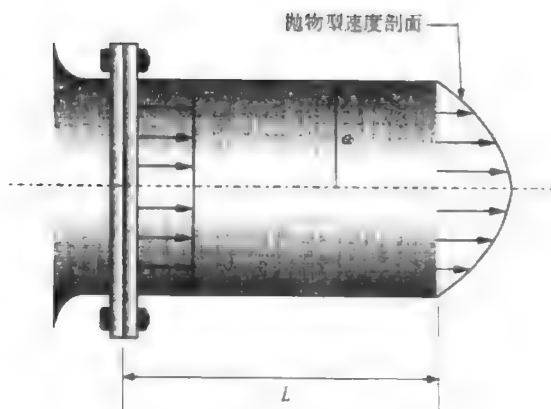


图 3-43

3.25 水流定常地沿铅直管道向上,并进入圆板间的环形区域,如图 3-46 所示.然后沿径向向外流出,形成一自由水层.(a)如果完全忽略摩擦力,则在截面 A 上的压强为 24.7psi 时,问水在管道中的流量为多少?(b)忽略管子本身的重量,试确定作用在截面 A 处管道壁面上力的大小.

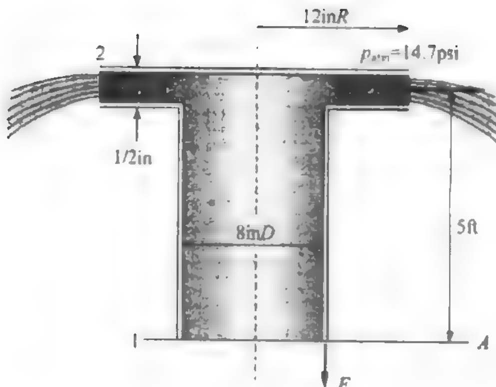


图 3-46

3.26 设一辆汽车在常力 $F=1000$lb 的作用下,沿水平地面以速度 $V=100$ft/sec 运动.在 $t=0$ 时,有质量通过底部的小孔流出.假定沿汽车的垂直方向离开,质量流量为 10lb/sec,汽车在常力 F 的作用下继续前进.已知汽车原有质量为 2000lb,试确定 20sec 时的车速.

3.27 设一四轮水车(图 3-47),受到水射流冲击后沿水平无摩擦的轨道前进.已知射流的水平速度为 30ft/sec,

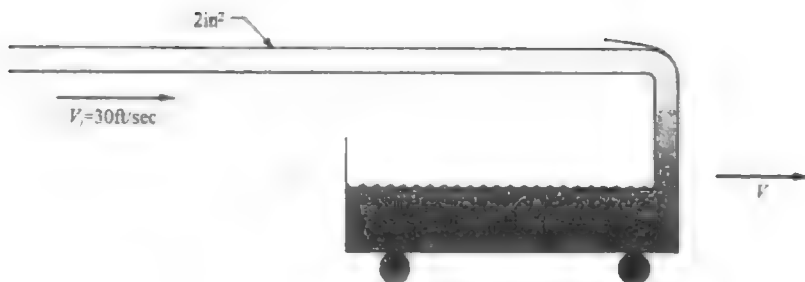


图 3-47

射流横截面的面积为 2in².设水射流赶上四轮车后,冲击车上最远的一端,然后向下流入四轮车的水箱内.没有水溅出车外,全部落入水箱.在 $t=0$ 时,四轮车的速度为 10ft/sec,车子本身和这个时刻水的总质量为 100lb.假设在整个时间过程中,射流一直跟着四轮车并落入其水箱,试求出四轮车由速度 10ft/sec 加速到速度 20ft/sec 时所需的时间.

3.28 如图 3-48 所示,当水定常地流过水轮机时,水轮机产生的功率为 75h.p.,流量为 1200lb.

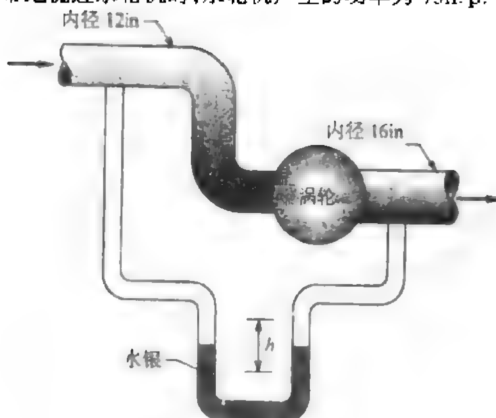


图 3-48

设水轮机进口管内径为 12in，出口管内径为 16in. 管道系统的其余部分未画出，进出口的压强是未知的，图中管道系统的高度变化也是未知的.

草图中所示的水银压强计连接在进出口上，试在定常条件下求出水银柱的高度差 h，并说明哪一边水银柱的液面高?

3.29 某管道有收缩段如图 3-49 所示. 某瞬时水进入的速度 $V_1 = 30\text{ft/sec}$，加速度为 2ft/sec^2. 假设管道横截面上的速度分布都是均匀的，试求当 $V_1 = 30\text{ft/sec}$ 时，在 $x = 1\text{ft}$ 处的压力梯度 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$.

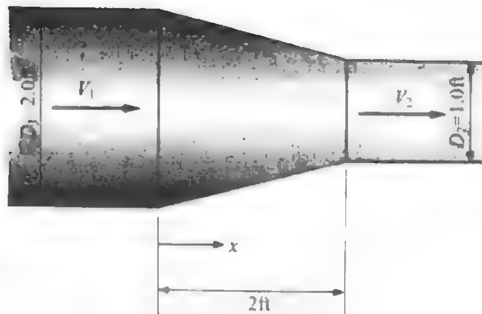


图 3-49

3.30 取合适的体积元，用积分方法，导出柱坐标系中用应力表示的动量方程.

3.31 根据上题 3.30 中说明，导出球坐标系中动量方程.

3.32 详细说明能量方程的推导过程.

3.33 在习题 3.8 中，若将流量增加的条件改成下降(流量改变率给定). 试求出流动的加速度.

3.34 设一封顶的圆柱形容器有一开口的直管，一端暴露在大气中，一端插入容器内的不压缩流体中，如图 3-50. 流体从面积为 A_2 喷嘴排出，喷嘴到直管底部的距离为 h_1. 如果圆柱形容器的横截面为 A，试求出排出流量 Q 随时间变化的函数.

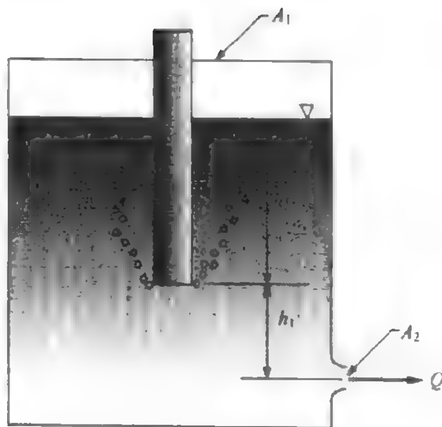


图 3-50

3.35 在习题 3.11 所选的控制体中，若上表面选在流线上，试重做该题.

3.36 一个圆柱体放在不可压缩流体的均匀流动中，流体的密度为 ρ，已测出上下游的速度剖面(如图 3-51). 试求出单位长度圆柱体上所受的阻力. 提示：取一个包含圆柱体的大控制体.

3.37 用比重为 0.8 的润滑油润滑连杆轴承，在大气压强下，润滑油从曲轴中心进入，流经钻出的小通道输给连杆轴承. 当曲臂处于图 3-52 所示的垂直位置时，为使连杆轴承处的油压强为正，求曲轴的最小转速为多少 rpm?

下游 10 倍直径处速度数据

y/D	u/U
0	0.5
0.5	0.6
1.0	0.8
1.5	0.9
2.0	1.0

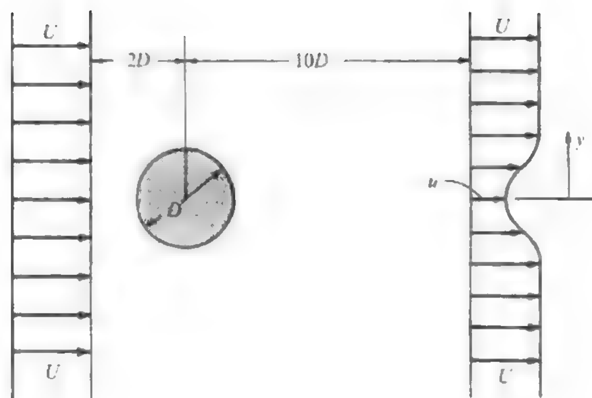


图 3-51

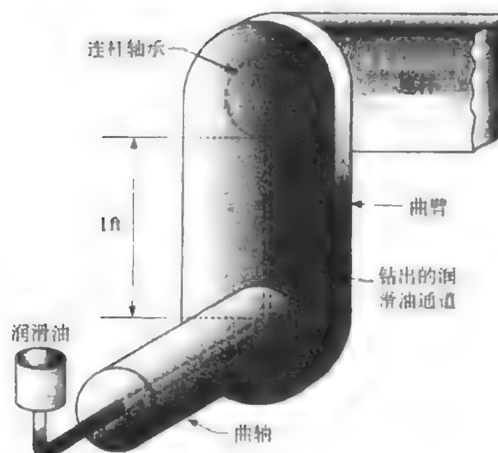


图 3-52

3.38 图 3-53 所示的水泵将水从水库提升至 H 高度. 泵的活塞运动是正弦函数. 当活塞速度很高时, 实践中可发现活塞前面的水会出现气穴, 致使水落回水库. 这种现象是不希望发生的, 需要对泵注水才能使其重新启动.

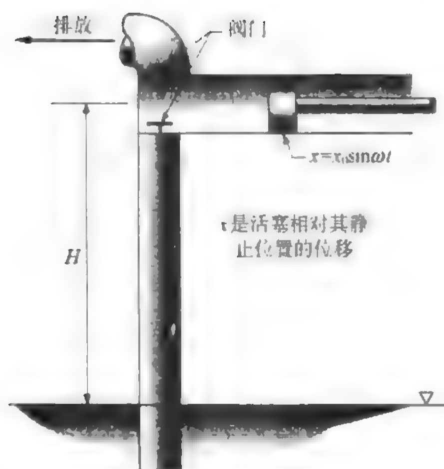


图 3-53

试求活塞的最大频率？在此频率下当活塞处于下止点时不会出现气穴.气穴的定义是流体的绝对压强降至零或接近于零时的状态.

由此求得的最大频率是一个极限值,只要假定活塞面上的绝对压强下降为零,流体就会出现气穴,并从活塞面上分离.

第三章符号表

A = 面积
$\boldsymbol{a}$ = 加速度矢量
$\boldsymbol{B}$ = 单位体积的体力矢量
$\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ = 随体导数或物质导数
e = 单位质量的总能量($e = u + V^2/2 + gz$)
e_{ij} = 应变率张量
E = 总能量
g = 当地重力加速度
H_L = 压头损失
m = 质量
$\dot{m}$ = 质量通量
$\boldsymbol{M}$ = 动量矢量
p = 压强
q = 单位质量流动流体的传热
$\boldsymbol{q}$ = 热通量矢量(单位面积的传热率)
$\boldsymbol{q}_r$ = 辐射热通量矢量
q''' = 单位体积的内热量生成率
Q = 传入系统的总热量;体积流量
r = 径向坐标
s = 单位质量的熵
S = 系统的熵
t = 时间
T = 绝对温度
T_z = 对 z 轴的力矩
u = x 方向的速度,单位质量的内能
u_i = x_i 方向的速度($i=1,2,3$)
U = 系统的内能,自由流速度
v = y 方向的速度
$\boldsymbol{V}$ = 速度矢量
V_t = 切向速度
$\mathcal{V}$ = 体积
W = 系统作的功
w = z 方向速度,单位质量流动流体作的功
w_s = 单位质量流动流体作的轴功
x_i = 坐标(x_1, x_2, x_3)
x, y, z = 坐标——对应于(x_1, x_2, x_3)
α = 曲面法向与速度矢量的夹角
γ_{ij} = 剪应变率张量
δ_{ij} = 克朗内克符号,$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$
θ = 单位体积熵生成率
κ = 热传导系数
μ = 黏性系数
ν = 运动黏性系数
ρ = 密度
σ_{ij} = 应力张量
σ'_{ij} = 偏应力张量
Φ = 耗散函数
ψ = 重力势;流函数
$\boldsymbol{\omega}$ = 涡矢量
Ω = 角速度矢量
Ω_{ij} = 旋转张量

第四章　量纲分析和相似性

4.1　流体动力学中的相似性

在流体力学中,可以从量纲分析得到大量重要结果.在任何流动状况下,有关的参数可以被合并为表征其流动特征的独立的无量纲数.通常,这些无量纲数能被精确确定,并在流体动力学中被赋予确定的名称.

这些无量纲数,或称它们为 Πs,可以由量纲分析方法,或直接从控制微分方程无量纲化后的无量纲形式得到.

考虑任何流体的流动问题,如绕固体的流动,其流动图像和性质由该物体的几何形状及有关的流体性质确定.如果两种流动中被绕流物体几何上相似并且两种流动的所有有关无量纲数也对应相等,那么我们就说这两种流动是相似的.现在考虑一个原型和一个(风洞中的)模型.我们如何才能将风洞中在模型上所作的测量结果应用到原型上去呢?答案是通过相似性方法,即令它们在几何上相似 Πs 相等.

相似流动的物理意义和模型-原型之间的相互关系可通过考察控制方程的无量纲化形式来理解.很清楚,在所有有关的控制方程都无量纲化后,那么只要被绕流的物体几何形状相似,流动就与物体的尺寸无关.然而,(在无量纲微分方程中以无量纲系数出现的)两种流动情况下的无量纲数还必须保持相等.这些无量纲数取决于流体性质和被绕流物体的特征物理尺度(作为参考基准).因此,在相似流动中描述模型和原型的流动微分方程是相同的.然后,对模型进行任何一个无量纲变量(如无量纲压强)的测量.这样测得的无量纲压强对模型和原型是相等的.将方程转化为有量纲形式后,在模型上所获得的数据就可以直接应用到原型.

总之,只要有关的无量纲数相等并保持被绕流物体的几何形状相似,两种流动的形式就与物理尺寸无关而且是相似的.

在实践中,并不总是能做到模型和原型的所有无量纲数都同时相等.在这种情况下,必须进行某种程度的折中;然而,在大多数重要的流动中,只要达到足够的相似性就可使模型的结果应用到原型上了.通常,对于给定的流动问题,事实上只有一个无量纲数是重要的,而所有无量纲数是否都相等并不重要.

下一节中,我们将研究流体力学的基本微分方程和它们的无量纲形式.但是首先要叙述的是:对给定的流动问题,存在另一种求得无量纲数的有用方法;量纲分析方法.

量纲分析或称白金汉 π 定理是一种不需要通过有关微分方程来求得无量纲数的方法.这种方法要求我们知道给定问题中的所有有关变量,随后将这些变量合并为尽可能多的独立的无量纲组合或 Πs.在例题 4.8 中将给出一个获得这些 Πs 的系统方法.这个系统方法的优点是我们不需要知道复杂问题的控制方程或定律;但我们必须知道所有有关变量,而且只有这些有关变量必须引入到问题中去.任何多余的变量,或忽略一个有关的变量都会导致问题的分析失数.这些限制是相当严格的,一般以控制方程开始比较可靠.不管以哪种方法,一旦得到这些无量纲数,就能按它们获取实验数据并将实验数据以无量纲形式相关联起来。

对于给定的问题,Πs 的个数是确定不变的,并且通常它等于但并不说是等于变量的总数减去基本量纲数.在力学中,有三个独立的基本量纲.实际选择是任意的,但是最常选择的是质量,长度和时间三个量纲;在可压缩流动问题中,增加温度量纲,因此有四个基本量纲.

必须选择一组都是独立的 Πs.事实上,许多 Πs 可以由其他 Πs 相乘或相除得到.但是对于给定问题,独立的 Πs 数是确定不变的.因此,对于一个问题不存在惟一的 Πs 组;但是在流体力学中有确定的无量纲数,它们通常是我们研究的对象并且具有明确的物理意义.

在获得一组 Πs 后，我们可以将它们表示成函数形式；即任何一个 Π 可以表示为所有其他 Πs 的函数. 这一函数形式不能由量纲分析得到，而只能由求解控制方程或实验得到. 在实验工作中，可以非常容易地用求得的 Πs 之间的关系曲线，以无量纲形式来表示实验结果. 在将实验比例作为参数消去以后，方程的无量纲形式至少减少三个变量. 量纲分析在所有工程和科学实验中是一个强有力的工具.

4.2 不可压缩流动的参数

在不可压缩流动中，描述其流动只需要运动方程和连续性方程. 有四个相关变量——在四个方程中出现三个速度分量和一个压强. 此外，还有流体性质，黏度和密度，以及出现在 Π 表达式中的重力位势.

如果我们引入以下自变的和因变的无量纲变量（用上标 * 号表示），可以把方程写成无量纲或归一化形式. 令

$$p^* = p/\rho V_0^2,\quad \mathbf{V}^* = \mathbf{V}/V_0,\quad t^* = t/t_0 = tV_0/L,$$

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}/L,\ \psi^* = \psi/gL \tag{4.1}$$

式中下标 0 表示特征值，L 为特征尺度. 例如，如果我们考虑绕一圆柱体的外流，L 就是圆柱的直径，V_0 是自由流速度. ψ 是重力位势. 借助这些变量，运动方程的矢量形式为

$$\frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial t^*} + \nabla^*(\mathbf{V}^{*2}/2) - \mathbf{V}^* \times (\nabla^* \times V^*) = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re}\nabla^{*2}\mathbf{V}^* - \frac{1}{Fr}\nabla^*\psi^* \tag{4.2}$$

以及连续方程为

$$\nabla^* \cdot V^* = 0 \tag{4.3}$$

这里 Re 是雷诺数 $\rho LV_0/\mu$，以及 Fr 是弗劳德数 V_0^2/gL，其中 ρ 为流体密度，μ 为绝对或动力黏度. Re 和 Fr 都是无量纲数，为了达到流动相似，在两种流动中的 Re 和 Fr 必须相等. 对于绕一个给定几何形状物体的流动体系，有关 Πs 的总数应该是 Re 和 Fr，无量纲自变量 r^* 和 t^*（如果问题中时间是自变量）以及一个无量纲因变量，如 p^* 或 $\mathbf{V}^*$. 变量和参数的总数为 10 个（包括 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{V}$ 的分量以及重力位势和黏性系数），因此独立 Πs 的总数应为 7. 即：Re 和 Fr 以及 t^*，$\mathbf{r}$ 的三个分量和另一个无量纲因变量，如 p^* 或 $\mathbf{V}^*$ 的一个分量，合计为 7. 一旦这 7 个 Πs 被确定，其他的都可由方程组加以确定，因为其他的 Πs 是非独立的.

现在方程(4.2)和(4.3)整个是无量纲的，因而如果流体的两个特征参数，雷诺数 Re 和弗劳德数 Fr 相等，那么绕尺寸不同但几何相似物体的流动应该根据这些无量纲变量得到相同的解.

这些无量纲数具有明确的物理意义. 雷诺数是流体惯性力和黏性力之比，度量流动中惯性力和黏性力的相对重要性. 如果雷诺数很小，$Re \ll 1$，说明流动中黏性力起主导作用，当 $Re \gg 1$ 时，流动中惯性力起主导作用. 弗劳德数 Fr 是惯性力与重力之比，度量流动中惯性力与重力的相对重要性. 由方程(4.2)我们可以看出，当 Re 和 Fr 两者都 $\gg 1$ 时，惯性力必须由压力来平衡.

在大多数流动问题中，弗劳德数是相当大的数值，重力是不重要的，模拟时仅对雷诺数感兴趣. 一个例外是海洋船舶的模拟，那里重力波非常重要. 幸运的是在不可压缩流动的模拟中，对原型和模型通常只要求雷诺数或弗劳德数相等即可.

模拟时，我们令

$$Re_m = \left(\frac{\rho L\mathbf{V}_0}{\mu}\right)_m = \left(\frac{\rho LV_0}{\mu}\right)_p = Re_p \tag{4.4}$$

式中 m 和 p 分别代表模型和原型，或我们可以令

$$Fr_m = \left(\frac{V_0^2}{gL}\right)_m = \left(\frac{V_0^2}{gL}\right)_p = Fr_p \tag{4.5}$$

但是这两个条件不能同时满足. 在空气动力学中，雷诺数是重要的，条件(4.4)能够满足，不需要考虑条件(4.5)(因为重力不重要，Fr 非常大). 然而，在海洋船舶模拟中，情况更为复杂，需要进行两种实验. 一种以雷诺数相等进行(以确定黏性阻力)，另一种以 Fr 数相等进行(以确定重力波阻力).

我们已经有了 Re 和 Fr，然后就可借助白金汉 π 定理写出无量纲因变量以 Re 和 Fr 以及无量纲自变量表示的函数式. 例如

$$p^* = f(Re, Fr, r^*, t^*)$$

或任何 p^* 的定常函数，如升力，可以作为只是 Re 和 Fr，以及变量 r^* 的函数由积分计算得到. 如我们将要看到的，作用在物体上的无量纲升力和阻力只是雷诺数的函数(当然，对于已知几何形状).

现在要了解的另外一个要点是关于如何表明白金汉 π 定理方法与方程归一化方法的等效性. 在方程归一化方法中，我们有一组特征参量，如 Re 和 Fr，它们在控制方程中作为系数出现. 对于已知几何形状，如我们在以上对于压强已经指出的那样，任何无量纲因变量只取决于这些特征参数和无量纲自变量. 另一方面，如果我们现在不从方程开始而是从量纲分析方法开始，我们要问：对于给定的流动，在确定某些绕物体流动的特性时，哪些变量是重要的和相关的？我们必须选定所有有关的流动变量和性质(如 V_0, L, p, μ, r, t 等)并将它们合并成一组恰当的无量纲量. 即使我们有能力选出所有有关的变量和性质，我们仍然面临如何以最方便的方法合并和给出它们物理意义的任务. 例如，假定我们再问：在绕物体定常流动问题中，压强分布是什么样以及它取决于哪些参数？对给定的几何形状，我们可以写出

$$p = f(L, V_0, \boldsymbol{r}, \mu, \rho, g) \tag{4.6}$$

共有九个变量，因此必须将它们减少至六个无量纲变量. 它们是 $p^*, Re, Fr, \boldsymbol{r}^*$. $\boldsymbol{r}^*$ 是矢量，有三个标量分量，其每一个分量是一个独立变量. 当然，在目前我们所感兴趣的问题中 Fr 是不重要的. p^* 是当地压强与自由流压强之差. 如果我们要知道绝对压强必须引入一个附加参数，自由流的压强 p_0，得到一个附加的无量纲参数 $p_0/\rho V_0^2$. 这个参数通常并不需要，因为在空气动力学问题中我们仅对当地压强与自由流压强之差有兴趣.

4.3　可压缩流动的参数

在可压缩流动中增加了附加参数. 除了运动和连续方程外，我们还需要能量方程及物态方程. 除上一节中的那些无量纲变量外，我们引入以下无量纲变量：

$$\rho^* = \rho/\rho_0, \quad T^* = T/T_0, \quad M_0 = V_0/a_0, \quad a_0 = \sqrt{kRT_0}, \quad \Phi^* = L\Phi/V_0^2\nu\rho_0 \tag{4.7}$$

这里 a_0 为来流声速，Φ 为黏性耗散函数，k 为比热比 c_p/c_v，R 为气体常数，T 为绝对温度，以及 ν 为运动黏度 μ/ρ.

因此无量纲方程变成

连续方程

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \boldsymbol{V}^*) = 0 \tag{4.8}$$

运动方程

$$\rho^*\left[\frac{\partial V^*}{\partial t^*}+(\mathbf{V}^*\cdot\nabla^*)\mathbf{V}^*\right]=-\nabla^* p^*+\frac{1}{Re}\nabla^{*2}\mathbf{V}^*$$

$$+\left(\frac{1}{Re'}+\frac{1}{3Re}\right)\nabla^*(\nabla^*\cdot\mathbf{V}^*)-\frac{\rho^*}{Fr}\nabla^*\psi^* \qquad (4.9)$$

能量方程

$$\rho^*\frac{\mathrm{D}T^*}{\mathrm{D}t^*}=\frac{k(k-1)M_0^2\Phi^*}{Re}-p^*\nabla^*\cdot\mathbf{V}^*[k(k-1)M_0^2]+\frac{k}{RePr}\nabla^{*2}T^* \qquad (4.10)$$

物态方程

$$p^*=\frac{1}{kM_0^2}\rho^* T^* \qquad (4.11)$$

除了无量纲系数 Re 和 Fr 已经在不可压缩流动分析中出现外，又出现了三个新的无量纲数. 它们是特征速度 V_0 与声速 a_0 之比的马赫数 M_0，运动黏度 ν 与热扩散系数 α 之比的普朗特数 Pr 和比热比 k. 于是

$$M_0=V_0/a_0 \quad 和 \quad Pr=\nu/\alpha=\mu c_p/\kappa$$

式中 μ 为黏性系数，c_p 为定压比热，κ 为热传导系数，以及 α 为热扩散系数，定义为 $\kappa/\rho c_p$.

因为乘积 $RePr$ 的物理意义是对流传热与热传导传热之比的度量，因此普朗特数在对流传热中起着重要作用. 对大多数气体，Pr 的量级为 1；对于液体，Pr 的量级在 0.1 至 0.001 之间变化. 如果流体中热传导是主要的，那么 Re 必定是一个小量. 自然界中一般 Re 都相当大，并远大于 1，因此对流传热是主要的. 然而在某些工程上感兴趣的问题中，Re 可以小于 1，这时热传导和对流两者都是重要的传热形式. 例如，在轴承的润滑油薄膜中就是这样的情况.

一些变量的其他组合可以形成另外的无量纲数，上面已经说过，它们并不是独立的无量纲数. 在给定的工程问题中，可以方便地引入其他无量纲组合. 有时 Φ^* 项被写作为 $kBr/RePr\Phi^*$，其中 Br 为宾克曼数，定义为 $Br=\mu V_0^2/kT_0$. 此外，有时比值 Br/Pr 称为埃克脱数 Ec，因此很清楚，Πs 的形式并不独立，并且在能量方程中除 Re，Pr 以及 k（比热比 c_p/c_v）外我们只需要取 M_0，Br 或 Ec 中的一个. 还有基于第二黏性系数的第二雷诺数，Re'，但它只对某些问题才重要，如声音的衰减和耗散.

我们可以将不可压缩和可压缩流动的模拟小结如下：

Re 相等：黏性流动和亚声速空气动力学.

M_0 和 k 相等：高速可压缩流动和超声速流动.

Re 和 M_0 相等：可压缩边界层流动.

Pr 相等：热传导.

Re，M_0 和 Pr 相等：有热传导的可压缩边界层流动.

Re 和 Fr 相等：海洋船舶模拟.

通常，对于模型和原型在同一时间只有一个无量纲数能够保持相等，因此，必须进行几次实验才能对感兴趣的不同因素的影响进行模拟；这样，模拟可能变得相当复杂，在这里将不作进一步讨论. 然而，常常可以使两个无量纲数同时相等，如 M_0 和 k. 如果模型和原型都以空气作流体，k 是相等的，那么通过选取合适的比例可以使 M_0 相等.

4.4　流体中存在自然对流传热时涉及的附加参数

运动方程可以由于另外的一个因素——浮力的作用而变得复杂化. 如果流体中存在温度

梯度，就出现密度梯度，产生浮力，进而引起自然对流．这里我们假定流体基本上是不可压缩流体，其体积温度膨胀系数为 β.

运动方程为

$$\rho[\partial \boldsymbol{V}/\partial t+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}]=-\rho\beta g(T-T_0)+\mu\nabla^2\boldsymbol{V} \tag{4.12}$$

式中忽略了可压缩性的影响．这类问题中通常没有参考速度，我们定义新的无量纲速度，时间和温度为

$$\boldsymbol{V}^{\dagger}=VL\rho/\mu,\quad t^{\dagger}=t\mu/\rho L^2,\quad \Theta=(T-T_0)/(T_1-T_0) \tag{4.13}$$

式中 T_1-T_0 为系统的特征温差，于是方程(4.12)变为

$$\partial \boldsymbol{V}^{\dagger}/\partial t^{\dagger}+(\boldsymbol{V}^{\dagger}\cdot\nabla^{*})\boldsymbol{V}^{\dagger}=-\nabla^{*2}V^{\dagger}+\Theta Gr \tag{4.14}$$

Gr 为格拉晓夫数，$g\rho_0^2\beta(T_1-T_0)L^3/\mu^2$.

在自然对流中，雷诺数并不重要，因而在方程中不出现．在能量方程中，通常忽略耗散项，并且可压缩性的影响也不重要，所以能量方程的无量纲形式为

$$\frac{\mathrm{D}\Theta}{\mathrm{D}t^{\dagger}}=\frac{1}{Pr}\nabla^{*2}\Theta \tag{4.15}$$

因此，在自然对流中只有格拉晓夫数和普朗特数是重要的.

参考文献

1. Birkhoff, G., *Hydrodynamics*, Dover Publications, 1955.
2. Bridgman, P. W., *Dimensional Analysis*, Yale University Press, 1931.
3. Buckingham, E., On Physically Similar Systems, *Physical Review*, Vol. 4, Ser. 2, p. 345, 1914.
4. Kline, S. J., *Similitude and Approximation Theory*, McGraw-Hill, 1965.
5. Langhoar, H. L., *Dimensional Analysis and the Theory of Modeling*, John Wiley, 1951.
6. Taylor, E. S., *Dimensional Analysis for Engineers*, Oxford, 1974.

例　题

4.1 在一个时间相关的不可压缩流动中，由于浸没在流体中的物体产生周期为 τ 的振荡，问表征这一流动的参数是什么？

解 ☞ 对于不可压缩流动，只有雷诺数作为一个无量纲系数出现．如果我们对定义为 $\tau\boldsymbol{V}_0/L$ 的无量纲周期进行求解，可以写出

$$\tau^{*}=\tau V_0/L=f(Re)$$

这个无量纲数 $\tau V_0/L$ 称为斯特劳哈尔数．这一振荡发生在尾迹内的卡门涡街中，在第五章中将讨论这一问题.

4.2 在涉及表面张力 T_s 的问题中，将增加哪些新参数？

解 ☞ 这时的运动方程与没有表面张力作用时的相同，但边界条件不同．在流体-空气界面上，压力必须由表面张力来平衡，而且不需与没有表面张力时的自由表面那样等于零．记住：越过界面（如果有曲率的话）存在一个有限压强差，并由表面张力所平衡．现在考虑图 4-1 所示的二维情况．根据平衡条件，

$$2T_s(\mathrm{d}\theta/2)=pR\,\mathrm{d}\theta$$

式中 R 是表面的曲率半径，同时对于小 θ，$\sin\theta\approx\theta$．因此，我们可以写出

$$T_s=p^{*}R^{*}(\rho_0V_0^2L)$$

这里已经导入了无量纲压强和无量纲曲率半径，分别为 $p^{*}=p/\rho_0V_0^2$ 和 $R^{*}=R/L$．再定义一个无量

纲表面张力为

$$T_s^* = T_s/\rho_0 V_0^2 L$$

因此

$$T_s^* = p^* R^*$$

无量纲参数 $\rho_0 V_0^2 L/T_s$ 称为韦伯数.

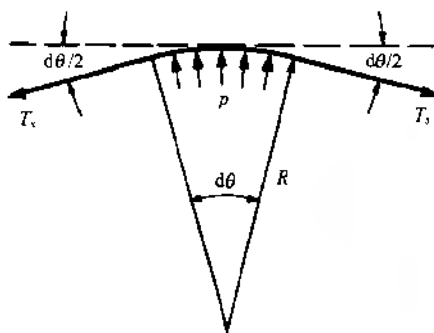


图 4-1

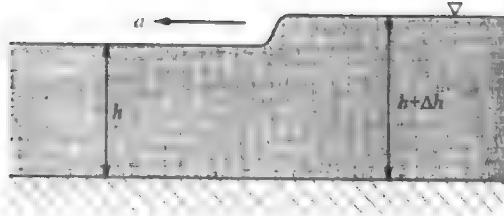


图 4-2

4.3　如图 4-2 所示,在一浅液体中有一个小表面扰动波传播.问无限小扰动波速由哪些参数确定?有关的无量纲数是哪些?

解 ☞　考虑图示的波.波速 a 取决于液体的深度 h 和重力加速度 g 的数值.可以构成的惟一无量纲数为

$$\Pi = a^2/gh$$

这里由于变量数是三个,基本单位数是两个(长度和时间),因此我们只有一个 Π.因为在问题中只有一个 Π,所以说它必定为常数

$$\Pi = a^2/gh = 常数$$

这里这一常数刚好等于 1,并等于$\sqrt{gh}$.但是这一结果不能从量纲分析得到.

要记住的另外一点是与液体的密度无关.然而,开始时我们并不知道这一点.引入密度可能导致无关的 Π 并得到错误的结果.如果我们不以基本控制方程开始,究竟哪些变量是有关的就始终成为一个问题.

有兴趣的是在这里将结果与习题 3.15 的结果进行比较.在习题 3.15 中可以得到解析解.

4.4　当水在管道中流动时突然并闭阀门将产生一个水击波.这个水击波能产生很高压强,造成管道的损坏.试用量纲分析求解这一现象产生的最大压强.

解 ☞　我们取最大压强 p_{max},密度 ρ,初始流动速度 U_0 及体积弹性模量 β(因为这一波必定是某种压缩波)为相关参数.这里有两个可能的独立的 Πs.我们可以选它们为

$$p_{max}/\beta \text{ 和 } U_0^2\rho/\beta$$

因此我们能写出

$$p_{max}/\beta = f(U_0^2\rho/\beta)$$

这是我们用量纲分析能得到的结果.实际上,结果是 $p_{max}/\beta = (U_0^2\rho/\beta)^{1/2}$,因此 $p_{max} = \sqrt{\rho\beta}U_0$,但是这一结果除了解有关的微分方程之外不可能得到.

与上一个问题一样,对于这个水击波的传播速度我们还能进行一些讨论.这个波速 a 取决于液体的密度 ρ 和体积弹性模量 β(如果我们能侥幸地足以准确猜出这一点),因此仅有的 Π 是 $a^2\rho/\beta$,而且必定为常数.实际波速再一次为$\sqrt{\beta/\rho}$.

4.5　在亚声速空气动力学中,我们如何模拟作用在翼型上的升力?

解 ☞　作用在一物体上的升力可以由积分空气绕物体流动时作用在其表面上的正压力的相应分量得到.压强由运动方程求得.在定常流动时,无量纲压强决定于物体的位置矢 $\boldsymbol{r}^*$ 和雷诺数,然而,通常与雷诺数的关系很小,并且如果流动如绕实际翼型流动那样是流线型的,可以忽略与雷诺数的关系.对已知几何形状,当我们求解升力时,可以沿翼型表面对压强进行积分,消去与 $\boldsymbol{r}^*$ 的关系.然而,即使对已知几何形状,迎角 θ(流自由流流向翼型时的相对角度)也会影响升力.

参照图 4-3,有

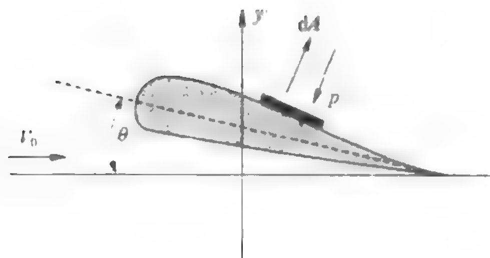


图 4-3

$$L = -\int_A p\hat{y} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

式中 $\hat{y}$ 为 y 方向上的单位矢量，于是

$$L^* = \frac{L}{\rho V_0^2 A_0} = -\int p^* \hat{y} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}^* = f(\theta)$$

式中 A_0 为翼型的特征面积，$A^* = A/A_0$. 因而升力可以写作为

$$L = C_L(\theta)\rho V_0^2 A_0/2$$

式中 $C_L(\theta)$称为升力系数. 按常规引人一个因子 2，$\rho V_0^2/2$ 可以解释为动压强. 在实验中，对已知形状翼型，升力系数通常以 θ 的函数形式来确定.

4.6　在亚声速空气动力学中，我们如何模拟阻力？

解 ☞　阻力主要由表面摩擦产生，不过如果物体为不良流线体，将产生尾迹. 尾迹中的低压强将对(由于边界层的黏性阻力引起的)表面摩擦起主要作用. 在绕机翼流动中，还有一个诱导阻力，它由气流下洗改变了有效迎角而产生. 因此，必定垂直于局部有效自由流流动方向的升力，在主自由流方向(即与物体在流体中运动方向相反的方向)有一个分量.

如对升力那样，诱导阻力 D 可以用压强的积分来表示，我们可以写作为

$$D = C_D(\theta)\rho V_0^2 A_0/2$$

式中 $C_D(\theta)$为阻力系数.

如果我们考虑的是非流线型物体，阻力主要由于黏性阻力和低压强尾迹所引起，(与升力和诱导阻力不同)这样的流动对雷诺数非常敏感，并且我们可以将表面摩擦的积分和尾迹阻力写作为雷诺数的函数(对给定的几何形状). 当然，我们还会有一个与迎角的关系，但是现在我们假定当雷诺数变化时迎角保持不变. 实际上，迎角不是一个有用的变量，因为物体不是流线型的，迎角没有真正的意义. 不同的迎角可以考虑为不同的几何形状. 因此，阻力可以以无量纲形式写作为

$$D^* = \frac{D}{\rho V_0^2 A_0/2} = f(Re) = C_D(Re)$$

所以，我们保留阻力系数的概念，但是对于给定几何形状它可能不是常数，而是与雷诺数有关. 在一般情况下，对于有分离边界层或没有分离边界层的机翼，我们可以写出

$$C_D = f(Re, \theta)$$

4.7　在管流中压强降取决于壁面摩擦，而壁面摩擦又取决于流动是层流还是湍流. 如果是层流，壁面摩擦取决于流体的黏度. 如果是湍流，壁面摩擦取决于雷诺数和管壁粗糙度. 我们如何模拟这一压强降？

解 ☞　在长度为 L 的管道中，压降 Δp 必须根据运动方程计算. 因此，沿管道单位长度的无量纲压强降必定取决于雷诺数和管壁粗糙度. 管壁粗糙度以管壁表面凹凸不平的高度之平均值与管道直径之比 ϵ/D 表示. 因而

$$\frac{\Delta p^*}{L^*} = h(Re, \epsilon/D)$$

如果我们定义无量纲长度 L^* 为 L/D，其中 D 为管道直径，h 是雷诺数和管壁粗糙度的函数. 以压强 p 表示，则

$$\frac{\Delta p^*}{L^*} = \frac{\Delta p}{\rho V^2}\frac{D}{L} = h(Re, \epsilon/D)$$

现在压头损失为 H_L，因此我们可以写出

$$H_L = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{\Delta p^*}{L^*}\frac{V^2 L}{Dg}$$

从物理上讲，H_L 是产生压强降 Δp 的流动流体的当量高度差，即高度为 H_L 的流体柱产生的静力学压强，在数量上等于 $\rho g H_L = \Delta p$. 无量纲压头损失为

$$H_L^* = H_L \frac{Dg}{V^2 L} = h(Re, \varepsilon/D) = f/2$$

这一函数(Re,粗糙度)可写作为 $f/2$,其中 f 为摩擦因子,如果是湍流的话,f 是一个取决于雷诺数和管道粗糙度的无量纲数. f 可以通过壁面剪应力 τ_0 定义为 $8\tau_0/\rho V^2$. 最后

$$H_L = \frac{fL}{D}\frac{V^2}{2g}$$

在管流问题中,摩擦因子的实验数据十分重要.

4.8 用白金汉 π 方法详细求解题 4.7. 考虑一个管道内流体的流动. 求这一流动重要的 Π 参数.

解 ☞　首先我们必须猜测重要的物理量. 我们假定它们是以下的物理量:M、L 和 T,分别表示质量,长度和时间的量纲.

物理量	V	D	ρ	μ	ε	dp/dx
量纲	LT^{-1}	L	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$	L	$ML^{-2}T^{-2}$

其中 ε 为壁面粗糙度的某种平均高度,dp/dx 为流动方向上单位长度的压强变化.

我们有包含三个基本量纲的六个物理量,因此最多将有三个 Π 项. 现在我们要来确定这三个 Π 项,每一次取四个物理量.

$$V^{x_1} D^{y_1} \rho^{z_1} \mu = (LT^{-1})^{x_1} L^{y_1} (ML^{-3})^{z_1} ML^{-1}T^{-1} = M^0L^0T^0$$

于是

$$L \rightarrow x_1 + y_1 - 3z_1 - 1 = 0, \quad M \rightarrow z_1 + 1 = 0, \quad T \rightarrow -x_1 - 1 = 0$$

根据这些等式,$z_1 = -1, x_1 = 1, y_1 = -1$,因此

$$\Pi_1 = \mu/\rho VD \text{ 或 } \Pi_1 = \rho VD/\mu$$

用同样方法,我们可以取

$$D^{x_2} \rho^{y_2} \mu^{z_2} \varepsilon = M^0L^0T^0 \text{ 和 } V^{x_3} \rho^{y_3} D^{z_3} dp/dx = M^0L^0T^0$$

因而得到

$$\Pi_2 = \varepsilon/D, \quad \Pi_3 = \frac{(dp/dx)D}{\rho V^2}$$

然后我们有 $\Pi_3 = h(\Pi_1, \Pi_2)$ 及

$$\frac{(dp/dx)D}{\rho V^2} = h(\rho VD/\mu, \varepsilon/D) = h(Re, \varepsilon/D)$$

式中 h 表示某种函数关系.

这些量之间的函数关系由实验确定. 在第五章中表示这些结果的图称为莫迭或斯坦顿图.

在这一例子中已经显示出无量纲量的有用性. 如果我们要改变五个独立的物理量中的每一个,就要求进行极大量的实验工作,相反,如果减少至三个无量纲量,一个完整的实验计划就能比较容易地实行.

通常,长度为 L 的管道内的压头损失写作为 $H_L = \Delta p/\rho g$,其中 Δp 为管道的压强降. 因此 $\Delta p/L = dp/dx$,并应用以上结果我们可以写出

$$H_L^* = H_L \frac{Dg}{V^2 L} = \frac{(dp/dx)D}{\rho V^2} = (Re, \varepsilon/D) \text{ 的函数 } = f/2$$

式中 f 为由以上方程定义的摩擦因子. 因而我们可以用 f 将压头损失写成 $H_L = (fL/D)(V^2/2g)$

4.9 一表面积为 $1ft^2$ 的机翼在风洞中进行升力 L 实验. 在迎角为 5°,标准状态空气密度为 $0.0024 slug/ft^3$,空气速度为 100ft/sec 下,测得升力为 7.0lb. 问升力系数为多少? 在相同迎角 5°时,对于一个机翼面积为 $100ft^2$ 的原型机翼,在空气速度为 100m/h 时,升力 L_p 为多少?

解 C_L 可以根据模型实验得到的数据进行计算.

$$C_l = \left(\frac{L}{A\rho V_0^2/2}\right)_m = \frac{7.0}{1(0.0024)(100)^2/2} = 0.58$$

然后,对原型机翼 C_L 值是相同的,我们求得升力 L_p 为

$$L_p = (C_L A\rho V_0^2/2)_p = 0.58(100)(0.0024)(100\times 88/60)^2/2 = 1500(\text{lb})$$

4.10 假定流体为不可压缩流体,讨论一个泵或风机的模拟问题.

解 对于离心式或轴流式机械,模拟基本相同.描述这些机械性能的重要参数是输出功率 P,出口压头 H 和效率 η.对已经设计好的机械,其性能由以下有关变量表征:流体密度 ρ,转子角速度 ω,转子平均直径 D,流体黏性系数 μ,流体容积流率 Q.

P、gH 和 η 不是独立的,是以上列出变量的函数.为了方便,可将 gH 代替出口压头 H,因为乘积 gH 代表单位质量流体的轴功,而且 g 是独立量.因此,我们可以写出

$$P = f_1(\rho,\omega,D,Q,\mu)$$

$$\eta = f_2(\rho,\omega,D,Q,\mu)$$

$$gH = f_3(\rho,\omega,D,Q,\mu)$$

我们对每个方程应用白金汉 π 定理可以得到一组合适的 Πs:

$$P/\rho\omega^3D^5 = f_4(Q/\omega D^3, \rho\omega D^2/\mu)$$

$$\eta = f_5(Q/\omega D^3, \rho\omega D^2/\mu)$$

$$gH/\omega^2D^2 = f_6(Q/\omega D^3, \rho\omega D^2/\mu)$$

这里重要的是:Πs($P/\rho\omega^3D^5$,gH/ω^2D^2 和 η)不是独立的,一旦其他 Πs 知道,它就能确定.

根据实验数据,可以知道黏性系数,因而在确定泵或风机性能时 $\Pi\rho\omega D^2/\mu$ 并不太重要,可以忽略.对于已知设计的机械,我们最终得到

$$gH/\omega^2D^2 = f_7(Q/\omega D^3),\quad P/\rho\omega^3D^5 = f_8(Q/\omega D^3),\quad \eta = f_9(Q/\omega D^3)$$

通常将实验数据表示为 $P/\rho\omega^3D^5$,gH/ω^2D^2 和 η 与 $Q/\omega D^3$ 间的关系曲线.

补 充 习 题

4.11 一个亚声速机翼模型在实验室风洞中进行实验,以下是所获得的实验数据:

升力(lbf)	0	10	12	14	12	8
迎角,θ	0°	5°	10°	15°	20°	25°

模型在流速为 100ft/sec 的标准大气中进行实验.模型机翼的总面积为 1ft².试将实验数据绘制成升力系数 C_L 与迎角 θ 的关系曲线.问对于一个面积为 100ft² 的原型机翼,在空气速度为 100mi/hr 和迎角为 5°时的升力是多少?

4.12 已经研制成功一种用于输油管道的新型内表面涂层.将这一涂层用于内径为 12in,长度为 100ft 的实验管道.实验用(不同容积流率、温度为室温的)水进行.以下是实验得到的数据:

流过管道的压强降(ft 水柱)	0.011	0.078	0.28	15.3
容积流量(gal/min)	172	475	950	7860

试将实验数据绘制成摩擦系数 f(按题 4.7 中的定义)与雷诺数的关系曲线.问对于一内径为 12in 的实用管道,在原油容积流率为 5000gal/min 时,每 1mi 管道所产生的压强降为多少?并将压强降转换成以 ft 表示的油柱和水柱高度.

4.13 一半球形顶盖模型在风洞中进行升力实验,以确定其升力系数.实际半球形顶盖将承受北极 −40C°,100mph 暴风的恶劣自然条件.如果模型直径为 1ft,实际顶盖直径为 50ft,所用的空气为标准状态,向风洞内空气速度应为多少?这一速度是否重要?你能计算模拟实验中的雷诺数吗?

4.14 一个 1/3 原型,不能收放的小型飞机流线型起落架模型在一小风洞中进行阻力实验.实验流体为标准

状态的空气,模型的迎风面积为 $0.5ft^2$. 如果我们希望确定在 100mph 巡航速度下原型起落架的阻力,风洞实验中空气的流速应为多少?在确定的空气流速下风洞给出的阻力为 20lb. 在巡航速度下实际起落架的阻力为多少?阻力系数 C_D 为多少?

4.15 图 4-4 表示一个拦水坝,在坝上有一个 V 形槽或在明槽内装一个挡板,用来测量水的容积流率. 这一 V 形槽的形状可以改变,并且可以用 V 形槽中水的高度 H 来测量水的容积流率. 如图所示,明槽为三角形,如果水相当深,表面张力和黏性的影响可以忽略,证明水的容积流率 Q 可近似为 $Q=C\sqrt{g}H^{5/2}$,其中 C 为一常数. 实验发现 C 可以用 $C=0.44\tan\frac{1}{2}\theta$ 表示.

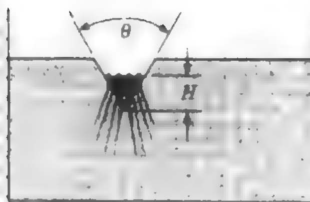


图 4-4

4.16 可以用如图 4-5 所示装在管道中的孔板来测量流经一管道的液体容积流率. 孔板两侧的压强计显示流过孔板的压强降. 通过这一数据可以计算给定流体的容积流率. 如果我们假定流率取决于流体流过孔板的压强差 Δp,流体的密度 ρ 和管道的直径 D,以及孔板上小孔的直径 D_0,试证明流体的容积流率可以表示为 $Q=CD_0^2\sqrt{2\Delta p/\rho}$. C 为常数吗?请说明之.

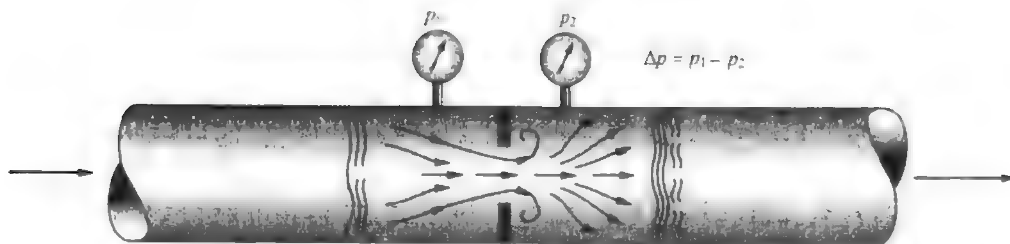


图 4-5

4.17 在天文学和宇宙学计算中,所涉及的距离和时间比我们平时所用的单位大很多,有时使用专用的单位制比较方便.

为使计算简单,在这样的专用单位制中取以下通用常数为 1:光速 $c=1$;太阳质量 $M=1$;牛顿万有引力常数 $K=1$.(K 定义为:两个物体根据万有引力定律 $F=KM_1M_2/r^2$ 彼此吸引. 一般,取 F 的单位为 dyn,质量单位为 g,距离 r 的单位为 cm.)

已知通用常数为 1,试确定这一新单位制中 M、L 和 T 的基本单位,及这一新单位与常用的 cm·g·s 制单位的关系,即多少厘米组成新的天文学长度单位,多少秒相当于新的天文学时间单位?质量单位相等吗?

已知数据:太阳质量,1.98×10^{33}g

光速,10^{10}cm/s

万有引力常数(K),$6.67\times10^{-8}cm^3g^{-1}s^{-2}$

提示:力的单位是什么,在新的单位制中是否仍是 dyn?

4.18 讨论一螺旋桨的模拟. 假定推力取决于螺旋桨直径 D,流体密度 ρ 和黏性系数 μ,流体流经螺旋桨的速度 V 以及螺旋桨的角速度 ω.

4.19 一长为 800ft 的船舶,其螺旋桨直径为 10ft,转速为 100rpm. 如果用长为 8ft 的模型船,在一牵引水槽中进行实验,讨论为实现有意义的模拟,螺旋桨的实验条件是什么?

4.20 一只长 100ft 的小船,在新鲜水中设计航速为 200mph. 为用 5ft 长的模型船进行模拟实验,求所要用液体的运动黏性系数应为多少?

4.21 试证明:用类似于例题 4.10 的方法分析一个涡轮机,除了术语要用涡轮的性能代替泵的性能外,结果相同.

4.22 某泵在 1000rpm 转速下实验,当压头为 200ft 时,出水量为 $5ft^3$/sec,泵运行所需功率为 200hp. 计算泵的效率. 一几何相似但直径三倍于它的泵在 500rpm 下运行,假如两泵效率相同,求大泵的出水流率,压头和所需功率.

4.23 一本相当有名的烹调书介绍了以下如何烤火鸡的表

火鸡重/lb	6~12	10~16	18~25
每磅火鸡所需烘烤时间/(min/lb)	20~25	18~20	15~18

根据量纲分析原理,你应有能力只从少量实验资料得到这些数据.即仅从这些数据:一只 6~10lb 的火鸡需烤 20~25min/lb,你就应该能构筑这样的一张表,并将它外推至更重的火鸡或编制更完整的表.

提示 将两只初始温度为 T_0,外形相似的火鸡,在一温度为 T_s 的烤炉中烤至温度为 T_C.可以定义一个无量纲温度为 $\theta=(T-T_0)/(T_S-T_0)$,无量纲时间定义为 $\tau=\alpha t/L^2$,其中 α 为火鸡的热扩散率,L 为特征尺度,如长度,以及 t 为时间.可以证明以下表达式:

$$(\text{焙烤时间})\times(\text{火鸡重量})^{-2/3}=\text{常数}$$

是准确的.试证明之.

4.24 在家庭冷冻柜通过柜壁热泄漏实验中,对一经过特殊隔热,尺寸为 3ft×3ft×4ft 的冷冻柜进行实验.在冷冻柜初始温度为 70℉,用一个白炽灯泡维持冷冻柜内部稳定的热流,和冷冻柜外表面温度保持在 70℉等条件下,内外表面的温差数据如下表:

时间,hrs	0	0.5	1.0	2.0	3.0	5.0	10
温度,℉	0	15.9	22.5	30.0	35.5	42.0	48.3

(a) 以给出的数据绘制无量纲温差与无量纲时间的关系曲线,使得能在性质相类似的问题中应用.一个无量纲数只包含温度,不包含时间,而另一个无量纲数中只包含时间,不包含温度.

(b) 条件严格与上相同,但冷冻柜壁厚减半,求在经过 15min 后预期能达到的温度.

单位面积的热流率 = 6.09Btu/hr-ft^2

隔热层厚度 = 2in

隔热层热传导系数 = 0.0209Btu/ft-hr-℉

隔热材料的比热容 = 4085Btu/ft^3-℉

第四章符号表

a = 声速

Br = 布林克曼数 = $\mu V_0^2/kT_0$

C_D = 阻力系数

C_L = 升力系数

c_p = 定压比热

c_v = 定容比热

D = 阻力,直径

Ec = 埃克特数 = Br/Pr

f = 摩擦因子

Fr = 弗劳德数 = V_0^2/gL

Gr = 格拉晓夫数 = $g\rho_0^2\beta(T_1-T_0)L^3/\mu^2$

g = 重力加速度

k = 比热比 = c_p/c_v

L = 特征长度,升力

M = 马赫数 = V/a

Pr = 普朗特数 = $\nu/\alpha=\mu c_p/k$

p = 压强

R = 气体常数

Re = 雷诺数 = LV_0/ν

$\mathbf{r}$ = 位置矢

T = 绝对温度

t = 时间

$\mathbf{V}$ = 速度矢

$(\ )_0$ = 自由流数值

$(\ )^*$ = 无量纲变量

$(\ )^+$ = 无量纲变量

α = 热扩散率 = $k/\rho c_p$

β = 体积热膨胀系数,体积弹性模量

Θ = 无量纲温度

k = 热传导系数

μ = 绝对黏性系数

ν = 运动黏性系数

Π = 无量纲组合

ρ = 密度

ϕ = 耗散函数

ψ = 重力势

第五章　边界层流动和管流

5.1　引言

在这一章,我们要研究黏性起重要作用的不可压缩流动的某些重要类型.有些流动可以相当容易地加以分析并容易得到精确解.管道中或风洞中完全发展的黏性展流就是这类情况.在这种情况下,不存在非线性的惯性作用,运动方程简化为压强梯度与黏性力之间的平衡.然而,其他类型的流动涉及到在运动方程中产生非线性项的惯性作用,求解通常要用近似或数值计算技术.

流体力学的最重要进展之一是普朗特在1904年所作的贡献.他提出流体绕物体的流动可以分成两个区域:一个区域是邻近物体表面的薄层,那里摩擦起重要作用,而另一个区域中摩擦作用可以忽略.这一章主要研究摩擦起重要作用的区域(边界层),在第六章讨论摩擦可以忽略的流动(势流).流体内部的摩擦力因黏性及/或湍流而产生.对任何给定的流动形态,雷诺数足够低时,流动一般是层流,并且黏性产生摩擦力,称为黏性流.但是随着雷诺数增大,流动经过一个转换区后最后变成湍流.在湍流中,湍流脉动的作用超过了摩擦作用,湍流脉动导致摩擦力.在这一章中,我们将研究黏性流,尤其是关于边界层流动,并讨论湍流的某些经验关系式.

在这一章我们将研究有摩擦流动的基本特性.我们将研究确定(1)边界层的厚度,(2)导致的速度分布,(3)压强分布和(4)流体作用在固体表面的力的方法.

将我们所研究主题分成内流和外流将使分析变得非常方便.绕物体的流动称为外流,在物体内部的流动,如发生在管道内或槽道内的流动,称为内流.描述这些流动的微分方程基本相同,但边界条件则不同.因此,形成的流动也完全不同.我们首先讨论边界层流动,然后研究内流(如管道内和槽道内的流动).如我们将要知道的,描述边界层流动的方程一般没有精确的封闭形式的解析解,需要进行解析的指数级数解或者是数值解.然而,解常常可以用封闭形式的表达式加以近似.另一方面,黏性内流在许多流动情况下可以用简单的解析表达式进行描述.

我们将首先研究简单的流动.这意味着首先考虑层流,然后是湍流.虽然在这一章中有一定篇幅研究湍流,但对湍流作更深入的研究将在第九章中进行.

在详细研究边界层流动的基本方程及其解以前,我们先对图5-1所示,在工程上有重要意义的边界层物理性质作一般性的了解.

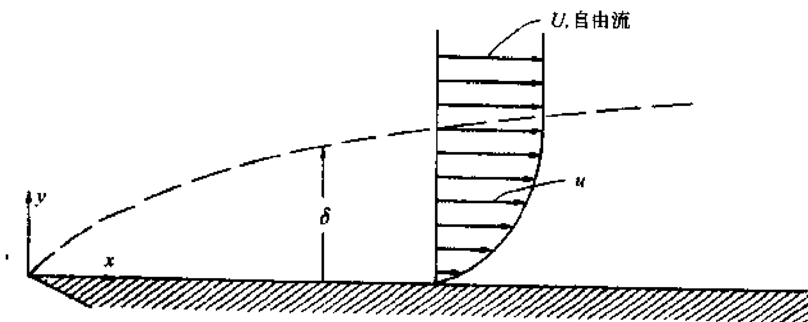


图5-1　边界层内速度分布

在摩擦可以忽略的势流与边界层之间没有明确的分界线,但是通常定义边界层为这样的区域:在这一区域中(平行于固体表面)的流速小于用势流理论描述的自由流速度的99%.边

界层的厚度 δ,沿着(流体绕流物体)表面从其前缘开始而增厚.在平板前缘边界层厚度为零,但是在非流线体,如圆柱体的前缘,即使在驻点也有一个有限厚度.

边界层内的流动开始是层流,但沿物体表面边界层增厚,如果表面足够长,会出现一个转捩区,边界层内的流动可以转变为湍流.如果表面足够长,不管自由流是层流还是湍流,层流-转捩区-湍流的流动顺序在所有流动中都会出现,但是当自由流的湍流度增加时,边界层从层流向湍流的转变会提前,即更接近于物体前缘.

可以指出,甚至在沿物体表面压强变化的流动中,如绕一弯曲表面流动,边界层内垂直于表面的压强变化可以忽略.因此,可以假定边界层内的压强分布是由边界层外边缘处势流自由流压强分布所施加的.在许多问题中,边界层厚度很薄以至于在计算势流解时可以整个地忽略边界层,而且其解可以用来计算边界层的压强分布.在空气动力学中,这种方法被用来求解绕流线型物体,如机翼的流动(见第六章).

速度剖面的形状和边界层厚度 δ 的增厚速率决定于压强梯度$\partial p/\partial x$.例如,如果沿流动方向压强增加,边界层迅速增厚,速度剖面将如图 5-2 所示.如果这一逆向压强梯度足够大,流动将出现分离,其后紧跟一个逆向流动区(分离点定义为出现$\partial u/\partial s|_{y=0}$的点).如果在流动方向压强减小,边界层厚度缓慢增加.u 是平行于表面(x 方向上)的速度,y 是垂直于表面的坐标.

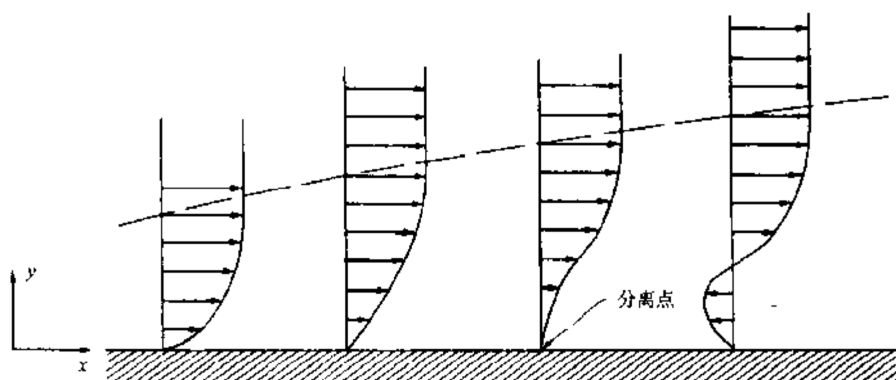


图 5-2　$\partial p/\partial x>0$ 时绕平板流动速度剖面

在扩压器和喷嘴以及绕物体流动问题中,压强梯度的作用非常重要.图 5-3 所示的扩压器,压强梯度为正.因此边界层迅速增厚,如果扩压器的扩张角过大,将导致气流分离.这将使扩压器性能恶化,因为所得到的压强恢复将小于不发生分离下工作的扩压器.扩压器设计是扩压器长度和扩张角度的一个折中.如果扩张角太大,将发生分离;如果太小,获得的压强所需长度就过长,引起不必要的摩擦损失.

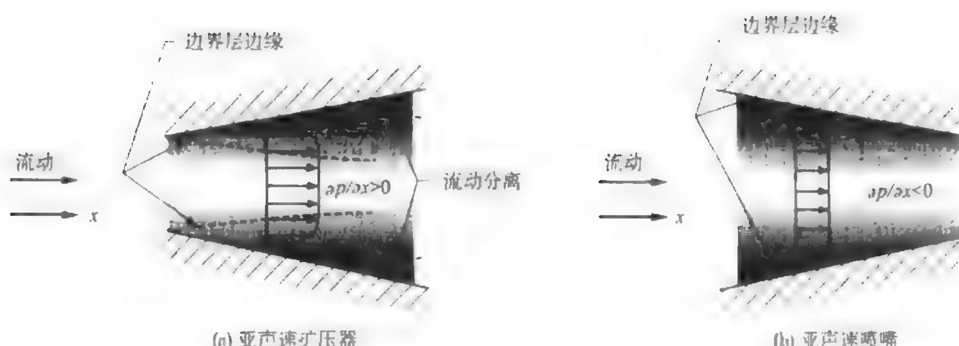


图 5-3　扩压器和喷嘴流动的比较

相反，喷嘴所涉及的是流动方向上压强下降（合理的压强梯度）.结果如图 5-3 所示，保持较小的边界层厚度.在喷嘴流动中分离不是问题，喷管的设计就比较简单一些.

图 5-4 所示的绕一物体流动的势流流动解预言，在流经物体前部时压强下降，流经物体后部时压强增大.这样，在物体前部形成一个较薄的边界层，在物体后部边界层就增厚，并可能在物体后部出现分离.如果物体后部太“钝”，由于压强梯度$\partial p/\partial x$ 变大，将导致气流分离.如能使物体后部外形缓慢地变化或使之流线型，如图 5-5 所示的泪珠形那样，可抑制分离发生.在分离点，流动脱离物体表面，形成一个尾迹.在分离点后，流体实际上沿物体表面逆向流动，在尾迹内形成涡旋或涡流.决定尾迹结构的关键是自由流（基于物体特征尺度的）雷诺数.在雷诺数非常低时（$Re\ll1$），流动通常称为非常黏性流或蠕流，而且实际边界层厚度厚得足以使黏性影响远远深入自由流，因而基本上没有势流区.在这种情况下，也就没有确定的尾迹[图 5-6(a)].从物体上游到下游的流动形态也不对称，因而对物体有阻力，对围绕物体的控制容积进行简单的动量平衡就能证明这一论断.随雷诺数增大，在尾迹中出现一对边界涡旋[图 5-6(b)，(d)].最后在更高雷诺数时，在物体后部两侧交替出现涡旋的形成和脱落，形成卡门涡街.在自由流是定常流情况下，出现这一周期性现象似乎感到奇怪，但它是一个非常重要的现象.这一涡旋周期性脱落引起对物体周期性的作用力，并且如果再与物体本身力学系统发生耦合，就会导致一个自身维持的振荡.达到共振条件时，可引起灾难性影响.

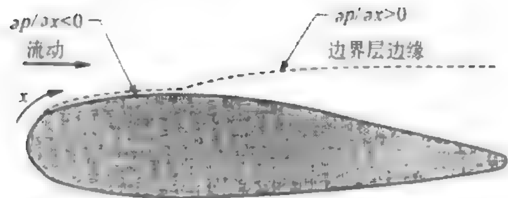


图 5-4　外流压强梯度对边界层增长的影响



图 5-5　绕泪珠形物体流动的流线

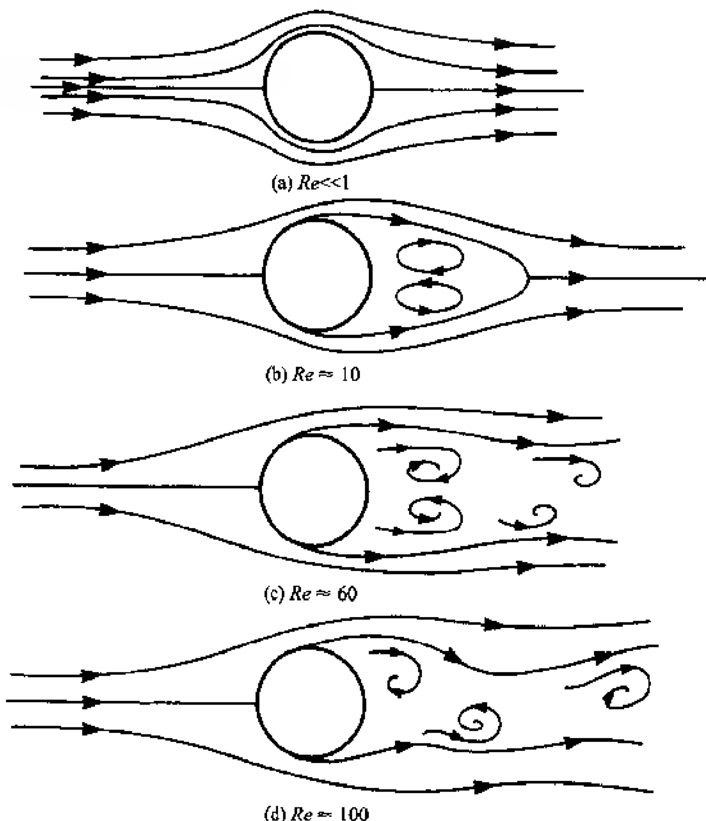


图 5-6　不同雷诺数下绕圆柱体的流动

由于尾迹和势流的相互干扰,分离点的实际位置难以进行解析计算.尾迹本身改变了上游势流流动形态和沿物体表面的相应压强梯度.分离点决定于沿表面的压强梯度和边界层内的湍流度.当湍流度增大时,分离点位置向物体后缘(或尾部)移动.边界层内的湍流度受物体表面粗糙度和边界层外自由流湍流度的影响.后面我们将要讨论分离和边界层对阻力的影响.在许多流动中,我们发现,围绕整个物体边界层是如此之薄,以至于完全忽略黏性影响的解可以给出精确的压强分布.例如,对绕流线型机翼的流动就是这样的情况.然而,如果物体后部为非流线型,而且由于边界层变厚或分离使尾迹变得很显著,那么除了边界层薄的物体前部外,势流解是不准确的.

5.2 外流 边界层

绕平板的流动

绕平板的流动一般是外流的代表.图 5-7 就是这一流动.在前缘,边界层厚度为零,随着沿平板距离的增加边界层增厚.边界层的初始部分是层流,但随后是一个从层流向湍流的转换区.如图 5-7 上部所表示的那样,这一区域实际上由湍斑组成,湍流传播到湍流达到充分发展时为止.这些湍斑没有固定位置,而是不断地脉动.因此我们可以看出,在完全层流区域是定常二维流动,在转换区和完全湍流区是非定常三维流动.

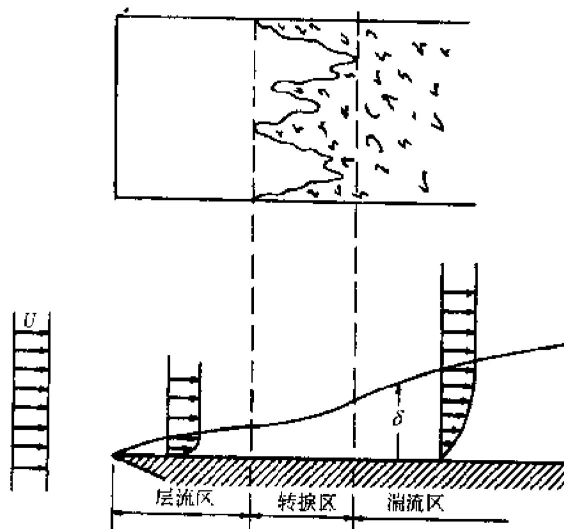


图 5-7 绕平板的边界层流动

精确求解描述层流边界层的合适方程很困难,只有若干简单情况可以容易地被处理.绕平板流动的解不可能以封闭形式表达,需要一个称为布拉修斯解的无限级数表达式.

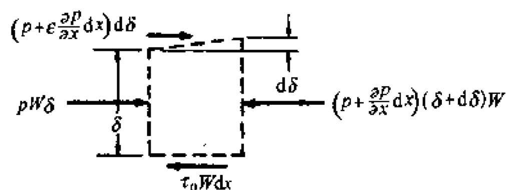
已经发展了一些处理层流边界层流动的近似方法.下面我们将讨论在各类边界层计算中有重要意义的动量-积分法.

然后对绕平板流动的布拉修斯解和积分法的主要结果进行讨论和比较.

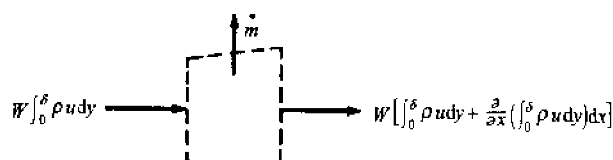
冯·卡门动量-积分法

考虑图 5-8 所示的绕平板流动的控制容积.我们将写出这个控制容积在 x 方向上的动量方程;见方程(3.9).我们有

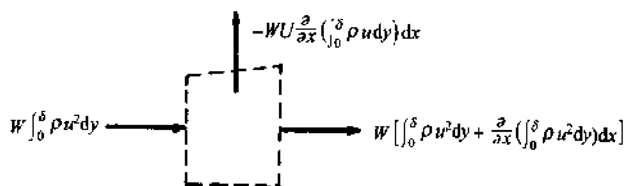
$$F_x = \int_{C.S.} \rho V_x \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$



(a) 作用在控制容积上的力



(b) 质量通量



(c) 动量通量

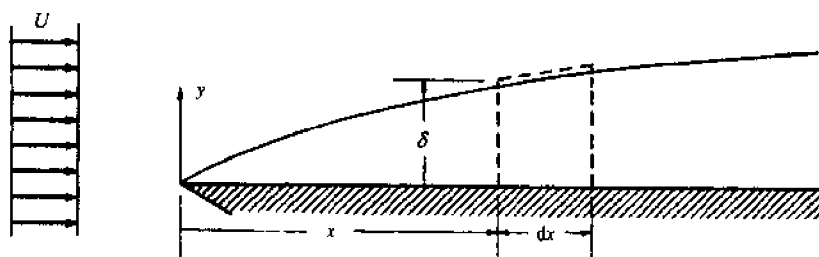


图 5-8　边界层积分方程的推导，W 为平板(Z 方向上)宽度

表面力为

$$F_{s_x} = pW\delta - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)(\delta + \mathrm{d}\delta)W - \tau_0 W\mathrm{d}x + \left(p + \epsilon\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\delta$$

式中 W 为平板宽度，δ 为边界层厚度，以及 τ_0 为壁面剪应力，定义为 $\tau_0 = \mu\partial u/\partial y|_{y=0}$. 忽略二次项并简化得到

$$F_{s_x} = \left[-\delta\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x - \tau_0\mathrm{d}x\right]W$$

在确定动量通量项以前，我们先考虑质量通量. 如图 5-6(b)所示，三个表面有质量通量通过. 通过上表面的质量通量 $\dot{m}$ 为

$$\dot{m} = W\int_0^\delta \rho u\mathrm{d}y - W\left[\int_0^\delta \rho u\mathrm{d}y + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u p\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$= - W \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

式中 u 为速度在 x 方向上的分量.因此,流体通过上表面时在 x 方向上的动量通量 $\dot{M}_x$ 为

$$\dot{M}_x = \dot{m}U = - WU \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

式中 U 为自由流(在 x 方向)的速度.总的动量通量为

$$\int_{\mathrm{C.S.}} \rho V_x \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = W\left[\int_0^\delta \rho u^2 \mathrm{d}y + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u^2 \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$- WU \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x - W\int_0^\delta \rho u^2 \mathrm{d}y$$

简化后为

$$\int_{\mathrm{C.S.}} \rho V_x \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = W \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\delta \rho u (u - U) \mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x - W \frac{\partial U}{\partial x}\int_0^\delta \rho u \mathrm{d}y$$

最后,完整的动量方程变成

$$\tau_0 + \delta \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta \rho u (U - u)\mathrm{d}y - \frac{\partial U}{\partial x}\int_0^\delta \rho u \mathrm{d}y \tag{5.1}$$

对层流和湍流,可压缩流动或不可压缩流动,这一方程都是准确的.

对不可压缩流动,可以通过应用伯努利方程以自由流速度 U 来表示压强梯度.沿紧靠边界层的自由流流线(忽略高度变化的影响)

$$\frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} = 常数$$

对其微分后得到

$$U \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$$

结合方程(5.1),动量方程可以表示为

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta (U - u) u \mathrm{d}y + \rho \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta (U - u)\mathrm{d}y = \tau_0 \tag{5.2}$$

式中 ρ 已经从导数中移出,以强调这一形式仅能应用于不可压缩流动.如果边界层外部压强梯度为零(因此 U 为常数),方程变为

$$\tau_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta \rho u (U - u)\mathrm{d}y \tag{5.3}$$

求解方程(5.1)或(5.2)要求确定速度剖面 $u(x,y)$ 和边界层厚度 $\delta(x)$,以下冯·卡门法假定:在不可压缩层流中 u 可以用一多项式表示.这一假定意味着比值 u/U 只是 (y/δ) 的函数,它将被证明是准确的.可以假定为一任意方次的多项式,用边界条件:$y = 0$ 和 δ 处的 u,求得多项式中的各个系数.

作为一个例子,我们选择一个三次方多项式速度分布

$$u = a + by + cy^2 + dy^3$$

结果是

$$u/U = \frac{3}{2}(y/\delta) = \frac{1}{2}(y/\delta)^3 \tag{5.4}$$

由边界条件：$y=0, u=0; y=\delta, u=U$ 和 $\partial u/\partial y=0$ 确定各系数. 然后用边界条件：$y=0$ 处 $\partial^2 u/\partial y^2=0$ 求解动量方程. 这里，将边界层厚度假定为 $u=U$ 代替以上的定义 $u=0.99U$ 是一个近似，与速度分布以多项式近似一致. 因此我们求得 τ_0 为

$$\tau_0 = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \frac{3}{2}\mu\left(\frac{U}{\delta}\right) \tag{5.5}$$

式中 μ 为流体的绝对黏度. 将速度分布方程(5.4)代入方程(5.3)并积分，我们得到

$$\frac{3}{2}\mu\left(\frac{U}{\delta}\right) = \frac{29}{280}\rho U^2 \frac{d\delta}{dx}$$

分离变量并积分，有

$$\delta/x = 4.64/\sqrt{Ux/\nu} = 4.64/\sqrt{Re_x} \tag{5.6}$$

式中 ν 为运动黏度，Re_x 为基于长度 x 的雷诺数. 现在我们可以合并方程(5.5)和(5.6)得到

$$\tau_0 = 0.323\rho U^2/\sqrt{Re_x} \tag{5.7}$$

表面摩擦系数 C_f 定义为 $C_f = \tau_0\Big/\left(\frac{1}{2}\rho U^2\right)$，因此，我们求得 C_f 的近似值为

$$C_f = 0.646\sqrt{\nu/Ux} = 0.646/\sqrt{Re_x} \tag{5.8}$$

绕一长度为 L 的平板流动的 τ_0 和 C_f 的平均值分别以 $\bar{\tau}_0$ 和 $\overline{C}_f$ 表示，它们可以定义为

$$\bar{\tau}_0 = \frac{\int_0^L \tau_0 dx}{L} = \frac{0.646\rho U^2}{\sqrt{Re_l}} = 2\tau_0\bigg|_{x=L} \tag{5.9}$$

$$\overline{C}_f = \frac{\bar{\tau}_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{1.292}{\sqrt{Re_l}} \tag{5.10}$$

这里，C_f 和 τ_0 的值是基于速度剖面的三次方多项式近似求得的. 下一节我们将求解更为精确的 C_f 值并将两个结果进行比较.

相同的方法可以用来确定湍流边界层的增厚速率. 然而，在湍流中需要应用经验性的速度分布和壁面剪应力. 对于光滑表面，布拉修斯得到

$$\tau_0 = 0.0225\rho U^2(\nu/U\delta)^{1/4}$$

应用下面将讨论的幂律速度分布

$$u/U = (y/\delta)^{1/7}$$

将以上剪应力和速度分布代入方程(5.3)，可得

$$\delta/x = 0.376(Ux/\nu)^{-1/5} = 0.376(Re_x)^{-1/5} \tag{5.11}$$

我们已经假定了从边界层前缘开始就是湍流. 以距离 x 表示的剪应力为

$$\tau_0 = 0.0286\rho U^2(\nu/Ux)^{1/5} = 0.0286\rho U^2(Re_x)^{-1/5} \tag{5.12}$$

普朗特边界层方程和布拉修斯解

如果我们考虑大雷诺数下绕平板的不可压缩层流，纳维-斯托克斯方程便简化为

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5.13}$$

式中

$$\frac{\partial p}{\partial y}\ll\frac{\partial p}{\partial x} \tag{5.14}$$

u 和 v 分别为速度在为 x 和 y 方向上的分量，并假定为黏度不变的不可压缩流动．这些方程可以用完整的纳维-斯托克斯方程的量级分析进行推导．详细情况读者可以参阅有关文献．

即使对于弯曲表面(即一个具有坐标 z 的圆柱截面)，例如边界层厚度比曲率半径小很多的机翼表面，这些方程在笛卡儿坐标系中通常也是准确的．一般，实际情况就是这样．这里将不考虑推广到二维边界层流动的情况，虽然它对于绕三维物体流动的描述是必须的，但相当复杂．

在平板表面垂直方向上的压强梯度 $\partial p/\partial y$ 与 $\partial p/\partial x$ 相比可以忽略，因此边界层内的压强由边界层外的自由流所施加．一般，由假定边界层厚度可以忽略，解边界层外绕物体的势流(非黏性流动)，从而计算得到沿物体表面所产生的压强 $p(x)$．如果边界层产生分离，这种方法就不能应用，因为这时势流受分离点位置和尾迹的影响．这时，流动变得以复杂的方式相耦合，常常必须依靠实验才能完全加以描述．

连续方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{5.15}$$

于是，问题简化成两个方程和两个未知数 u 和 v．压强梯度 $\partial p/\partial x$ 由可以忽略黏性作用的边界层外的势流加以确定．这一问题将在下一章讨论．

现在，考虑压强梯度为零的绕平板流动．这一流动的方程为

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

边界条件为：在 $y=0$ 处，$u=v=0$；在 $y=\infty$ 处，$u=U$．假定不同轴向位置上的速度剖面在形状上相似(在这里的情况下确实是这样)，因此可以写作为

$$u/U=g(y/\delta)$$

式中 $g(\ \ )$ 是一个函数符号．

我们进一步令

$$\eta=y\sqrt{U/\nu x},\quad u=\partial\psi/\partial y,\quad v=-\partial\psi/\partial x,\quad \psi=\sqrt{\nu xU}f(\eta)$$

式中 ψ 为第三章中定义的流函数，f 是需要加以确定的未知函数．因此，借助流函数 ψ，动量方程变为

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}$$

以及借助 f，我们有以下常微分方程

$$f\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\eta^2}+2\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}\eta^3}=0 \tag{5.16}$$

边界条件：在 $\eta=0$ 处，$f=f'=0$；在 $\eta=\infty$ 处，$f'=1$．布拉修斯用级数展开求解了这一方程(见

参考文献 5).结果是

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\frac{\alpha^{n+1}C_{n}}{(3n+2)!}\eta^{(3n+2)}$$

式中 $\alpha=0.3320$ 以及前几个 C_n 值为

$$C_0=1$$

$$C_1=1$$

$$C_2=11$$

$$C_3=375$$

$$C_4=27\,897$$

$$C_5=3\,817\,137$$

最近,已经用数字计算机对方程(5.16)(并推广到包含压强梯度)广泛地进行了求解.速度分布曲线 u/U 如图 5-9 所示.

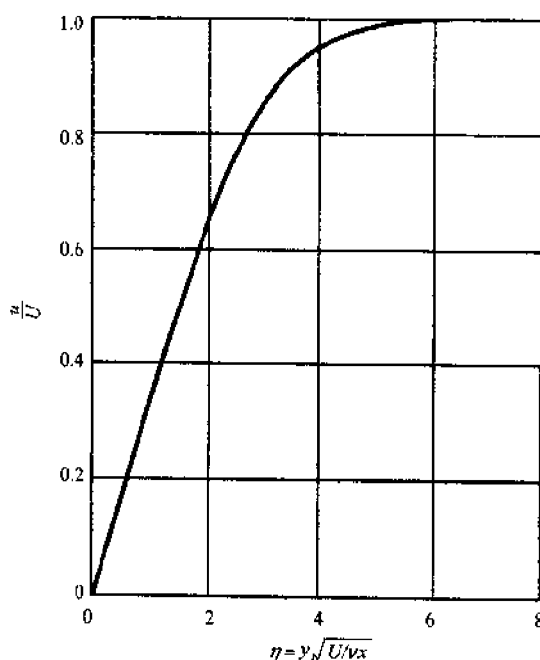


图 5-9　零压强梯度时沿平板的速度分布

因为表面摩擦系数定义为 $C_f=\tau_0\Big/\left(\frac{1}{2}\rho U^2\right)$,其中 $\tau_0=\mu\partial u/\partial y|_{y=0}$,我们求得 C_f 为

$$C_f=2\sqrt{\nu/Ux}\,\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\eta^2}\bigg|_{\eta=0}$$

根据布拉修斯解 $\mathrm{d}^2 f/\mathrm{d}\eta^2\Big|_{\eta=0}=0.332$,我们有

$$C_f=0.664\sqrt{\nu/Ux}=0.664/\sqrt{Re_x} \tag{5.17}$$

这一数值与先前用积分方法得到的数值相比,我们可以看出三次多项式近似导致的 C_f 误差

大约仅为 2.7%，由此可见近似方法的价值.

积分方程

由沿边界层厚度方向积分普朗特方程可以得到不可压缩流动的边界层方程(5.1)的积分形式如下：

$$\rho\int_0^\delta\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}y=-\int_0^\delta\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}y+\mu\int_0^\delta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{d}y$$

应用连续方程和 τ_0 的定义：$\tau_0=\mu\partial u/\partial y\Big|_{y=0}$，直接的代数计算得到如下结果：

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta u(U-u)\mathrm{d}y-\rho\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta u\mathrm{d}y=\delta\frac{\delta p}{\delta x}+\tau_0 \tag{5.18}$$

它与 ρ 为常数的方程(5.1)相同.

位移厚度和动量厚度

边界层理论中，位移厚度定义 δ^* 为

$$\delta^*=\int_0^\infty\left(1-\frac{u}{U}\right)\mathrm{d}y \tag{5.19}$$

以及动量厚度 θ 定义为

$$\theta=\int_0^\infty\left(1-\frac{u}{U}\right)\frac{u}{U}\mathrm{d}y \tag{5.20}$$

在速度剖面以多项式近似的边界层近似方法中，积分可以从 0 至 δ 进行，方程(5.18)变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(U^2\theta)+\rho U\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\delta^*=\tau_0 \tag{5.21}$$

位移厚度有一个简单的物理解释.它是这样的一个距离：如果流动是完全无黏并没有边界层，为了使流场不发生变化，壁面必须往外向自由流移动的距离.换句话说，在无黏流动中由于平板表面向外位移所引起的流动质量通量减少量严格地等于在实际流动中由于边界层引起的流动质量通量减少量.动量厚度具有相同的意义，不过依据的是动量通量而不是质量通量.

湍流边界层

即使对于如绕平板流动和管流这样的简单情况，湍流中平均速度分布没有完全的分析解.这一章的目的是要对湍流中平均速度和压强分布提出半经验的描述方法.在以下的所有方法中，结果只能应用于二维流动.

幂律

对于光滑直管道内的流动，幂律来自布拉修斯阻力表达式.然而，它们也被应用于其他槽道流动和二维边界层流动.我们将假定壁面光滑，压强梯度可以忽略.

如果我们假定表面摩擦因数 C_f，可以表示为(基于 δ 的)雷诺数的一个幂函数，我们有

$$C_f=\frac{常数}{(U\delta/\nu)^m} \tag{5.22}$$

式中 U 对管道流动，为中心流速，对边界层流动，为自由流速度；δ 对管流，为管道半径，对绕平板流动，为边界层厚度.因此，根据 C_f 的定义和方程(5.22)

$$U/u_\tau=(常数)(u_\tau\delta/\nu)^{m/(2-m)} \tag{5.23}$$

式中我们已经导入定义为$\sqrt{\tau_0/\rho}$的摩擦速度u_τ. 假定在离壁面任意距离上的速度 u 可以由一个与方程(5.23)类似的方程来表示,我们得到

$$u/u_\tau = (常数)(u_\tau y/\nu)^{m/(2-m)} \tag{5.24}$$

如果我们进一步假定平均速度剖面是相似的,合并方程(5.23)和(5.24),我们有

$$u/U = (y/\delta)^{m/(2-m)} \tag{5.25}$$

我们可以发现,如取 $m=1/4$,方程(5.25)表示在 $3000 < U\delta/\nu < 70\,000$ 范围内管道内摩擦因数的变化. 因此,这是导入幂律分布的一个优点. 最理想的是我们希望指数 m 为一常数. 但它随雷诺数而变化,不过变化很小. 这一点在许多工程计算中非常有用.

对于管流,方程变为

$$\left.\begin{aligned} C_f &= 0.0466(U\delta/\nu)^{-1/4} \\ u/u_t &= 8.74(u_\tau y/\nu)^{1/7} \\ u/U &= (y/\delta)^{1/7} \end{aligned}\right\} \begin{matrix} 管流 \\ 3000 < Re < 70\,000 \end{matrix}$$

随雷诺数增大,以上方程中的指数 m 减小.

壁面律

如果我们假定靠近壁面存在一个黏性起重要作用的区域,以及壁面剪应力对流动是一个重要的约束(即压强梯度可以忽略),我们就能写出以下速度分布函数关系:

$$u = F(\tau_0, y, \mu, \rho)$$

根据量纲分析,我们有

$$u/u_\tau = f(yu_\tau/\nu) \tag{5.26}$$

方程(5.26)就是壁面律的表达式. 它表明:如果对许多不同的流动绘制成的 yu/ν 与 u/u_τ 曲线将是单一曲线. 这已由对不同流动形态的实验所证明. 例如,对光滑表面和中等压强梯度,即使距离壁而远的地方(不是边界层最靠外的部分)结果也能很好吻合. 大的逆向压强梯度将使靠近壁面处偏离壁面律. 图 5-10 是一些实验结果.

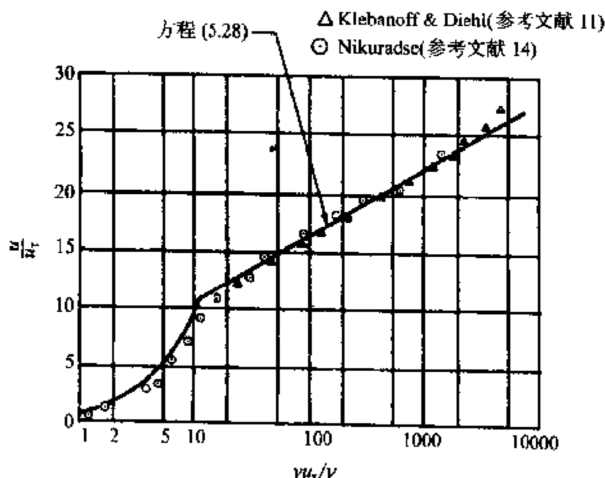


图 5-10 壁面律速度分布,u_τ 为摩擦速度$\sqrt{\tau_0/\rho}$

速度衰减律

现在,我们假定黏性在边界层外部的流动中不再重要,以及速度衰减($U-u$)决定于壁面处的剪应力和壁面影响传播距离 δ.那么

$$U-u=G(\tau_0,y,\delta,\rho)$$

以及根据量纲分析,我们有

$$(U-u)/u_\tau=g(y/\delta) \quad (5.27)$$

对于边界层较外部为零压强梯度的流动,速度衰减律与实验结果相符.它与壁面粗糙度无关.结果表示在图5-11.

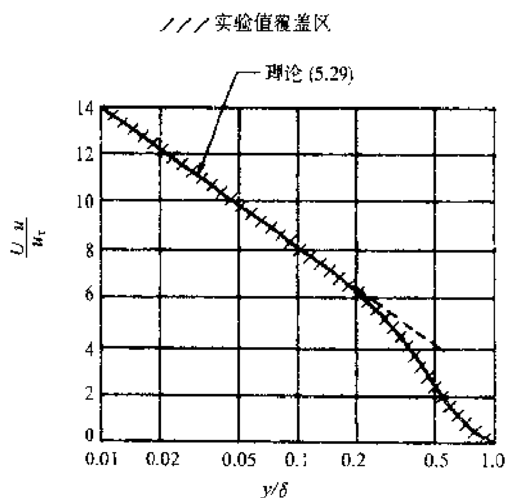


图 5-11　速度衰减律速度分布

壁面律和速度衰减律的对数形式

已经观察到存在一个壁面律和速度衰减律同时成立的中间重叠区域.在这两个律都准确的重叠区中,显示出以上讨论的函数 f 和 g 必定是对数形式.即方程(5.26)变成

$$u/u_\tau=C_1\ln(yu_\tau/\nu)+C_2 \quad (5.28)$$

和方程(5.27)变成

$$(U-u)/u_\tau=C_3\ln(y/\delta)+C_4 \quad (5.29)$$

常数 C_1、C_2、C_3 和 C_4 由实验确定,在文献中报道的这些常数的值稍有差别.克劳塞[6]给出的是

$$C_1=2.44,\quad C_2=4.9,\quad C_3=-2.44,\quad C_4=2.5$$

这些方程给出的值与实验值的比较表示在图5-10和5-11中.

具有压强梯度和分离的边界层

一般沿浸没在流动流体中的物体表面存在压强梯度.沿物体表面的压强可以由实验得到.如果不发生分离,在某些情况下可以解析得到.在边界层方程中必然包含压强梯度项,使方程的求解复杂化.在空气动力学和其他实际应用中,已广泛应用能很好地帮助边界层计算的数值方法.我们将讨论若干使物理性质不成为分析障碍的近似技术的例子.

浸没在流动流体中的物体前缘或凸出部分不可避免地开始形成一个层流边界层.如果物体有足够长度,边界层将增厚,边界层内流动变成湍流.一般,当下游雷诺数(随 x 增大)追近一个临界值时,流动经历从层流向湍流的转变.这一临界值决定于物体表面粗糙度和物体前流动的湍流度.如果有足够大的逆向压强梯度,边界层将发生分离.在分离点 $\tau_0=0$(因此$\partial u/\partial y=0$),沿物体表面流体逆向流动,导致在尾迹中出现涡旋.通常,提高湍流度能推迟分离发生,分离点进一步向物体尾缘移动.流线型物体有减小逆向压强的趋势,并且如果其影响得当可以完全阻止分离发生.在下一节将讨论它对阻力的影响.图5-12表示绕圆柱体流动时边界层的分离.

作为一个例子,我们将用三次多项式近似速度剖面,但是因为存在压强梯度,系数与方程(5.4)中的系数不同.边界条件:在 $y=0$ 处,$\partial^2u/\partial y^2=0$ 不再成立,代之以边界条件(直接是动量方程):在 $y=0$ 处必须应用

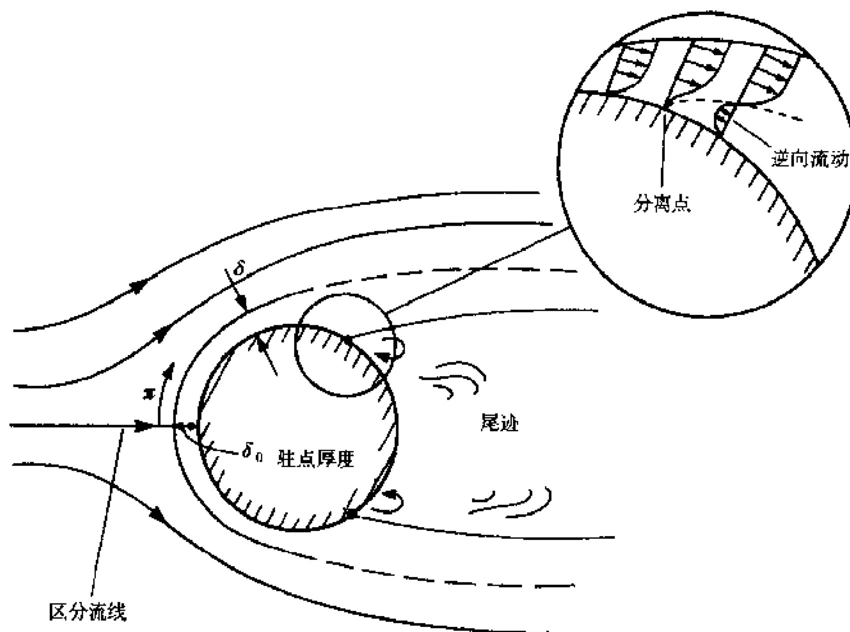


图 5-12　标明驻点的绕圆柱体流动的分离

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\rho U \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$$

系数计算给出

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{3}{2} + \frac{\lambda}{2}\right)\frac{y}{\delta} - \lambda\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}\right)\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \tag{5.30}$$

式中

$$\lambda = \frac{\delta^2 \rho}{2\mu}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$$

壁面剪应力 $\mu(\partial u/\partial y)|_{y=0}$变为

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{3}{2} + \frac{\lambda}{2}\right)\frac{U}{\delta}$$

在分离点 $\tau_0=0$,并且以上表达式给出分离点的 λ 值:

$$\lambda = -3 = \frac{\delta^2 \rho}{2\mu}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \tag{5.31}$$

这是分离点的近似 λ 值.更精确的计算得到与之稍微不同的数值. U 的数值可以从势流解确定,但 δ 必须由边界层本身计算得到.因此,由于尾迹的形成通过边界层与势流强烈地耦合,在实践中就产生了问题.在大多数情况下必须应用复杂的数值迭代技术或某些以 $p(x)$给出的实验数据.

在空气动力学中另一个感兴趣的问题是驻点附近边界层的性质(图 5-12).在这种情况下,与绕具有薄尖锐前缘的平板流动不同,物体的前缘或凸缘表面是非流线体并垂直于自由流.流动仅在凸缘的某一点(驻点)滞止,并将流动分成绕上表面和下表面两部分.在驻点,边界层厚度不等于零,为可以由计算得到的有限值.此外,还与在前缘处 τ_0 趋近于无限值的绕平板流动问题不同,在驻点处因为$\partial u/\partial y=0$,所以 $\tau_0=0$.

为简单起见,我们将用平方速度剖面近似.我们假定

$$\frac{u}{U} = a + bx + cx^2$$

并用边界条件:在 $y=\delta$ 处,$u=U$①和$\partial u/\partial y=0$;在 $y=0$ 处,$u=0$ 来计算 a,b 和c.可以指出,在计算平方速度剖面时不出现压强梯度,因此平方速度剖面近似不足以用来计算分离.然而,它确实给出了驻点附近边界层的合理描述.结果是

$$\frac{u}{U} = 2(y/\delta) - (y/\delta)^2 \tag{5.32}$$

可以容易地将表面上的势流(将在第六章讨论)$U(x)|_{y=0}$以从驻点开始计量的沿表面距离 x 的指数级数进行展开

$$U(x)|_{y=0} = U_\infty(Ax + Bx^2 + \cdots) \tag{5.33}$$

式中 U_∞为自由流相对于物体的速度(即飞机的飞行速度).仅保留第一项 $U_\infty Ax$(它对于靠近驻点的小 x 值是准确的),将方程(5.32)和(5.33)代入方程(5.3),并在边界层内进行积分得到

$$\frac{x}{15}\frac{d\delta}{dx} = \frac{\mu}{A\rho U_\infty\delta} - \frac{9}{30}\delta \tag{5.34}$$

它只对驻点附近准确.因为在 $x=0$ 处 $d\delta/dx=0$,方程(5.34)的右边必定等于零,驻点处的边界层厚度 δ_0($x=0$处的 δ)可以立即求得,于是

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{30\mu}{9A\rho U_\infty}} = 1.83\sqrt{\frac{\mu}{A\rho U_\infty}} \tag{5.35}$$

三次方速度剖面给出的 $\delta_0=2.4\sqrt{\mu/A\rho U_\infty}$,前两位有效数字与精确解的相同.

5.3 外流 升力和阻力

无论什么时候,当一个物体被置于运动流体中(或在流体中运动)时,在流体运动方向上流体对物体施加一个力(阻力 D)以及在垂直于流动方向上流体对物体施加一个力(升力 L).这些力可以表示为

$$D = C_D(\rho V^2/2)A \tag{5.36}$$

$$L = C_L(\rho V^2/2)A \tag{5.37}$$

这里 A 是特征面积,通常为垂直于流动方向的物体表面积或投影面积.方程(5.36)和(5.37)定义了阻力系数 C_D 和升力系数C_L.除少数情况外,这些系数必须由实验确定,它们通常取决于雷诺数.

阻力和升力是由作用在物体表面上的切向力和法向力之和产生.由于切向应力造成的阻力称为摩擦阻力,表面摩擦阻力,或黏性阻力.当平行于流动方向的表面积大于垂直于流动方向的投影面积时,这种阻力最为重要.例如,表面摩擦阻力是造成与流动方向平行的平板的所有阻力的根源.

由正应力造成的阻力称为型阻力或压强阻力.压强阻力更为重要,并且常常是对非流线体产生阻力的主要原因.在第六章中可以看出,如果绕物体的流动是无摩擦流,因此没有边界层,也就没有阻力.然而,流体并非无摩擦,存在边界层.有逆向压强梯度时,边界层快速增厚,如果逆向压强梯度足够大,将发生分离.厚边界层或环绕物体尾部的尾迹使物体后部压强比无摩擦流动时的低.这一物体后部降低了的压强产生一个流动方向上的净力.这表示在图 5-13 中.

① 原文误印为 $u=0$——译者注.

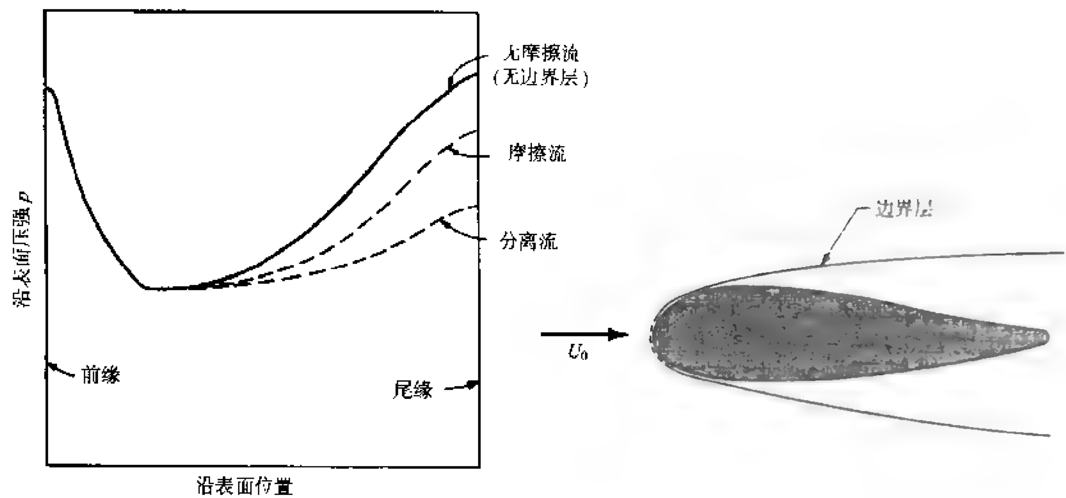


图 5-13　边界层对物体表面压强分布的影响

我们可以看出，为降低压强阻力必须减小整个物体后部的逆向压强梯度，而且如果可能的话，要阻止发生分离. 这意味着整个物体尾部要有一个长的平缓的坡度. 然而，如果物体太长，这一降低压强阻力的效果可能被增加表面摩擦阻力所抵消. 物体的最小阻力设计是表面摩擦阻力和压强阻力之间的折中.

给定形状物体的阻力系数主要取决于雷诺数. 虽然自由流的湍流强度和物体表面粗糙度的影响是次要的，但在一定条件下(尤其是对于发生边界层分离的非流线体)它们却非常重要. 表 5.1 给出了若干不同形状物体的阻力系数. 更加完整的阻力系数表读者可以参阅霍尔纳的著作(参考文献 9).

表 5.1　阻力系数

被绕流物体	C_D	雷诺数范围	特征长度	特征面积
平板(切向)　L	$1.33(Re)^{-1/2}$	层流	L	平板表面积
	$0.074(Re)^{-1/5}$	$Re<10^7$		
平板(法向)　L　d	L/d 1　1.18 5　1.2 10　1.3 20　1.5 30　1.6 ∞　1.95	$Re>10^3$	d	平板表面积
圆盘(法向)　d	1.17	$Re>10^3$	d	

续表

被绕流物体	C_D	雷诺数应用	特征长度	特征面积
球体	$24(Re)^{1/2}$	$Re<1$	d	投影面积
	0.47	$10^3<Re<3\times10^5$		
	0.2	$Re>3\times10^5$		
半球面	0.34	$10^4<Re<10^6$	d	投影面积
	1.42	$10^4<Re<10^6$		
实半球体	0.42	$10^4<Re<10^6$	d	投影面积
	1.17	$10^4<Re<10^6$		
圆柱体	L/d 1　0.63 5　0.8 10　0.83 20　0.93 30　1.0 ∞　1.2	$10^3<Re<10^5$	d	投影面积
方柱体	2.0	$3.5(10)^4$	d	投影面积

原则上，升力可以由第六章中对无摩擦流动的分析来解释.

我们将考虑绕圆柱体的流动以验证前面表达的关于阻力成因的某些思想.绕圆柱体流动的阻力系数见图 5-14，流动形态见图 5-15.

流动的特性由雷诺数确定.例如，对非常低的雷诺数($Re<1$)，流动不发生分离，表面摩擦就显得重要.雷诺数非常低时，阻力正比于速度，并且阻力系数随雷诺数的增大而下降.随雷诺数增大，流动将趋向于发生分离.分离以卡门涡街脱落的形式周期性地发生.雷诺数的进一步增大将导致完全的分离流.绕圆柱体的层流边界层流动，由于有利的压强梯度，圆柱体前部的边界层很薄.然而，其后部逆向压强梯度的存在导致边界层快速增厚并发生分离.对层流边界层，分离点位于与驻点成 81°角的地方.压强阻力比摩擦阻力大得多，这种情况下的阻力系数基本上为常数.

在某一雷诺数时，边界层变成湍流.结果，因为分离点后移，阻力系数有一个突然下降，导致较小的压强阻力，因而总阻力比较小.

在边界层不可避免发生分离的情况下，例如绕圆柱体或球体的流动，在中等或高雷诺数

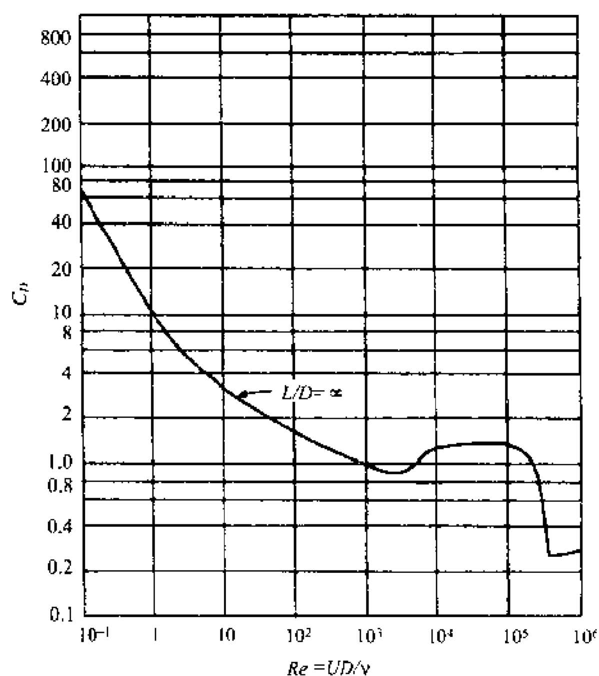


图 5-14　圆柱体的阻力系数

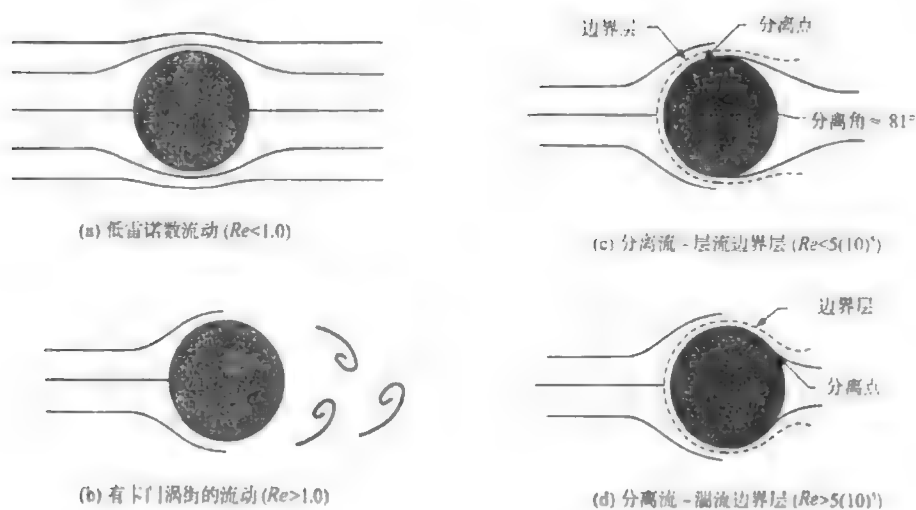


图 5-15　绕圆柱体的流动

时，型(或压强)阻力一般决定了摩擦阻力．为了使型阻力最小，可以用增大边界层湍流度来推迟分离发生．一个增大湍流度的有效方法是增加表面粗糙度．高尔夫球由于表面凹凸不平降低了阻力，其飞行距离大大增加．同样垒球由于其接缝和表面粗糙，阻力也就减小．

5.4　内流

进口流动

内流与外流不同，在内流的进口段存在边界层和均匀的自由流，自由流由于边界层增厚而加速．另外一个更为重要的区别是，当流动变成充分发展时，内流在整个通道内截面上形成速度分布，没有自由流或所谓的边界层．

考虑图 5-16 所示整个管道进口段内的流动.在进口,速度均匀分布.随着离管道进口距离的增加,边界层增厚,直至流动充分发展.根据连续方程可以看出,无摩擦核心的流动必然加速.因此,根据沿自由流区域流线写出的伯努利方程,可以看出压强必然降低.布辛涅斯克发现,流动变成充分发展所需要的层流发展长度 X_L 为

$$X_L = 0.03ReD$$

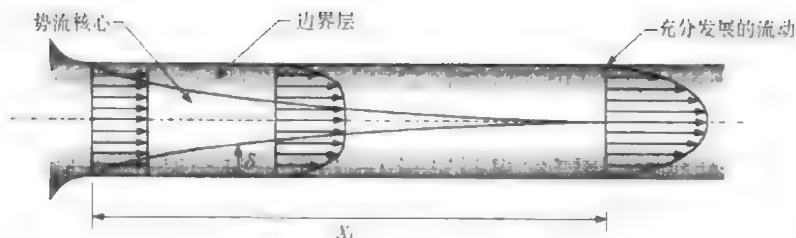


图 5-16　层流管流进口段内的流动

图 5-17 表明:在足够大雷诺数($Re>2300$)时,整个管道进口段的流动为湍流.有若干确定流动充分发展的准则的方法,例如,可以根据压强降,平均速度分布,或湍流量来确定流动充分发展所需要的长度.用这些方法确定的实际长度有本质上的差别.根据压强梯度选取的流动充分发展长度一般为 3 至 4 倍管道直径.根据平均速度分布,要求流动充分发展前的长度为 30～60 倍管道直径.此外,根据湍流量则要求更长得多的距离.严格地讲,确定流动充分发展准则的应该是(除压强外的)所有平均量相对于流动方向坐标的变化率为零.然而,在文献中最常应用的准则值却是在流动方向上平均速度剖面开始不随距离而变化的那一点.

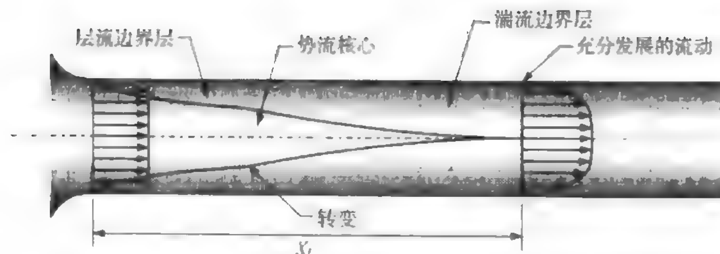


图 5-17　湍流管流进口段内的流动

充分发展的流动

转捩　管道内的流动可以是有规则的和平缓的(层流),或者可以假定为一个无规则的脉动运动叠加在平均速度上的流动(湍流).这些流动特性决定于管道壁面粗糙度和雷诺数.这已由经典的雷诺实验所证明.在一直玻璃管道中引入一个染色流,在流动速率小时,染色流形成一条光滑的直线.当逐渐增大流动速率时,就达到一个临界点,这时染色流失去直线形状变成锯齿状,它标志开始向湍流转捩.这一从层流向湍流转捩的雷诺数约为 2300.然而,在特殊条件下,实现这一转捩的雷诺数可以高达 40 000.

层流　考虑图 5-18 所示在两个平行壁面之间充分发展的层流.其速度仅是 y 的函数(因此$\partial u/\partial y$ 可以写成 du/dy),并在中心轴上具有最大值,在壁面处速度为零.同时,速度分布对称于 x 轴.

对于这一情况,x 方向上的动量方程变为

$$0=-\mathrm{d}p/\mathrm{d}x+\mu(\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}y^2)$$

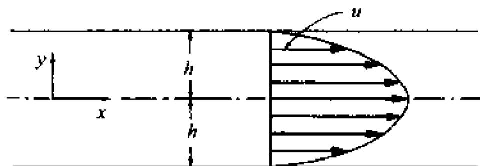


图 5-18　平行壁面间充分发展的层流

对上述方程积分一次后给出

$$\mu(\mathrm{d}u/\mathrm{d}y)=(\mathrm{d}p/\mathrm{d}x)y+C_1$$

应用边界条件：在 $y=0$ 处，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}y=0$，我们得到 $C_1=0$. 对于充分发展的流动由于 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x=$ 常数，$\tau=\mu(\mathrm{d}p/\mathrm{d}y)$，则有

$$\tau=(\mathrm{d}p/\mathrm{d}x)y$$

因此，剪应力是 y 的线性函数. 这一结果也能应用于湍流流动.

如果我们再积分一次并应用条件：在 $y=h$ 处，$y=0$，我们有

$$u=\frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(y^2-h^2)\tag{5.38}$$

下一步我们考虑图 5-19 所示的圆管中充分发展的层流. 这一流动称为泊肃叶流. 再一次应用动量方程和边界条件直接进行积分，我们得到

$$0=-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\mu\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}\right)$$

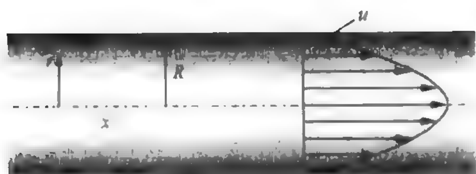


图 5-19　管道内充分发展的层流

应用边界条件：$r=R$，$u=0$ 和 $r=0$，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}r=0$，对 u 得到以下结果：

$$u=\frac{1}{4\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(r^2-R^2)\tag{5.39}$$

容积流率 Q 由沿整个管道截面对速度积分得到

$$Q=\int_0^R 2\pi ru\,\mathrm{d}r=-\frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\tag{5.40}$$

对正 x 方向上的流动（Q 为正），压强梯度必定为负（即在 x 方向压强降低）. 压强梯度平衡所产生的摩擦力. 考虑在 x 方向长度为 Δx 的一段管道. 当选择以动量方程开始时，我们可以考虑半径为 R 的管道内作用在流体上的所有力的平衡为

$$\left(p\big|_x-p\big|_{x+\Delta x}\right)\pi R^2+2\pi R\Delta x\left(\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R}=0$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mu}{R}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=R}$$

如果选择任意半径 r 的管道，力的平衡给出

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mu}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$$

它恰好是动量方程的一次积分. 随后的积分应该能得到速度剖面，即方程(5.39).

库埃特流

库埃特流是平行（或接近于平行）表面之间的流动，其中一个表面沿其平面横向运动. 如果两个表面都静止，就简化为上一节讨论的泊肃叶流. 参照图 5-20，可以很容易地选取附着于下静止表面的坐标系（假定两个平面在垂直于纸面方向上都非常大）. 两平面之间的间距为 h，运动方程仍和泊肃叶流相同，为

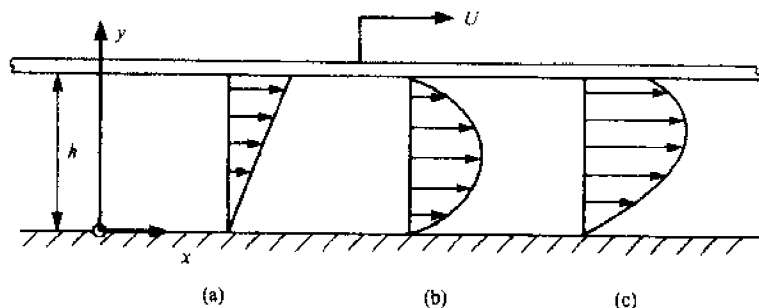


图 5-20　库埃特流
(a)无压强梯度时的线性剖面
(b)$U=0$,但存在压强梯度 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x<0$ 时的流动(泊肃叶流)
和(c)由(a)和(b)线性叠加而成的一般库埃特流

$$0=-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\mu\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}$$

但是现在边界条件为:$y=0,u=0$ 和 $y=h,u=U$.积分两次并应用边界条件我们有

$$u=\frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(y^2-hy)+\frac{Uy}{h}$$

从中我们看出,它是一线性剖面(由于上表面的运动)与由压强梯度产生的一平方剖面的叠加.这一平方剖面看起来与方程(5.38)的剖面稍有不同,这是由于我们对 h 的定义不同,将 y 的原点取在下平面上面不是取在两平面之间的中心线上所致.读者应该能证明这两个表达式是相当的.

沿两平面之间的流体积分速度剖面得到(垂直于页面)单位深度上的容积流率为

$$Q=\int_0^h u\,\mathrm{d}y=-\frac{h^3}{12\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\frac{Uh}{2} \tag{5.41}$$

摩擦因子和压头损失

由于摩擦的结果,在内流中将引起压强损失.这些对于工程上非常重要的损失可以发生在直管道中(主要损失)或突扩管道,阀门,弯头等内部(次要损失).

对流动通道中两点之间的控制容积,能量方程为

$$V_1^2/2+p_1/\rho+gz_1=V_2^2/2+p_2/\rho+gz_2+u_2-u_1-q$$

或

$$V_1^2/2g+p_1/\rho g+z_1=V_2^2/2g+p_2/\rho g+z_2+H_L \tag{5.42}$$

式中 $H_L=(u_2-u_1-q)/g$ 为压头损失,这里 u 是比内能.H_L 项实际上代表 1 和 2 两点之间机械能的降低(损失),并且通常包含主要和次要损失.

现在我们将讨论确定这些损失的方法.不存在确定湍流损失的纯解析方法.因此,结果在性质上是高度经验性的.

首先,我们来看确定主要损失的方法.我们的分析将限于等直径管道内充分发展的不可压缩湍流.

由方程(5.42)我们可以看出,压强变化由速度变化,高度变化和摩擦损失引起.对于所考虑的等截面不可压缩湍流,我们有 $V_1=V_2$,并且我们假定 $z_1=z_2$,方程(5.42)就变为 $H_L=(p_1-p_2)/\rho g$.

已知压强变化决定于(1)管道直径 D,(2)平均速度 V,(3)长度 L,(4)绝对黏度 μ,(5)流体密度 ρ 和(6)壁面粗糙度 ε,因此

$$\Delta p = F(D, V, L, \mu, \rho, \varepsilon)$$

根据量纲分析,我们可以得到四个无量纲参数,或

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = G(\rho VD/\mu, \varepsilon/D, L/D)$$

实验表明,其中两个参数可以合并,得到

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}\left(\frac{D}{L}\right) = f(\rho VD/\mu, \varepsilon/D)$$

或

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = H_L = \left(\frac{L}{D}\right)\frac{V^2}{2g}f \tag{5.43}$$

式中 f 为摩擦因子. 摩擦因子已由实验确定,结果表示于图 5-21. 要指出的是,雷诺数低于 2000 时,因为流动为层流,只有一条曲线. 层流的摩擦因子由分析方法确定为(见习题 5.6)

$$f = 64/Re \tag{5.44}$$

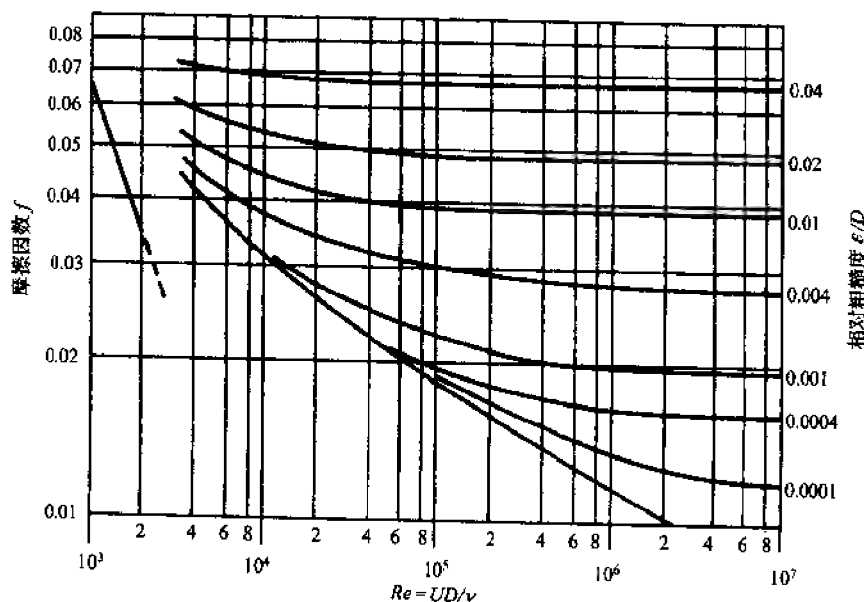


图 5-21 管流摩擦因数图

摩擦因子 f 称为达西摩擦因子,可以由壁面剪应力 τ_0 定义为 $f = 8\tau_0/\rho V^2$. 这可以由考虑流体控制容积的静力学平衡,用剪应力平衡压强力来得到证明.

下一步,我们将考虑次要损失. 在考虑弯头,阀门和膨胀器中的损失时,我们必须凭借实验方法. 通常将这些损失写作以下形式:

$$H_L = KV^2/2g \tag{5.45}$$

式中 K 为不同类型次要损失的摩擦损失系数,对于商业管道使用的摩擦损失系数,可以在手册中找到. 表 5.2 列出某些 K 的近似值.

表 5.2　次要损失的压头损失系数

阀门,连接件和管道	K
球阀(全开)	10.0
闸阀(全开)	0.19
90°弯头	0.90
45°弯头	0.42
尖锐边缘进口圆管	0.50
圆弧进口圆管	0.25
突扩管道	$(1-A_1/A_2)^2$*

* A_1 = 上游截面积, A_2 = 下游截面积

湍流的速度分布

管道中充分发展湍流的典型速度分布如图 5-22 所示.如我们以前对平板所用的那样,速度用幂律速度近似.我们有

$$u/u_{\max} = (y/R)^{1/n} \tag{5.46}$$

式中 y 为从管壁起向中心的距离.

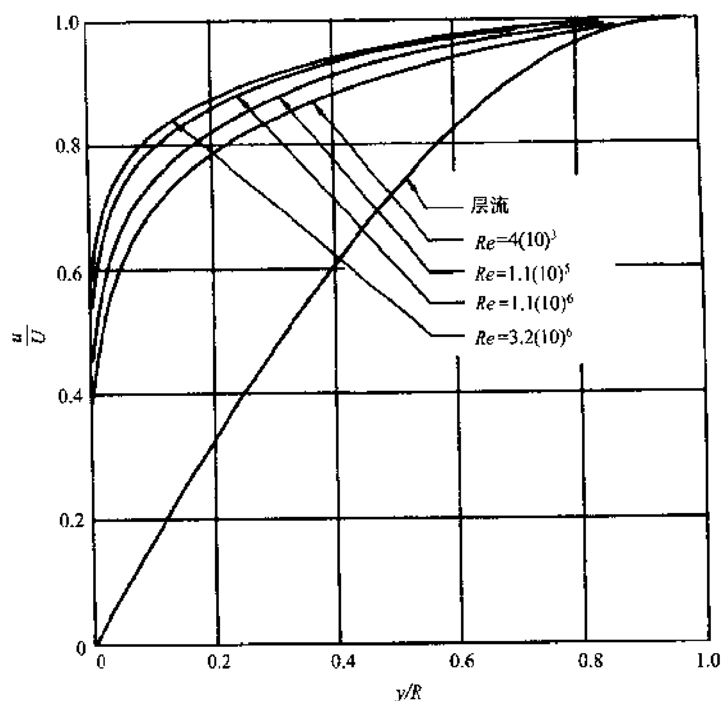


图 5-22　光滑管道内充分发展流动的速度分布

雷诺数在 $4\times10^3 \sim 3\times10^6$ 范围内变化时,指数 $1/n$ 有从 1/6～1/10 的微小变化.

壁面律的对数形式可以用来近似中心线附近区域的速度分布.在那里,我们有

$$u/u_\tau = 2.44\ln(yu_\tau/\nu) + 4.9 \tag{5.47}$$

5.5　黏性流动的热效应

在前面几节中,我们的注意力集中于不可压缩流动.如果是可压缩的,密度应决定于压强和温度,而且必须在满足动量方程和连续方程的同时满足能量方程,使计算大大复杂化.通常,可压缩流动可以近似为等温或等熵流动,使之简化.在随后的几章中将讨论这样的近似.此外,

即使流动是不可压缩的,如果黏度随温度变化显得重要时,温度也要耦合入描述的方程中.

目前,我们将不进一步讨论这些能量和动量方程耦合和必须同时求解的问题.然而,在不可压缩定黏度流动中,一旦速度剖面已知,温度分布可以直接求解,因为速度和压强与温度和能量因素并不耦合.流体中的温度分布常常是需要的,尤其是为了求解流动流体的传热特性.通过确定与自由流温度不同的整个表面边界层内的温度剖面可以求得对流薄膜系数.

作为一个简单例子,我们将求解两个温度保持不同的平面之间的充分发展的(层流)库埃特流动.尽管在许多实际情况中可以加以忽略,在这一问题中将考虑由黏性剪切(黏性耗散)产生的热效应.一些黏性耗散很重要的例子是高度剪切流(如润滑油薄膜),高(亚声)速飞行中的边界层,以及大容积流率的管内流动.在阿拉斯加(有隔热层的)输油管道中油的流动,由于摩擦耗散,油的温度保持高于环境温度.

考虑一个由图5-23所示(没有压强梯度)充分发展的库埃特流动.线性速度剖面直接为

$$\frac{u}{U}=\frac{y}{h}$$

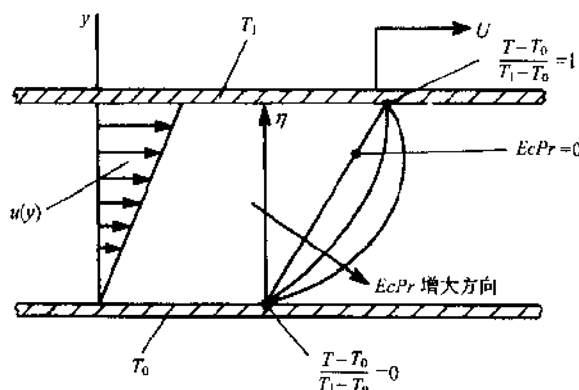


图5-23　库埃特流温度剖面

总的能量方程(5.67)简化为

$$0=\kappa\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\Phi$$

耗散函数简化为$\mu(\partial u/\partial y)^2$,并且$u$仅是$y$的函数.因此,合适的能量方程为

$$0=\kappa\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}y^2}+\mu\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)^2$$

再应用线性速度剖面,我们得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}y^2}=-\frac{\mu}{\kappa}\left(\frac{U}{h}\right)^2 \tag{5.48}$$

边界条件为:$y=0, T=T_0$和$y=h, T=T_1$.由对T直接积分进行求解,并可以方便地写作以下无量纲形式:

$$\frac{T-T_0}{T_1-T_0}=\frac{y}{h}+\frac{\mu U^2}{2\kappa(T_1-T_0)}\left(\frac{y}{h}\right)\left(1-\frac{y}{h}\right) \tag{5.49}$$

温度剖面可以用无量纲数普朗特数和爱克特数进一步进行简化.普朗特数定义为

$$Pr=\frac{\mu c_p}{\kappa}=\frac{\nu}{\alpha}\approx\frac{\mu c_v}{\kappa}$$

式中 α 为热扩散率,$k/\rho c_p$(我们已经对液体应用了 $c_p \approx c_v$).爱克特数,Ec,定义为

$$Ec = \frac{U^2}{c_p(\Delta T)} \approx \frac{U^2}{c_v(\Delta T)}$$

式中 ΔT 为特征温差$(T_1 - T_0)$.方程(5.48)也可以用无量纲形式写作为

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \eta - \frac{1}{2}EcPr\eta(1 - \eta) \tag{5.50}$$

式中 $\eta = y/h$.这一剖面如图 5-23 所示.

乘积 $EcPr$ 是耗散的无量纲度量,如果温度剖面为一直线,这一项可以忽略.

对这一问题,另一个感兴趣的方面是绝热壁面温度.如果上平板是绝热的,下平板维持在 T_0,上平板的温度将热"悬浮",上平板的温度就是绝热壁面温度 T_{ad}.T_{ad} 可以由令向上平板的热通量为零,直接求解所导致的上平板壁面或平板温度得到.根据方程(5.49),我们令 $dT/dy|_{y=h} = 0$,求解所导致的温度 T_1 就是 T_{ad}.结果为

$$T_{ad} - T_0 = \frac{\mu U^2}{2\kappa} \tag{5.51}$$

或借助$(T_{ad} - T_0)$确定的爱克特数,我们惊奇地发现结果为

$$E_{ad}Pr = 2 \tag{5.52}$$

在这里我们将不进一步讨论流体流动的热效应问题,但是黏性耗散产生热的概念在许多流体力学问题中非常重要.

5.6 小结

在这一章中,我们讨论了有摩擦的流动.将流动区分成外流和内流将使得讨论非常方便.外流是关于绕物体的流动,内流是关于管道内的流动.

对外流,我们得到了平板边界层厚度增加的表达式,方程(5.6),和壁面剪应力的表达式,方程(5.7).这些方程是假定了速度分布后,根据控制容积的动量积分方程得到的.

我们提出了具有零压强梯度的绕平板层流流动的布拉修斯速度分布.还讨论了描述湍流速度分布的方法.它们是

$$u/U = (y/\delta)^{m/(2-m)} \quad (\text{幂律}) \tag{5.25}$$

$$u/u_\tau = 2.44\ln(yu_\tau/\nu) + 4.9 \quad (\text{壁面律对数形式}) \tag{5.28}$$

$$(U - u)/u_\tau = -2.44\ln(y/\delta) + 2.5 \quad (\text{速度衰减律对数形式}) \tag{5.29}$$

我们还提出了描述阻力和升力的方法.有两种阻力,一个是表面摩擦阻力,决定于剪应力,另一个是型(压强)阻力,决定于压强分布.

压强阻力受物体后部某一点处可能发生的分离的强烈影响.分离点的位置在很大程度上取决于边界增厚速率,而边界层增厚速率由边界层外自由流压强梯度决定.湍流趋向于推迟分离,因此可以减小压强阻力.

内流通过进口段流动和充分发展的流动来考虑.推导了两平行壁面之间和圆管内充分发展的层流的速度分布.

尽管在特殊情况下测量到更高的数值,正常情况下圆管中从层流向湍流的转变发生在雷诺数为 2300 时.发现充分发展的层流和湍流两者的剪应力是离中心线距离的线性函数.

内流的压强变化通过"压头损失"或"摩擦损失"以高度经验的方式给出.对等直径管道,结果以决定于雷诺数和壁面粗糙度的摩擦因子给出.对其他类型的损失(如弯头,阀门等)以经验损失系数给出.

参考文献

1. Anderson, D. A. Tannehill, J. C., and Pletcher, R. H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corp., 1984.
2. Baker, A. J., *Finite Element Computational Fluid Mechanics*, Hemisphere Publishing Corp., 1983.
3. Batchelor, G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
4. Bird, R. B., Stewart, W. E., and Lightfoot, E. N., *Transport Phenomena*, John Wiley, 1960.
5. Blasius, H., "Grenzschichten in Flussigkeiten mit kleiner Reibung," *Z. Math. u. Phys.*, 56, 1, 1908, English translation NACATM, No. 1256.
6. Clauser, F. H., *The Turbulent Boundary Layer*, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 4, pp. 1—51, Academic Press, 1956.
7. Fletcher, C. A. J., *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Vols. I and II, Springer-Verlag, 1988.
8. Goldstein, S., *Modern Developments in Flvid Dynamics*, Vols. I and II, Oxford University Press, 1938; also Dover Publications.
9. Hoerner, S. F., *Fluid Dynamic Drag*, published by author, Midland Park, New Jersey, 1958.
10. Hughes, W. F., *An Introduction of Viscous Flow*, Hemisphere Publishing Corp., 1979.
11. Klebanoff, P. S., and Diehl, F. W., *Some Features of Artificially Thickened Fully Developed Turbulent Boundary Layers with Zero Pressure Gradient*, NACA Report 1110, 1952.
12. Lai, W. M., Rubin, D., and Krempl, E., *Introduction to Continuum Mechanics*, Pergamon Press, 1974.
13. Li, W. H., and Lam, S. H. *Principles of Fluid Mechanics*, Addison-Wesley, 1964.
14. Nikuradse, J., *Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren*, *Forshungs-Arb. Ing. -Wesen*, 356, 1932.
15. Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, 7th ed., McGraw-Hill, 1986.
16. Shames, I. H., *Mechanics of Fluids*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1992.
17. Shapiro, A. H., *Shape and Flow*, Anchor Books, Doubleday, 1961.
18. Sherman, F. S., *Viscous Flow*, McGraw-Hill, 1990.
19. White, F. M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, 1974.

例　题

5.1　70°F，14.7psi，自由流速度为 50fps 的空气绕一平板流动．求距离平板前缘 5ft 的点处的边界层厚度．

解　在以上三个条件下，空气的运动黏度为 $\nu=1.8\times10^{-4}\text{ft}^2/\text{sec}$．基于平板长度的雷诺数为

$$Re_x = Ux/\nu = 50(5)/(1.8\times10^{-4}) = 1.39\times10^6$$

现在，我们假定边界层内流动为层流，求解边界层厚度．应用方程(5.5)

$$\delta/x = 4.64/\sqrt{Re_x},\quad \delta/5 = 4.64/(1.39\times10^6)^{1/2},\quad \delta = 0.0197\text{ft} = 0.236\text{in}$$

如果我们假定从前缘开始边界层内流动为湍流，

$$\delta/x = 0.376/(Re_x)^{1/5},\quad \delta/5 = 0.376/(13.9\times10^5)^{.15},\quad \delta = 0.111\text{ft} = 1.33\text{in}$$

我们可以看出，边界层内是层流还是湍流其结果有很大差别．但是，这两个结果都不准确，因为在整个平板长度内边界层内既不是完全层流又不是完全湍流．实验已经得到从层流向湍流转捩所需长度，并且转捩发生在 Re 近似为 2.3×10^3 处．因此，对于这一问题的转捩长度 X_T 为

$$X_T = (\nu/U)Re_x = [(1.8\times10^{-4})/50](3.2\times10^5) = 1.15(\text{ft})$$

所以，假定边界层为湍流的答案更接近于正确值．

5.2　考虑边界层部分为层流及其余部分为湍流，求解习题 5.1．

解　在转捩点，边界层厚度为

$$\delta_{转捩} = \frac{1.15(4.64)}{[3.2 \times 10^5]^{1/2}} = 0.00944(\text{ft}) = 0.113(\text{in})$$

湍流边界层从这一点开始.如果从前缘到这一点的边界层是湍流,边界层增厚至此值所要求的长度 X 应为

$$\frac{\delta}{X} = \frac{0.376}{(UX/\nu)^{1/5}} \text{ 或 } X^{4/5} = \frac{\delta(U/\nu)^{1/5}}{0.376}$$

所以

$$X = \left(\frac{\delta}{0.376}\right)^{5/4}\left(\frac{U}{\nu}\right)^{1/4} = \left(\frac{0.944 \times 10^{-2}}{0.376}\right)^{5/4}\left(\frac{50}{1.8 \times 10^{-4}}\right)^{1/4} = 0.230(\text{ft})$$

这意味着当量湍流边界层总长度为

$$X = (5.0 - 1.15) + 0.23 = 4.08(\text{ft})$$

以及

$$\delta = \frac{4.08(0.376)}{[50(4.08)/(1.8 \times 10^{-4})]^{1/5}} = \frac{1.53}{[11.3 \times 10^5]^{1/5}} = 0.0942(\text{ft}) = 1.13(\text{in})$$

5.3 求习题 5.1 的总阻力.

解 ☞ 假定边界层内为层流,根据方程(5.6)我们有

$$\tau_0 = \frac{0.323\rho U^2}{(U/\nu)^{1/2} x^{1/2}} = \frac{0.323(0.00237)(50)^2 x^{-1/2}}{[50/(1.8 \times 10^{-4})]^{1/2}} = (3.62 \times 10^{-3})x^{-1/2}$$

阻力为

$$D = \int_A \tau_0 \mathrm{d}A = W\int_0^5 \tau_0 \mathrm{d}x$$

所以

$$\frac{D}{W} = 3.62 \times 10^{-3}\int_0^5 x^{-1/2}\mathrm{d}x = 0.0163\text{lbf/ft}$$

假定流动是湍流

$$\tau_0 = \frac{0.0286\rho U^2}{(U/\nu)^{1/5} x^{1/5}} = \frac{0.0286(0.00237)(50)^2 x^{-1/5}}{[50/(1.8 \times 10^{-4})]^{1/5}} = 0.0139x^{-1/5}$$

以及

$$\frac{D}{W} = 0.0139\int_0^5 x^{-1/5}\mathrm{d}x = 0.0627\text{lbf/ft}$$

5.4 如果不是绕平板而是绕图 5-24 所示的弯曲板,习题 5.1 中的边界层将受何影响?

解 ☞ 沿板的上表面应该有一个逆向压强梯度.这意味着边界层将比零压强梯度的平板增厚的更快.沿下表面则相反,在这里,有一个使边界层增厚较慢的压强梯度.于是

$$\delta_{顶} > \delta_{平板} = 1.13\text{in}$$

$$\delta_{底} < \delta_{平板} = 1.13\text{in}$$

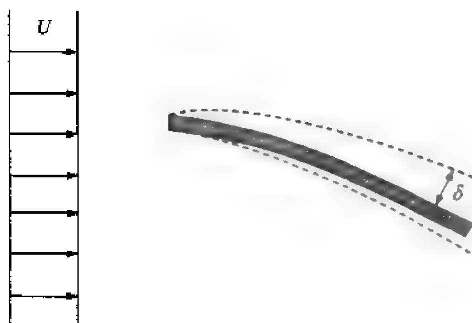


图 5-24

5.5 求由速度为 80mph 的风施加在 10ft×40ft 广告牌上的总力.风向垂直于广告牌.

解 ☞ 假定空气处于标准状态,$\mu = 1.8 \times 10^{-4}\text{ft}^2/\text{sec}$ 和 $\rho = 0.00237\text{slug/ft}^3$,因此

$$Re = UW/\nu = 117(10)/(1.8 \times 10^{-4}) = 6.50 \times 10^6$$

式中 W 为广告牌的宽度 = 10ft,以及空气的速度 = 80mph = 117ft/sec.由表 5.1,我们找到 $C_D = 1.2$,方程(5.36)给出

$$D = C_D(\frac{1}{2}\rho U^2)A = 1.2\left(\frac{1}{2}\right)(0.00237)(117)^2(400) = 7850(\text{lbf})$$

5.6 推导长度为 L 的圆管中雷诺数小于 2000 时充分发展流动的摩擦因子的表达式.

解 对层流,速度分布由方程(5.39)给出,为

$$u = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}(r^2 - R^2)$$

容积流率 Q 为

$$Q = \int u dA = \int_0^R 2\pi u r dr$$

积分得

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{dp}{dx}$$

如果 V_{av}为平均速度

$$V_{av} = \frac{Q}{A} - \frac{Q}{\pi R^2} = -\frac{R^2}{8\mu}\frac{dp}{dx}$$

因此

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{L} = -\frac{8\mu V_{av}}{R^2}$$

根据方程(5.43),我们有

$$f = \frac{\Delta p}{L}\frac{4R}{\rho V_{av}^2}$$

所以

$$f = \frac{8\mu V_{av}}{R^2}\frac{4R}{\rho R V_{av}^2} = \frac{32\mu}{\rho R V_{av}} = \frac{64}{(\rho V_{av} D/\mu)} = \frac{64}{Re}$$

5.7 雷诺数为 1000,70℉和 14.7psi 的空气以均匀流速流入一直径为 1.0in 的管道(图5-25).求空气从进口流至进口下游 100in 处的压强降.进口段长度 L_e 为 $L_e/D = 0.0288Re$.

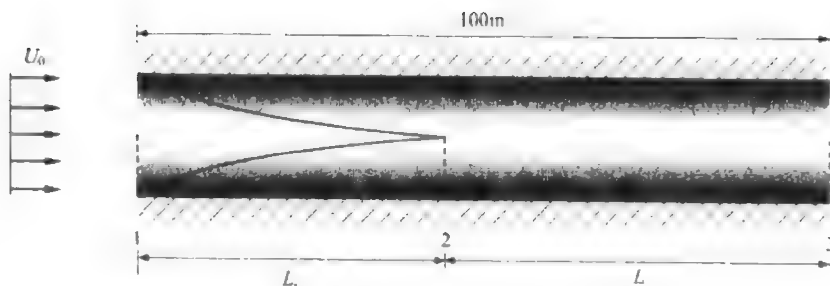


图 5-25

解 对给定条件下的空气,$\mu = 1.8 \times 10^{-4}\,\text{ft}^2/\text{sec}$,$\rho = 0.00237\text{slug/ft}^3$.进口段长度 L_e 为

$$L_e = 0.030(1000)(1.0) = 30(\text{in})$$

在进口处的均匀流速为

$$U_0 = 1000\nu/D = 1000(1.8 \times 10^{-4})(1.0/12) = 2.16(\text{ft/sec})$$

由习题 5.6 我们看出,平均流速为

$$U_0 = V_{av} = -\frac{R^2}{8\mu}\frac{dp}{dx}$$

以及对于充分发展的流动,最大流速($r=0$处)为

$$U_{max}=-\frac{R^2}{4\mu}\frac{dp}{dx}$$

因此

$$U_{max}=2U_0=2(2.16)=4.32(\text{ft/sec})$$

我们注意到:沿中心线从截面1至截面2的流动是无摩擦流动.因此,我们可以应用伯努利方程确定这两点之间的压强差为

$$p_1-p_2=\frac{1}{2}\rho(U_{max}^2-U_1^2)=\frac{1}{2}(0.00237)[(4.32)^2-(2.16)^2]=0.0166(\text{lbf/ft}^2)$$

由习题5.6,我们有(在点2和点3之间)

$$p_2-p_3=\Delta p=\frac{8\mu U_1L}{R^2}=\frac{8(1.8\times10^{-4})(0.00237)(2.16)(70/12)}{(0.5/12)^2}=0.0250(\text{lbf/ft}^2)$$

所以总压强降为

$$p_1-p_3=(p_1-p_2)+(p_2-p_3)=0.0166+0.0250=0.0416(\text{lbf/ft}^2)$$

5.8 求图5-26所示系统的容积流率.流体为水,管道水力学光滑.忽略除流过管道外的所有损失.

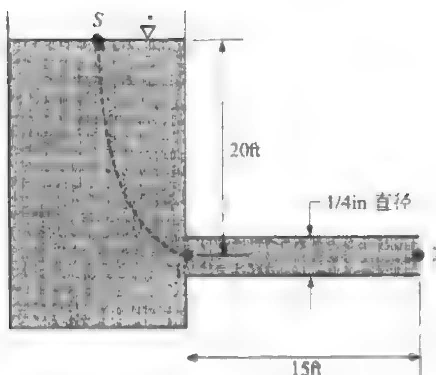


图 5-26

解 首先我们写出点1和点2之间的能量方程(5.42)

$$V_1^2/2g+p_1/\rho g+z_1=V_2^2/2g+p_2/\rho g+z_2+H_L$$

式中

$$H_L=f(L/D)(V^2/2g)$$

因为$V_1=V_2$和$z_1=z_2$,我们有

$$(p_1-p_2)/\rho g=f(L/D)(V^2/2g)=H_L$$

下一步,我们写出自由表面和点1之间沿图示虚线的伯努利方程

$$p_s/\rho g+V_s^2/2g+z_s=p_1/\rho g+V_1^2/2g+z_1$$

我们还注意到$p_2=p_{atm}=p_s$.因此,我们可以合并这两个方程,得到

$$f(L/D)(V_1^2/2g)=H_L=(z_s-z_1)-V_1^2/2g$$

$$V_1^2=\frac{2g(z_s-z_1)}{f(L/D)+1}=\frac{64.4(20)}{f[15(1/48)]+1}=\frac{1290}{f(720)+1}$$

摩擦因子取决于雷诺数,雷诺数又取决于流速.因此,我们必须用试凑法解这一问题.雷诺数由下式给出

$$Re=V\cdot D/\nu=V_1(1/48)/(1\times10^{-5})=2080V_1$$

下表表示试凑法的求解过程.我们先假定一个V_1,然后计算V_1.

V(假定值)	Re	f	V(计算值)
10	$2.08(10)^4$	0.026	8.10
7	$1.46(10)^4$	0.028	7.70
7.9	$1.64(10)^4$	0.0272	7.92

因此,$V_1=7.92$ft/sec以及$Q=AV=AV_1=\frac{1}{4}\pi(1/48)^2(7.92)=0.00270(\text{ft}^3/\text{sec})$.

5.9 求图5-27所示系统的容积流率.流体为水,管道水力学光滑.首先忽略次要损失求容积流率,然后求包括次要损失时的容积流率.

解　首先我们写出点 1 和点 2 之间的伯努利方程

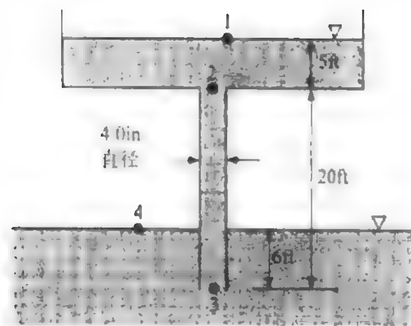


图 5-27

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{\rho g}+z_2$$

或

$$\frac{p_2-p_1}{\rho g}=(z_1-z_2)-\frac{V_2^2}{2g} \tag{a}$$

点 3 和点 4 之间的伯努利方程给出

$$\frac{p_3}{\rho g}+\frac{V_3^2}{2g}+z_3=\frac{p_4}{\rho g}+\frac{V_4^2}{2g}+z_4$$

或

$$\frac{p_3-p_4}{\rho g}=(z_4-z_3)-\frac{V_3^2}{2g} \tag{b}$$

下一步，我们写出发生压头损失的点 2 和点 3 之间的能量方程

$$\frac{p_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2=\frac{p_3}{\rho g}+\frac{V_3^2}{2g}+z_3+H_L$$

它可改写成

$$\frac{p_2-p_3}{\rho g}=(z_3-z_2)+\frac{fL}{D}\frac{V^2}{2g} \tag{c}$$

式中 $V_2=V_3=V$ 以及 $p_1=p_4=p_{atm}$. 合并方程(a)和(b)得到

$$\frac{p_2-p_3}{\rho g}=(z_1-z_2)-(z_4-z_3)$$

现在将这一方程与方程(c)合并得到

$$(z_3-z_2)+\frac{fL}{D}\frac{V^2}{2g}=(z_1-z_2)-(z_4-z_3)$$

因此

$$V^2=\frac{2g(z_1-z_4)}{fL/D}=\frac{64.4(19)}{f\left(20/\frac{1}{3}\right)}=\frac{20.4}{f}$$

因为 f 和 V 两者均为未知数，我们必须连同摩擦因子图一起求解. $Re=VD/\nu=3.33(10)^4\,V$. 应用上一个例题的方法：

V(假定值)	Re	f	V(计算值)
10	$3.33(10)^5$	0.0143	37.9
40	$1.33(10)^6$	0.0114	42.3
43	$1.43(10)^6$	0.0112	43.0

我们得到忽略次要损失时的解 $V=43.0\text{ft/sec}$ 及 $Q=\frac{1}{4}\pi D^2V=3.75\text{ft}^3/\text{sec}$. 对于直管道，次要损失应该发生在直管道的进口和出口. 如前面例题中伯努利方程指出的，这应对压强变化产生影响. 我们可以用方程(c)来考虑这些影响如下：

$$\frac{p_2-p_3}{\rho g}=(z_3-z_2)+\frac{fL}{D}\frac{V^2}{2g}+K_1\frac{V^2}{2g}+K_2\frac{V^2}{2g}$$

并如前一样与方程(a)和(b)合并，得到

$$\frac{fL}{D}\frac{V^2}{2g}+K_1\frac{V^2}{2g}+K_2\frac{V^2}{2g}=z_1-z_4$$

或

$$V^2=\frac{2g(z_1-z_4)}{fL/D+K_1+K_2}=\frac{64.4(19)}{f\left(20/\frac{1}{3}\right)+0.5+1.0}=\frac{1220}{f(60)+1.5}$$

式中 K_1 为进口损失系数 = 0.50，和 K_2 为出口损失系数 = 1.0，都由表 5.2 查得．因此，与前相同，我们用试凑法求 f 和 V.

V(假定值)	Re	f	V(计算值)
10	$3.33(10)^5$	0.0143	22.8
24	$8.0(10)^5$	0.0122	23.4
23.3	$7.76(10)^5$	0.0122	23.4

最后我们求得 $V=23.4\text{ft/sec}$ 和 $Q=\frac{1}{4}\pi D^2V=\frac{1}{4}(4/12)^2(23.4)=2.04(\text{ft}^3/\text{sec})$.

5.10 如图 5-28 所示，水从一大容器中经由管道流至大气中．求容积流率．

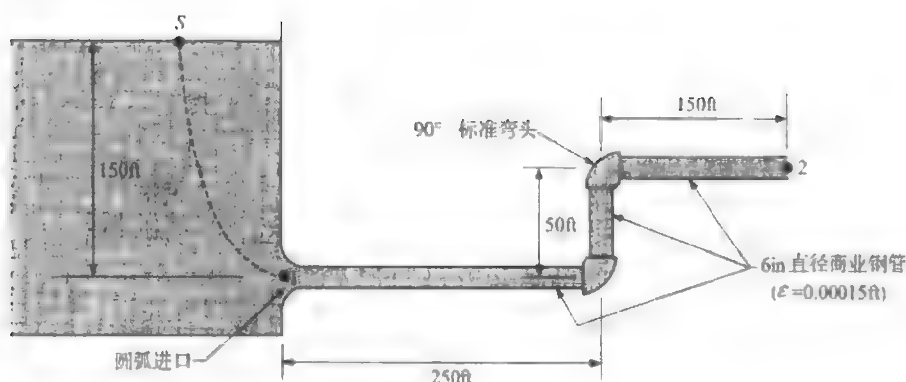


图 5-28

解 首先，写出水的上表面和管道进口之间的伯努利方程．根据连续方程．

$$V_1=V_2=V.$$

$$\frac{p_1-p_s}{\rho g}=(z_s-z_1)-\frac{V_1^2}{2g}$$

下一步，写出截面 1 和截面 2 之间的能量方程

$$\frac{p_1-p_2}{\rho g}=(z_2-z_1)+\frac{fL}{D}\frac{V^2}{2g}+K_1\frac{V^2}{2g}+2K_2\frac{V^2}{2g}$$

式中 K_1 为圆弧形进口的损失系数 = 0.25，K_2 为弯头的损失系数 = 0.90．合并上两个方程给出

$$(fL/D+K_1+2K_2+1)\frac{V^2}{2g}=(z_s-z_2)$$

或

$$V^2=\frac{2g(z_s-z_2)}{fL/D+K_1+2K_2+1}=\frac{64.4(100)}{f\left(450/\frac{1}{2}\right)+0.25+2(0.90)+1}=\frac{6440}{f(900)+3.05}$$

因为 f 和 V 两者均为未知数，为得到解，求解时我们必须连同摩擦因子图一起进行．Re 为

$$Re=VD/\nu=V\left(\frac{1}{2}\right)/(1\times10^{-5})=(5\times10^4)V \text{ 和 } \epsilon/D=0.00015\Big/\frac{1}{2}=0.00030$$

我们求得 $V=390\text{ft/sec}$ 和 $Q=AV=\frac{1}{4}\pi D^2V=\frac{1}{4}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2(390)=76.6(\text{ft}^3/\text{sec})$.

5.11 讨论如图 5-29 示两平行平板之间充分发展的黏性层流，其中平板之一处于运动之中．这样的流动称为库爱特流．上平板相对于下平板的速度为 U．流动区域进口压强为 p_2，

出口压强为 p_1.

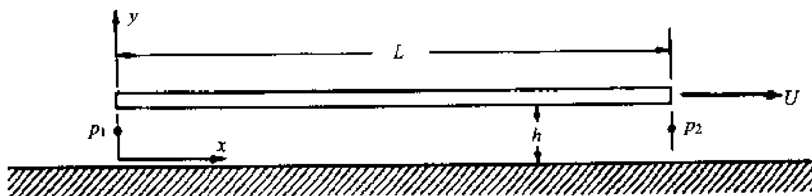


图 5-29

解 我们假定上平板的长度为 L,且比两板之间间距 h 大很多,因此进口或流动发展的影响可以忽略.因而流动基本上是一维的,流动截面上速度仅在 y 方向有变化.坐标系附着在上平板上,因此是运动的.假定平板在 z 方向上非常长,所以在 z 方向上的流动可以忽略.假定为不可压缩流动,运动方程可以直接从运动方程的一般形式(纳维-斯托克斯方程)或者可以取流体的一个微元体并写出其动量平衡得到.动量方程变为

$$0=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad 0=-\frac{\partial p}{\partial y}$$

式中 μ 为流体的绝对黏度,以及 u 和 v 分别为相对于上平板的速度在 x 和 y 方向上的分量.坐标系附着在上平板上并随上平板一起运动,但是为方便起见,使原点与下平板对齐.因此,相对于上平板和坐标系下平板的速度为 $-U$.

因为在 x 方向速度没有变化,连续方程 $\partial u/\partial x+\partial v/\partial y=0$ 告诉我们,速度在 y 方向上的分量 v 必须为零,并且压强必定仅是 x 的函数.用边界条件:$y=0, u=-U; y=h, u=0$ 对运动方程积分,得到

$$u=\frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(y^2-hy)+U[(y/h)-1]$$

因为压强 p 仅是 x 的函数,以及 u 仅是 y 的函数,可以求得总流率 $Q=\int_0^h u\mathrm{d}y$ 和压强降为

$$Q=-\frac{h^3}{12\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-\frac{Uh}{2},\quad p_2-p_1=\frac{12L\mu}{h^3}\left(\frac{Uh}{2}+Q\right)$$

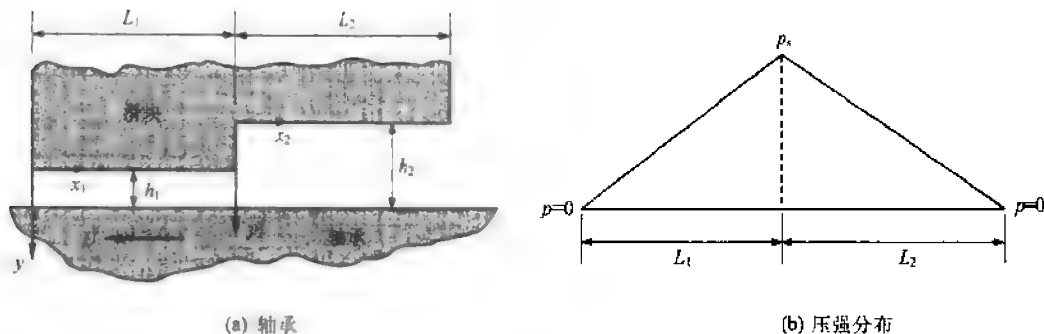
以上方程告诉我们,压强梯度为常数,压强降与容积流率 Q 有关,因为我们的坐标系附着在上平板上,Q 是相对于上平板的容积流率.正的流率表示在正 x 方向上的流率.如果压强梯度为零,速度剖面是线性的,为简单的剪切流.

我们还可以仍将坐标原点取在上平板上但 y 的方向朝下.此时微分方程相同,但边界条件应该为:$y=0, u=0; y=h, u=-U$.速度同样相对于上平板并可以发现 Q 与上相同.

5.12 轴承的润滑是一个流体力学问题.滑块和轴承之间的润滑油或润滑剂是黏性流体,压强分布,承载能力,摩擦等等可以由研究润滑剂的层流黏性流动来确定.多数轴承运行在雷诺数很小的层流区.轴承和滑块之间的间隙(流动空间)比滑块的长度小很多,因此在大部分间隙内的流动是充分发展的层流.因为雷诺数很小,流体的惯性与压强和黏性力相比可以忽略.润滑问题的处理类似于习题 5.11 的库爱特流动.

考虑一个图 5-30 所示的台阶式止推轴承.间隙 h_1 和 h_2 比 L_1 和 L_2 小很多.假定轴承的厚度非常大以至于在 z 方向上的泄漏可以忽略.对于滑块的滑移速度为 U 的轴承和黏度为 μ 的流体,求轴承内的压强分布.

解 长度分别为 L_1 和 L_2 的滑块的每一段可以处理为库爱特流动.我们将坐标系附着在滑块上,并令静止的轴承在 $-x$ 方向上相对于滑块以速度 U 运动.因此,对每一段,在 $y=0$ 处,$u=0$ 以及在 $y=h$ 处,$u=-U$.在进口 $x_2=L_2$ 处的表压强和在出口 $x_1=0$ 处的表压强为零.在台阶 $x_1=L_1$ 处或 $x_2=0$ 处的压强为未知数,必须用连续性条件,$Q_1=Q_2$ 求得.如果我们应用以上习题导出的



(a) 轴承　　(b) 压强分布

图 5-30

表达式,我们有

$$Q_1 = -\frac{h_1^3}{12\mu}\frac{p_s}{L_1} - \frac{Uh_1}{2} = Q_2 = \frac{h_2^3}{12\mu}\frac{p_s}{L_2} - \frac{Uh_2}{2}$$

每一段的压强随 x 线性变化,压强分布形成如图所示的三角形.尖峰压强由 $Q_1 = Q_2$ 得到.结果是

$$p_s = \frac{6\mu U(h_2 - h_1)}{(h_1^3/L_1) + (h_2^3/L_2)}$$

它完全确定了压强是 x 的函数.总承载能力直接是压强分布曲线下的面积.z 方向上单位宽度的承载能力 W 为

$$W = (p_s/2)(L_1 + L_2)$$

从物理上讲,如果载荷变化,间隙 h_1 和 h_2 也要变化.当载荷减小或增大时,滑块就分别提升或下降.

一旦知道整个流体薄膜内的速度,摩擦可以由沿轴承或滑块积分剪应力求得.做这一计算作为练习.你将求得沿上和下表面的剪应力并不相等,但是如果对台阶的压强力被包括在上板或滑块表面的摩擦计算之内,两个计算结果应该相等.

5.13 图 5-31 表示的是一个水静力学推力轴承.两个(半径为 b 的)圆盘之间的间隙为 h(实践中 h 的量级为 0.001～0.010in),直径可以为若干 in.加压的液体润滑剂通过直径为 a 的油杯或凹槽供应到转子,油杯或凹槽处压强维持在高压 p_0.上盘以转速 ω 转动,承受的载荷为 W.两盘间的润滑剂可以径向泄漏到 p_b 处.求润滑剂内的压强分布和承载能力 W.

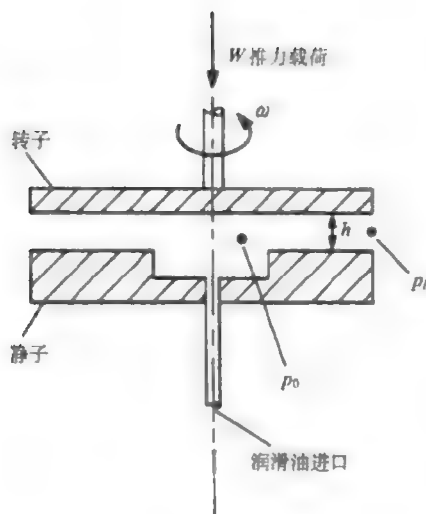


图 5-31

解 因为 $h \ll b$,我们可以假定雷诺数 $Re \ll 1$ 并忽略动量方程的惯性项.径向动量方程变为

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

切向动量方程为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

边界条件为:$y=0,h,u=0$ 及 $y=0,v=0$;$y=h,v=r\omega$.直接积分得到

$$v = r\omega\left(\frac{z}{h}\right)$$

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}(z^2 - hz)$$

容积流率 Q 为

$$Q = \int_0^h 2\pi ru\mathrm{d}z = -\frac{\pi rh^3}{6\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$$

它是一个一阶方程,可以用两个边界条件:$r=a, p=p_0$ 和 $r=b, p=p_b$ 对 $p(r)$和 Q 进行积分.

$$Q = \frac{\pi h^3(p_0 - p_b)}{6\mu\ln(b/a)}, \quad \frac{p_0 - p}{p_0 - p_b} = \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}$$

总载荷 W 为

$$W = (p_0 - p_b)\pi a^2 + \int_a^b (p - p_b)2\pi r\mathrm{d}r = \frac{\pi(b^2 - a^2)(p_0 - p_b)}{2\ln(b/a)}$$

5.14 两个扁平圆盘浸没在一浅油池中(图 5-32).它们之间保持一定距离 $h, h \ll a$.突然圆盘被以恒定速度 V 推开.加速时间与感兴趣的时间相比很短,并且我们假定速度很快达到 V.假定速度足够慢以及 h 小得足以忽略惯性作用,并且圆盘间的径向流动与习题 5.13 类似.求如果超过它就出现空化的临界速度 V.

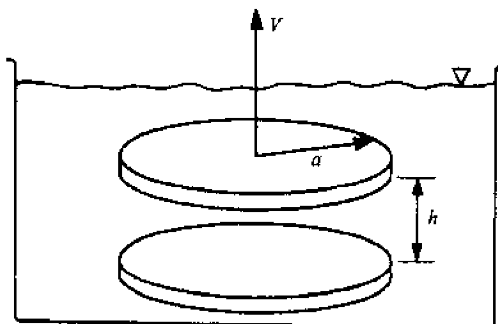


图 5-32

解 ☞　参照题 5.13,径向速度剖面为

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}(z^2 - hz)$$

考虑圆盘之间半径为 r 的恒定容积圆柱.对圆柱应用连续方程得到

$$\int_0^h 2\pi ru\mathrm{d}z = -\pi r^2 V - \frac{\pi rh^3}{6\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \pi r^2 V$$

用边界条件:$r=a. p=p_0$, p_0 为圆盘边缘处的正水静力学压强,积分得到

$$p = p_0 - \frac{3\mu V}{h^3}(a^2 - r^2)$$

最低压强出现在 $r=0$ 处.

$$p = p_0 - \frac{3\mu Va^2}{h^3}$$

并且如果空化发生在接近于零绝对大气压(或更为严格地说在比大气压小很多的液体蒸汽压)时,临界 V 值 V_{cr} 为

$$V_{cr} = \frac{p_0 h^3}{3\mu a^2}$$

如果超过它就出现空化.

补　充　习　题

5.15 求 70℉,14.7psi,自由流速度为 60fps 的空气绕平板流动时离平板前缘 10ft 处的边界层厚度.假定为层

流流动.

5.16 在习题 5.15 条件下求离前缘 10ft 处的剪应力.

5.17 如果平板的宽度为 3.0ft,求习题 5.15 的总阻力和阻力系数.

5.18 假定边界层为湍流,求解习题 5.15.

5.19 假定边界层为湍流,求解习题 5.16.

5.20 假定边界层为湍流,求解习题 5.17.

5.21 推导绕平板流动的阻力系数表达式.将结果以基于平板长度的雷诺数表示.

5.22 一个很好固定在牵引车上的直径为 5ft ,长度为 30ft 的薄壁管形牵引装置以 60mph 的速度前进.求单根牵引管为克服阻力所要求的功率(hp).

5.23 求习题 5.22 中空气离开牵引管那一点处的边界层厚度.

5.24 空气在图 5-33 所示的平行壁面之间流动 在进口(截面 1)处和核心区速度 V_1 均匀并等于 100fps.在下游 900in 处,整个间隙内速度发生变化.边界层内速度按 $V=V_C(y/\delta)^{.17}$ 变化,其中 $\delta=0.1\sqrt{x}$,δ 和 x 以 in 为单位.求 $0\leqslant x\leqslant 900$in 范围内对称轴上的加速度.并计算在 $x=100$in 处的加速度.

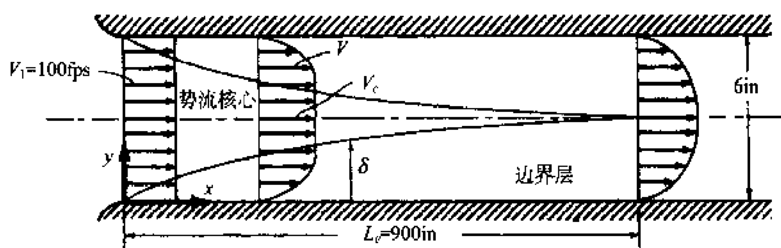


图 5-33

5.25 假定有一个由

$$u=Uy/\delta,\qquad 0\leqslant y\leqslant\delta$$
$$u=U,\qquad y>\delta$$

给出的绕平板的层流流动,其中 $\delta=0.1\sqrt{x}$,x 为离平板前缘的距离,y 为垂直方向上离平板的距离.所有量纲为英尺.如果平板宽度为 1 ft 和长度为 25ft,求阻力.

5.26 如图 5-34 所示空气在平行平板之间流动.在进口速度是均匀的,其值为 10fps.边界层厚度为 $\delta=0.1\sqrt{x}$.平板宽度 W 比平板之间的间距 h 大很多,所以可以忽略端部作用.边界层速度分布由 $u/U=(y/\delta)^{1/2}$ 给出,其中 U 为核心区速度,y 为离任一平板表面计量的坐标.求在离进口 25ft 的点上的压强.δ 和 x 均以 ft 为单位.

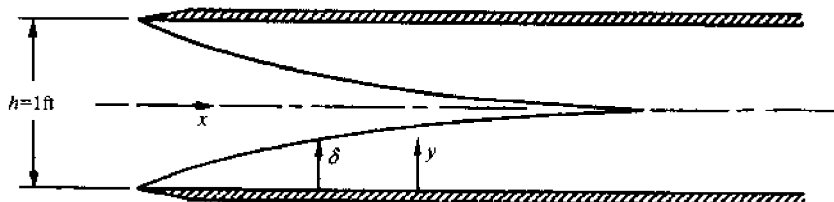


图 5-34

5.27 在习题 5.26 中,求两倍于流动充分发展所要求的距离处的压强.

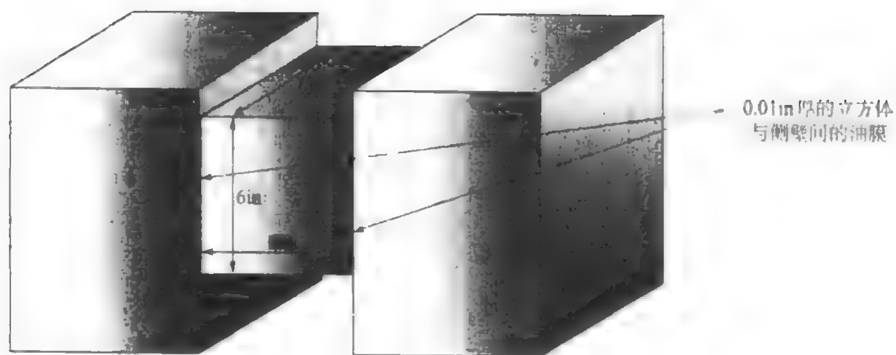
5.28 在习题 5.26 中,求进口与流动变为充分发展位置之间流体对壁面所施加的总力.

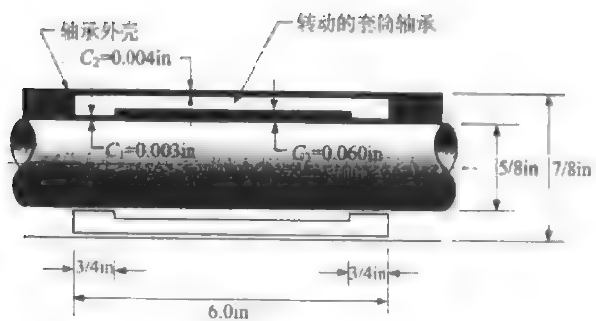
5.29 对管道而不是平行平板求解习题 5.26.

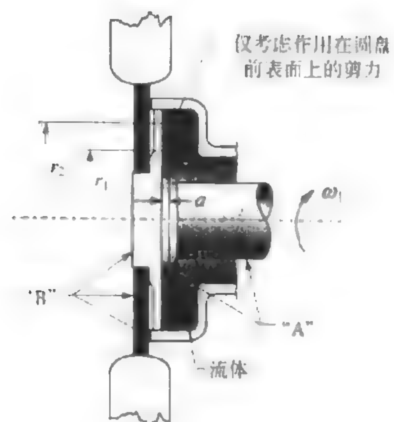
5.30 对管道面不是平行平板求解习题 5.28.

5.31 前面已经指出:初始速度相同时,表面粗糙的小球比表面光滑的小球飞行得更远.试解释之.

5.32 求一个能飞行 250 码距离的高尔夫球的初始速度的近似值.假定球下落至地面时的速度为 20fps.


0.01in 厚的立方体
与侧壁间的油膜
6in


轴承外壳
转动的套筒轴承
C_2=0.004in
C_1=0.003in
C_3=0.060in
5/8in
7/8in
3/4in
3/4in
6.0in


仅考虑作用在圆盘
前表面上的剪力
r_2
r_1
a
ω_1
"B"
"A"
流体

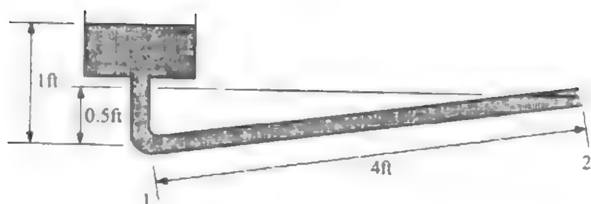

1ft
0.5ft
4ft
1
2

图 5-38

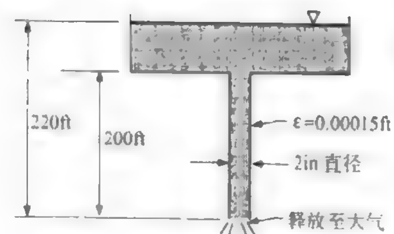

220ft
200ft
ε=0.00015ft
2in 直径
释放至大气

图 5-39

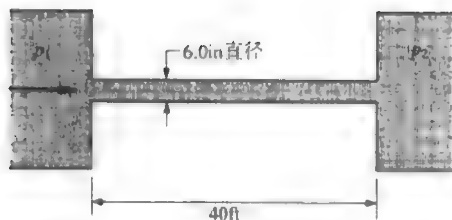


图 5-40

5.40 计算图 5-39 所示管道内 70°F 水的平均速流.

5.41 求习题 5.40 中水达到最大流率的管道长度.

5.42 两个水箱通过一根 100ft 长.直径为 2in 的光滑管道相连.当高度差为 25ft 时水的流率为多少?

5.43 如图 5-40 所示,空气以 100fps 的平均速度在两个强制通风室之间的 6in 光滑管道内流动.空气温度为 70°F.假定没有次要损失,求压强差,$p_1 - p_2$.

5.44 如果包括次要损失,求习题 5.43 中的压强差.

5.45 洗相用的直壁玻璃开口容器的一侧有一个将水吸出的虹吸管.操作步骤如下.参照图 5-41,将水注入容器直至容器中的水位达到虹吸管顶端后关闭进水阀;然后将水由虹吸管吸出直至水位达到容器内虹吸管的下端;然后再将新鲜的水注入容器,开始循环操作.将水吸出容器循环需要多长时间?

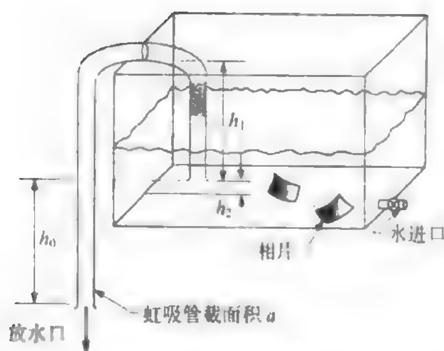


图 5-41

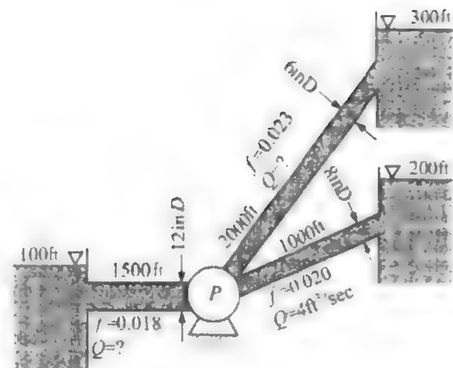


图 5-42

5.46 水在图 5-42 所示的管道内流动.当在 8in 管道内以 $4.0\text{ft}^3/\text{sec}$ 的流率将水泵至两个高位容器中的下容器时,计算其他管道中的流率和所需要的泵功率.摩擦因子,管道长度和容器高度如图所示.

5.47 200in 的高山派罗玛望远镜安装在一个允许将棱镜聚焦于所希望看到的星座或星云的卡箍结构镜架上.如果星座的轨道已知,卡箍可以预先设置得使望远镜跟踪该星座.

由于支撑框架和卡箍的结构异常重,轴承设计极为重要.望远镜的总重超过 1 000 000lb.这一重量由两组位于土转动框架南北两端的轴承支撑.半圆马鞍形卡箍由四个减震静力轴承支撑.每个减震器的负荷在零速度下为 164 000lb.因此,润滑油必须加压强制进入减震器.

图 5-43 和 5-44 表示的是卡箍和减震器的细节.每个减震器为 28in 见方,并有四个 7in 见方的深凹

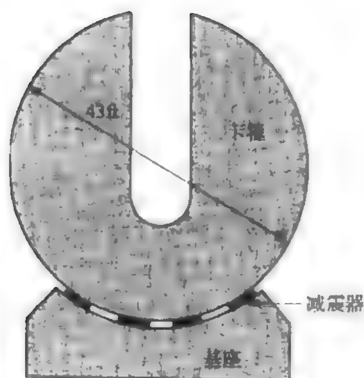


图 5-43

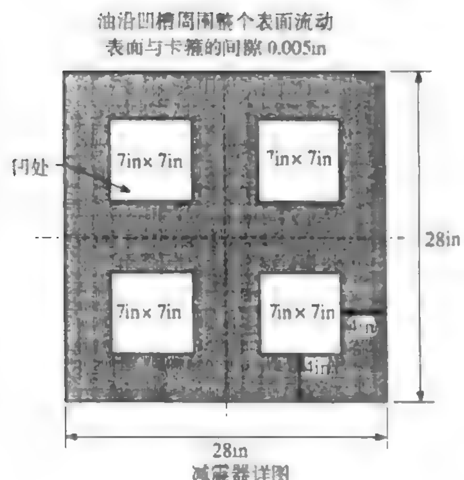


图 5-44

槽.加压润滑油通过细管道输入这些凹槽的中心,每个凹槽上方进口阀门处的压强维持恒定值.因此,润滑油通过减震器和卡箍表面之间的狭小间隙缓慢地流动,然后流出至压强为大气压的容器中,再通过泵进行循环.假定间隙中润滑油膜厚度为0.005in,求以下量:

1. 所需润滑油容积流率
2. 润滑油进口压强
3. 油泵的容量
4. 卡箍和轴承之间的摩擦系数
5. 为达到跟踪目的驱动卡箍以每24小时转一圈的速率转动所需要的电动机容量.

假定油为SAE20润滑油,其比重约为0.8,黏度约为3.85×10^{-6}lb-sec/in^2.

5.48 图5-45所示的水力学减震器或缓冲器由一内径为D_C的外圆筒(汽缸)和其内的一个直径为D(几乎等于D_C)的实心圆柱体(活塞)组成.除有一个允许轴穿过并连接到内实心圆柱体或活塞的小孔外,外筒的两个端面完全密封.汽缸内充满油,轴和汽缸之间密封以至于没有油外泄.将汽缸牢牢地紧固在基座上,轴紧固在需要减震的机械装置上.根据这一原理汽车的撞击可以被吸收.

汽缸和活塞筒之间的微小间隙阻止了油在活塞两侧之间串流,因此活塞只能非常缓慢地运动.当活塞运动时,油必须绕活塞通过微小间隙产生的通道流动.

求减震器的阻力(作为有关参数和活塞运动速度的函数).

提示:忽略间隙中流体的惯性,将这一区域内的流动处理为润滑油膜.活塞两侧之间的压强差决定这两个区域之间的流动.作用在活塞上的力是压强力和黏性剪切力之和.

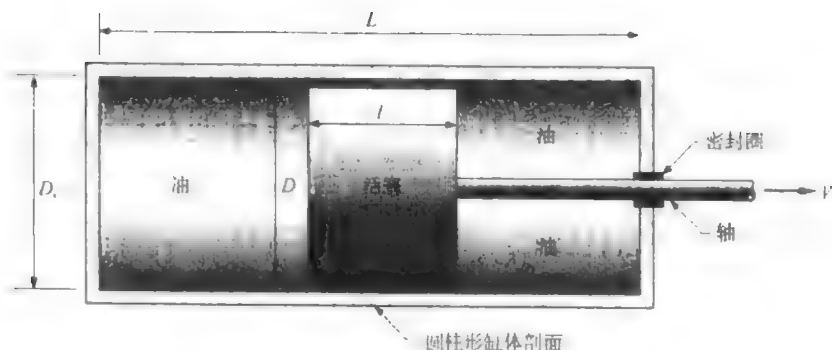


图5-45

5.49 以空气作为润滑剂重做习题5.13.假定温度为常数(等温流动)以及空气为理想气体,$p=\rho RT$,其中R为气体常数和T为绝对温度.

答案: $\dfrac{p_0^2-p^2}{p_0^2-p_b^2}=\dfrac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}$

5.50 图5-46表示的是一个具有局部台阶的轴颈轴承,它被建议用作为实际负荷支撑装置.轴承非常长,为覆盖180°的圆弧,并在中点或90°处有一个台阶.在运行时,轴颈水平,因此它的中心线与两轴承圆弧的中心线一致.如果进出口压强均为大气压强,求负荷W及其方向.流动为层流,并假定整个流动为没有进出口损失,充分发展的层流.

5.51 在上一习题中求作用在轴颈上的摩擦力矩.作用在台阶静子上的摩擦力矩是否与之(在数量上)相等并方向相反?如果不是,为什么?提示:考虑作用在台阶上的压强.

5.52 包括管道摩擦重做习题3.16.假定$D=16$in,$h=120$ft,管道长度为100ft,并且为光滑管道.(池很深以至于$L<h$)提示:假定一个流率,

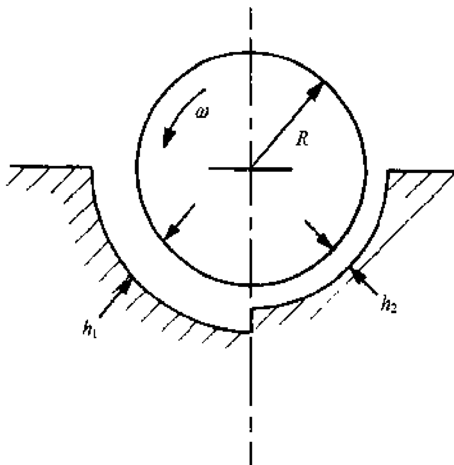


图5-46

求涡轮的输出功率并绘制功率与容积流率之间的曲线.如果 $Q=0$,有一个最大力矩,但是涡轮没有转速,输出功率等于零.在最大转速时,力矩为零,流体自由流动,但是输出功率为零.构筑功率输出与容积流率之间的曲线,并求最大功率的数值.

答案:51hp

5.53 一额定效率为80%,功率为1/2hp的潜水泵被用来将水从一深井泵至一贮水箱(见图5-47).井内水面低于地平面100ft,为恒定值,泵位于200ft深处.一条1in内径的管道(摩擦因数 $f=0.01$)连接泵与地面上的贮水箱.水箱位置离井口100ft.水箱与一气室相通,以至于水箱内的压强维持在恒定值60psi.问泵以多大流率将水输至水箱(以gal/min为单位)?

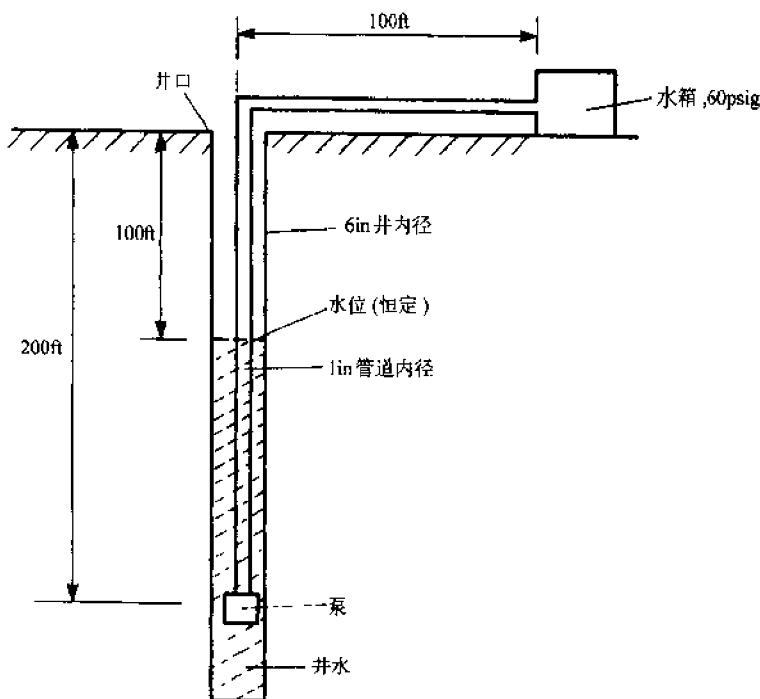


图 5-47

5.54 假定一个三次方速度剖面,求驻点附近边界层的性质,并与教科书中平方速度剖面假定给出的结果进行比较.

答案:$\delta_0=2.4\sqrt{\mu/A\rho U_\infty}$,其中 A 由方程(5.33)给出.

5.55 沿一多孔平板整个下侧面长度进行抽吸,使通过平板的流体流速(v_0)保持为常数.抽吸速度与恒定的自由流速度 U_0 相比非常小.

在平板离前缘足够大距离处,发现抽吸使边界层增厚定常化.边界层厚度和边界层内的速度分布与轴向位置 x 无关.

在这边界层定常化的区域内,求平板上的速度分布和剪应力.

5.56 两个同轴圆筒的内径为 r_1,外径为 r_2,并分别以 ω_1 和 ω_2 绕它们的轴转动.试证明包含在它们之间的黏性液体的速度剖面为

$$v_\theta = Ar + \frac{B}{r}$$

式中

$$A = \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)}, \qquad B = \frac{(\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)}$$

提示:运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_\theta}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}r} - \frac{v_\theta}{r^2} = 0$$

边界条件为:在 r_1 处 $v_\theta = r_1\omega_1$,在 r_2 处 $v_\theta = r_2\omega_2$.运动方程可以写成以下形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}r} + \frac{v_\theta}{r}\right) = 0$$

并积分一次得到

$$\frac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}r} + \frac{v_\theta}{r} = C$$

式中 C 为常数.这一方程可以写作为

$$\mathrm{d}(rv_\theta) = Cr\mathrm{d}r$$

然后直接积分.

第五章符号表

A = 面积
C_D = 阻力系数
C_f = 表面摩擦因数
C_L = 升力系数
c_p = 定压比热
c_v = 定容比热
D = 阻力和直径
Ec = 爱克特数
f = 摩擦因数,函数符号
F_S = 表面力
F_{S_x} = x 方向上的表面力
h = 平行平板之间的距离或半距离
H_L = 压头损失
K = 次要损失的损失系数
L = 长度
m = 幂率速度分布的指数,质量
$\dot{m}$ = 质量通量
$\dot{M}$ = 动量通量
n = 幂率速度分布的指数
Pr = 普朗特数
p = 压强
q = 单位质量流体的传热量
Q = 容积流率
r = 径向坐标
R = 管道半径
Re = 雷诺数
Re_x = 长度雷诺数 = Ux/ν
T = 温度
u = x 方向上的速度,单位质量的总能量(比内能)
u_τ = 壁面摩擦速度,$\sqrt{\tau_0/\rho}$
U = 自由流速度或最大速度
v = r 或 y 方向上的速度
V = 速度
$\mathbf{V}$ = 速度矢
V_x = x 方向上的速度
W = 宽度
x = 坐标
X_L = 流动充分发展所需进口长度
y = 坐标
z = 高度
δ = 边界层厚度
δ^* = 位移厚度
ϵ = 平均粗糙高度
η = 相似性参数
θ = 动量厚度
μ = 黏性系数
ν = 运动黏性系数
ρ = 密度
τ = 剪应力
τ_0 = 壁面剪应力
Φ = 耗散函数
ψ = 流函数

第六章　不可压缩势流

6.1　势流理论

在第一章中我们指出,边界层外流动是无摩擦和无旋流动,因此称为势流. 对于势流,我们可以根据标量速度势 Φ 推导得到速度为

$$V = -\nabla\phi \tag{6.1}$$

从数学上讲,可以从一个标量势函数 Φ 推导得到单值矢量场(在这里是 V)的充要条件为矢量旋度等于零(除奇点外). 在第三章已经讨论了速度矢旋度(称为涡量 ω)的重要意义. 如果涡量为零,流动就是"无旋流动",因为任何流体微元体的转动或角速度等于零.

在这一章中,我们将讨论不可压缩二维势流理论,它适用于马赫数小于 0.3 左右的亚声速流动. 在第八章,我们将讨论马赫数接近 1 的高亚声速或大于 1 的超声速流动的可压缩势流理论. 如果流动是二维不可压缩流动,可以简化,能应用复变量理论通过保角变换给出流动图像.

可能要问,对于有黏性的真实流体,如何知道流动是否无旋,或是否是势流? 回答是:除表面附近形成的边界层外,黏性(或摩擦)的影响与惯性和压强的影响相比很小(雷诺数小于 1). 除管道或槽道内边界层可能增厚直至充满整个管道,或边界层外的"蠕流"($Re \ll 1$)边界层可以扩展至远离物体处外,通常有一个基本上无旋的流动区. 事实上,绕流线型物体流动(不产生分离)的边界层增厚到的厚度通常比物体本身尺寸要小很多,在确定边界层外的势流时可以忽略边界层的存在. 即就势流而言,边界层的存在相当于增大了物体有效尺寸,而且其数量通常可以忽略. 例如,空气绕一飞机的流动是一个势流问题. 一旦得到势流解,飞机"表面"的速度和压强也就得到. 这一"表面"速度值就作为边界层外边缘的边界条件,压强直接施加于边界层.

势流理论最重要应用之一是在空气动力学中. 这一章,我们将把研究限于二维流动. 原则上,将二维推广至三维并不困难,但是,在数学上,例如导入流函数,将复杂得多.

由第三章我们知道,流体中的旋度 ω(通常称它为涡量)定义为

$$\omega = \nabla \times V \tag{6.2}$$

以及流体微元体的角速度 Ω 与涡量的关系为

$$\omega = 2\Omega \tag{6.3}$$

我们能根据图 6-1 从几何学角度来说明这一概念. 为简单起见,我们将只分析某一个笛卡儿分量,$\nabla \times V$ 的 z 分量,它为

$$\omega_z = (\nabla \times V)_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

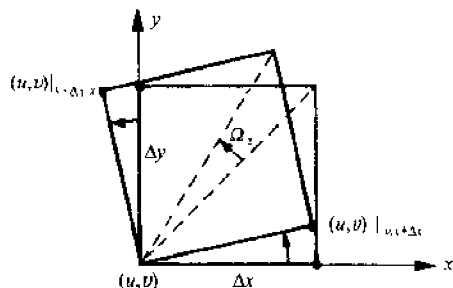


图 6-1　流体元的转动

由图 6-1 可以看出,ω_z 是微元面积 $\Delta x\Delta y$ 角速度 z 分量平均值的两倍. 线段 Δx 的角速度为 $(v|_{x+\Delta x} - v|_x)/\Delta x$,线段 Δy 的角速度为 $(u|_{y+\Delta y} - u|_y)/\Delta y$,平均后得到方形面积元 $\Delta x\Delta y$ 的平均角速度为 $\frac{1}{2}(\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)$.

如果我们考虑任意二维流动(因而在 xy 平面内仅存在 ω_z),我们可以应用斯托克斯定理将涡量的面积分与一线性积分相关联(见图 6-2)

$$\int_A \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{A} = \int \nabla \times \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{A} = \oint \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{6.4}$$

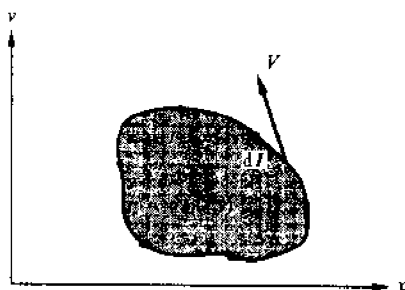


图 6-2　转动和环量,$\omega(x, y)$在整个面积范围内存在,并与线积分$\oint \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$有关

它表明,给定面积范围内旋度的面积和(面积分)等于速度矢沿该面积周边(沿曲线)的线积分. 这一封闭线积分称为环量,以 $\boldsymbol{\Gamma}$ 表示. 因此,对于任意封闭曲线,环量由下式给出:

$$\Gamma = \oint \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{6.5}$$

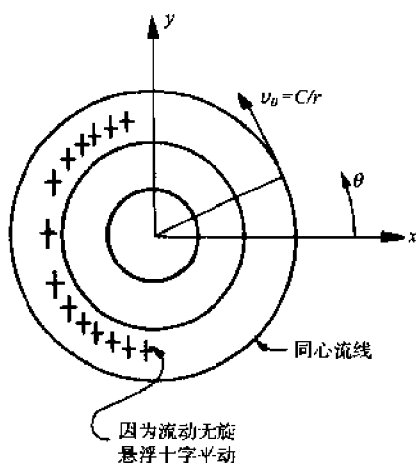


图 6-3　势涡

我们能够得到流体内转动的物理图像如下. 想像一个薄薄的十字层悬浮在流体表面(见图 6-3). 如果确实是无旋流动,十字始终平动,不会转动,因为在流体中任何地方都没有角速度. 当然,在实际情况中,十字有一定长度,因此即使流体无旋,十字也会转动. 然而,当在实验十字的长度变成非常小的极限情况下,在无旋流动中它不应该转动. 与此相反,想像十字层悬浮在黏性剪切流内,它将发生转动. 很明显,当十字随流体运动时,因为流体的剪切特性十字的顶端将以不同的速度运动,十字就转动.

无旋流的一个简单例子是势涡,通常的旋风或龙卷风与势涡非常相似. 在势涡中,速度(它仅有一个角速度分量 v_θ)由下式给出:

$$v_\theta = C/r \tag{6.6}$$

因此速度势 ϕ 为

$$\phi = -C\theta \tag{6.7}$$

所以 $-\nabla\phi$ 为$(C/r)\hat{\boldsymbol{\theta}}$,其中 C 为常数,$\hat{\boldsymbol{\theta}}$为 θ 方向上的单位矢量. 因为

$$\nabla \times \boldsymbol{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{C}{r}\right)\hat{z} = 0$$

流动是无旋流. 式中 $\hat{z}$为 z 方向上的单位矢量. 然而,在 $r=0$ 处有一个奇点. 沿任何不包围原点(即奇点)的任意包络线进行,积分 Γ 为零,但是如果包络线包围原点,则有一个有限的 Γ 值,这是因为在原点有涡旋运动. 参照图 6-4,让我们沿包络线 C_1 进行圆周积分,得到 Γ_1

$$\Gamma_1 = \int_0^{2\pi} v_\theta \big|_{r=b} b\,\mathrm{d}\theta = 2\pi C$$

沿任何包围原点的其他包络线,如 C_2,环量也为 $2\pi C$. 因此,速度势可以写作为 $\phi = -\Gamma\theta/2\pi$. 对不包围原点的任意包络线,如 C_3,进行积分,环量为零. 常数 $C=\Gamma/2\pi$ 称为涡强度. 实际上,一个涡旋在它的中心不可能有无限速度,涡的中心核如同直径为 a 的刚体那样以角速度Ω转动. 因此,根据斯托克斯定理,$\frac{1}{2}a\Omega^2 = 2\pi C$. 热带飓风(龙卷风)或台风是涡旋的一个例子.

龙卷风的眼是一个比较平静的类似于刚体转动的流体中心核.

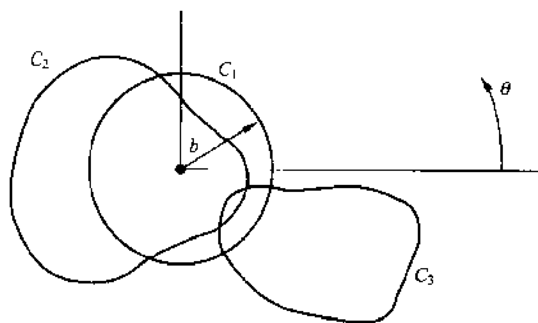


图 6-4 绕势涡的积分周线

6.2 伯努利定理

在第三章,我们通过沿流线积分无黏的运动方程推导得到了伯努利方程. 我们还对无摩擦流动通过积分能量方程得到了相同的关系式. 我们现在关心的只是不可压缩流动,能量方程可以不必考虑,所有信息都可以从运动方程和连续方程得到.

在具有守恒体力的无旋流中(可以导得势为 $\boldsymbol{B}=-\nabla\psi$),在流动中任意(不必在同一流线上)两点之间,伯努利方程都成立. 令 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 为流场中的距离元(不必沿一流线). 那么,对定常的或非定常的不可压缩无旋流动

$$\rho\int\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\rho\int\nabla\left(\frac{V^2}{z}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}-\rho\int\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\int\nabla p\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}-\rho\int\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

它由方程(3.36)推导得到. 在无旋流动中,$\nabla\times\boldsymbol{V}=0$,因此,以上方程变为

$$\rho\int\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\rho\int\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\int\nabla p\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}-\rho\int\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\tag{6.8}$$

因为流动是无旋的,如在下面 6.4 中将要讨论的,速度 $\boldsymbol{V}$ 可以由速度势 ϕ 推导得到,因为 $\boldsymbol{V}=-\nabla\phi$. 积分方程(6.8)得到不可压缩、无旋流动的非定常伯努利方程

$$-\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\psi=\text{常数}\tag{6.9}$$

它在整个流场都成立,不只是沿流线成立. 如果是定常流动,方程(6.9)变为

$$\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\psi=\text{常数}$$

可以进一步表明,如果流体无摩擦和体力不转动(守恒),那么流动必定是无旋的(奇点,如势流中心,除外).

当已知速度 $\boldsymbol{V}$ 计算整个流场的压强时,伯努利方程(6.9)非常有用. 在势流和亚声速空气动力学中,一个重要问题是确定速度 $\boldsymbol{V}$,这将在以下几节中加以讨论.

6.3 开尔文涡旋定理和涡旋运动

在仅有守恒体力的无黏流体中,沿始终由相等流体质点组成的廓线(流线)的环量为常数. 尽管在这些条件下,涡量一般为零,由于存在局部涡旋区和涡旋奇点,可以存在环量.

将 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$(流体线元)乘运动方程并沿廓线积分,我们得到

$$\left(\text{记住}:\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l})=\boldsymbol{V}\cdot\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{l})+\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}\right)$$

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t}=\oint\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l})=-\oint\left(\frac{\nabla p}{\rho}+\nabla\psi\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\oint\boldsymbol{V}\cdot\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{l})\tag{6.10}$$

但是,因为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{V}\cdot\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r})=\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{V}=\mathrm{d}(V^2/2)$(其中 $\boldsymbol{r}$ 为流体质点的拉格朗日位置矢)

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t}=\oint[-\mathrm{d}p/\rho-\mathrm{d}\phi-\mathrm{d}(V^2/2)]=0$$

因为积分函数中的各项均为单值. 因此

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t}=0 \tag{6.11}$$

它在物理上意味着一个非常重要的结果:当我们随流体运动时,沿任意流线的环量在时间上保持常数. 注意:(6.11)对不可压缩和可压缩流体都适用.

以上我们仅对开尔文定理作了简略证明.对更详细的证明有兴趣的读者可以参阅有关文献. 应该强调,$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是一流体线元(始终由相等流体质点组成),并随流体一起运动,它的方位可能扭曲和改变. 沿着它对 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 积分的封闭回路始终由相等的流体质点所组成,而且在二维或三维问题中总是形成封闭回路. 开尔文定理也可以从对封闭回路组成的整个表面积分涡量 $\boldsymbol{\omega}$,并由斯托克斯定律将它转换成线积分推导得到. 流体线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 不能与距离元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$(它固定在坐标空间并可以以欧拉坐标的微分写出)相混淆.

考虑一个三维涡旋,如龙卷风,它的核心可能形成一个不规则形状的线. 这条线是涡旋中心的连续轨迹,称为涡线. 更精确地说,涡线是流体中一条线,该线上每一个点的切线方向就是该点速度矢的方向. 在旋转流体中,存在无限组涡线,但如果涡量由于势涡运动产生,沿势涡中心只有单一涡线存在.

涡管是通过封闭曲线上每一个点画出的涡线的轨迹.

涡丝是截面积为无限小的涡管. 我们能够将龙卷风的刚体核心想像为一涡管,当这涡管截面积变成无限小时就变为涡线,见图 6-5.

除了我们将涡强与涡丝联系起来外涡丝和涡线是等同的. 涡管或涡丝可以与定义为在整个截面上的面积分 $\int\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 的涡强度相联系. 沿涡管这一强度必须为常数. 对于涡丝,$\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 为一强度密度,即单位面积上的涡量,并且沿涡丝必须为常数. 因此,涡丝必须形成许多封闭的环(涡环),像烟圈那样,在流体边界终止. 除非由于黏性耗散了涡旋,涡丝不会在流体中终止.

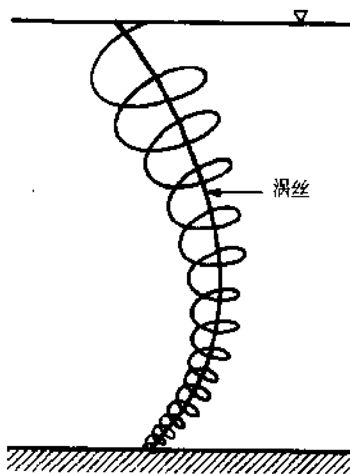


图 6-5 流体中势涡的涡丝、在龙卷风中,核心是涡管所包围的有限尺度的转动流体

我们的讨论并没有局限于定常流动,而且我们必须牢记:所有这些线和丝都随流体一起运动.

6.4 速度势和流函数

速度可以由标量速度势

$$\boldsymbol{V}=-\nabla\phi \tag{6.12}$$

推导得到,其充要条件是无旋. 标量速度势在笛卡儿坐标系中为

$$u=-\partial\phi/\partial x,\quad v=-\partial\phi/\partial y,\quad w=-\partial\phi/\partial z$$

对通常可压缩流体的三维流动,其速度势可以确定. 然而,我们将保留这一讨论到在第八章中进行,这里我们只讨论二维定常不可压缩流动. 对于亚声速空气动力学(马赫数 $M<0.3$ 左

右),不可压缩流动的假定是成立的,并且把问题限于二维可以使数学分析变得容易. 虽然在这里我们能够讨论三维的影响,但只能是定性的. 尽管可以对任何无旋流动确定其速度势,除非有特殊说明,速度势一般只指平均二维不可压缩流动.

在不可压缩条件下,以势函数 ϕ 表示的速度可以代入连续方程 $\nabla\cdot\mathbf{V}=0$ 中得到 ϕ 是调和的条件(满足拉普拉斯方程)

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{6.13}$$

在笛卡儿坐标系中,它为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$$

虽然这里我们只限于研究定常不可压缩流动,但对于任何二维流场,不管它是否无旋,不可压缩还是可压缩,可以确定另一个重要函数——流函数 ψ. 在二维流动中,等 ψ 线是流线,它在两流线之间的数值差等于该两流线之间的容积流率. 流函数的物理意义可以由图 6-6 看出. 沿从 ψ_1 至 ψ_2 的路径,流动从右到左为正向,笛卡儿坐标中以 $\mathbf{V}$ 定义的 ψ 为

$$u=-\partial\psi/\partial y,\quad v=\partial\psi/\partial x \tag{6.14}$$

ψ_1 和 ψ_2 之间的容积流率为(从右至左为正)

$$Q_{12}=\int_1^2(v\mathrm{d}x-u\mathrm{d}y)=\int_1^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\psi}{\partial y}\mathrm{d}y\right)=\int_1^2\mathrm{d}\psi=\psi_2-\psi_1 \tag{6.15}$$

只要积分路径连接两流线,积分就与积分路径无关. 即从物理上讲,我们引入的 ψ 是单值的,因此,除沿任意包围奇点,如源或汇的封闭积分廓线外,沿任何封闭廓线的积分 $\oint\mathrm{d}\psi=0$. 在积分封闭廓线包围奇点时,除非我们限制它的定义域,比如说为 $0<\theta<2\pi$,否则 ψ 不可能单值.

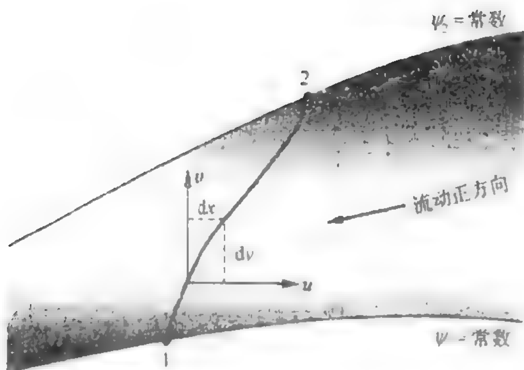


图 6-6 流线和流函数

因此对于二维流动,我们根据无旋条件有 $\nabla\cdot\mathbf{V}=0$ 或 $\partial v/\partial x-\partial u/\partial y=0$,它们可根据任意定常二维不可压缩势流的流函数定义得到.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0$$

因此 ψ 是调和的(即满足拉普拉斯方程). 在任何坐标系中它为

$$\nabla^2\psi=0 \tag{6.16}$$

此外

$$u=-\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{6.17}$$

这称为柯西-黎曼条件.

在极坐标 r 和 θ 中,我们可以写出这一基本关系

$$v_r=-\frac{\partial\phi}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\ v_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{6.18}$$

当然,我们可以得到$\nabla^2\phi=\nabla^2\psi=0$.

ϕ 和 ψ 是调和函数和满足柯西-黎曼条件的一个重要结果是等 ϕ 和等 ψ 线相正交. 我们可以容易地通过证明

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{\phi=\text{常数}}=-\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_{\psi=\text{常数}}$$

来验证这一点. 沿一等 ϕ 线

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\phi&=\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathrm{d}y=0\\&=-u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y\end{aligned}$$

和沿一等 ψ 线

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\psi&=\frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\psi}{\partial y}\mathrm{d}y=0\\&=v\mathrm{d}x-u\mathrm{d}y\end{aligned}$$

根据 $\mathrm{d}\phi=0$,我们有 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=-u/v$,以及根据 $\mathrm{d}\psi=0$,我们有 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=v/u$,因此

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\phi=\text{常数}}=-\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{\psi=\text{常数}}$$

它是等 ϕ 线和等 ψ 线组成正交网络的数学表达式. 因为这些线互相垂直以及满足相同的微分方程,在描述不同流动时 ϕ 和 ψ 的作用可以互换.

等 ϕ 线和等 ψ 线形成所谓曲线正交网格或网络. 在均匀流动中,这些线都是直线,但在一般情况下为曲线. 因为没有流体穿过等 ψ 线,它们可以视作为固体边界. 即可以用一个固体边界代替流线(ψ 线)而对流动无任何影响.

因为方程$\nabla^2\phi=\nabla^2\psi=0$ 是线性的,我们可以叠加不同流动的解,并在空间每一点上直接将 ϕ 和 ψ 的数值相加得到新的 ϕ 和 ψ 值. 这在物理学上表示不同流动的叠加.

例如,我们可以将一源或汇,或势涡产生的流动叠加到一个均匀流动上. 下一节,我们将讨论一些简单的二维流动流型和一些叠加这些简单流动来生成较为复杂流场的方法.

对已知流动,ϕ 和 ψ 确定以后,速度分量也就已知,压强可以从伯努利方程求得.

6.5 若干简单流动的流型

在这一节,我们将讨论一些简单流动及它们的 ϕ 和 ψ 函数. 下一节我们将讨论一些解的方法. 然而,一旦简单流动理解了,许多更复杂的流动就可以仅通过这些简单流动的解的叠加来合成.

均匀流动

假定流动充满整个空间而且是均匀流动,速度为 $U_0\hat{x}$,平行于 x 轴,这里 $\hat{x}$为 x 方向的单位矢量. 仅有的速度分量是 u,因此$-\partial\phi/\partial x=U_0=$常数. 因为 $v=0$,和 ϕ 必定与 y 无关,所以 $\phi=-\int U_0\mathrm{d}x+f(y)=-U_0x+C_1$. 常数 C_1 为任意值,我们把它取为零. 流函数由 U_0

$= -\partial\psi/\partial y$ 得到,因此,根据相似性

$$\psi = -U_0 y + C_2 = -U_0 y$$

所以,任意两等 ψ 线(y = 常数)之间的容积流率由

$$\psi_2 - \psi_1 = \psi|_{y=y_2} - \psi|_{y=y_1} = Q_{12} = -U_0(y_2 - y_1)$$

给出,对从右至左的正向流动,为负数,因为这里流动是从左至右.因此,对于 $U_0\hat{x}$ 平行于 x 轴的均匀流动,

$$\phi = -U_0 x,\ \psi = -U_0 y \tag{6.19}$$

等 ϕ 和等 ψ 线如图 6-7 所示.

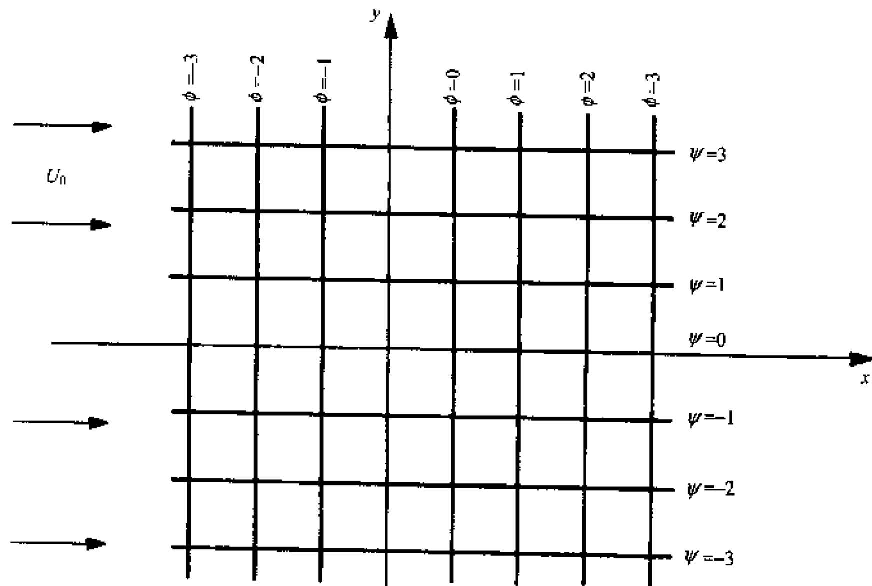


图 6-7　平行于 x 轴的均匀流

源和汇

点源或点汇是一个奇点,从它开始等 ψ 线呈散射状,围绕它的等 ϕ 线为同心圆.对容积流率为 Q 的源,径向速度 v_r 为 $Q/2\pi r$,角速度 v_θ 为零.Q 为源强度,其物理意义是每单位流体深度的总容积流率.因此,由于

$$v_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi}\theta,\ \phi = -\frac{Q}{2\pi}\ln r \tag{6.20}$$

对于汇,方程(6.20)仍然成立,但是 Q 为负值,因此 v_r 为负值并且流向汇.当然,可以将一个任意常数加到 ϕ 和 ψ 上,而对速度无任何影响.

流动的流型如图 6-8 所示.当然,在原点,$r\to 0$ 时,$\phi\to\infty$,这并不惊讶,因为实际上我们为使流体能流入汇,始终必须要有一个有限的汇面积,而不是一个点.

势涡

前而我们已经讨论过势涡,现在我们可以用 ϕ 和 ψ 来讨论它.对于涡旋,我们可以积分 $v_\theta = C/r = \Gamma/2\pi r$ 来求得 ϕ 和 ψ.我们得到

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta,\ \psi = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \tag{6.21}$$

可以指出，根据源和汇，ϕ 和 ψ 的作用可以交换．并且在图 6-9 中我们确实可以看出，等 ϕ 和等 ψ 线形成一个简单的径向线和同心圆图形．$\Gamma/2\pi$ 项称为涡强度．

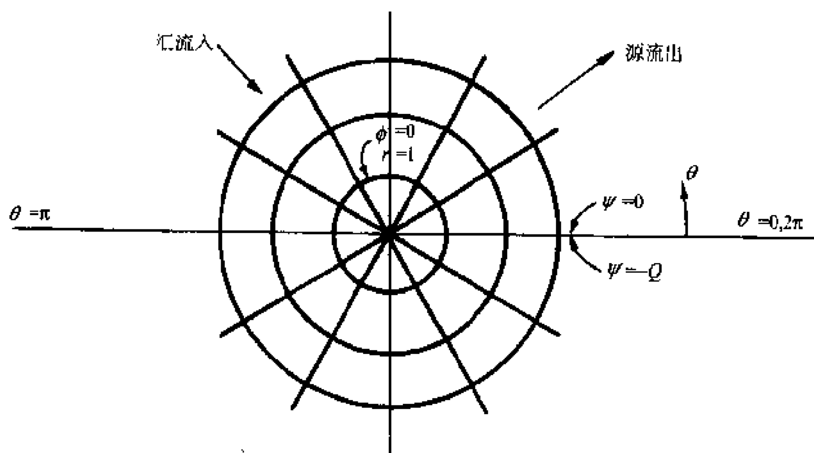


图 6-8　源和汇．如果 $\theta=2\pi$，则 $\psi=-Q$，因此，对于源 Q 为正数，对于汇 Q 为负数

叠加

作为两个或更多势流流动叠加的一个例子，让我们研究图 6-10 所示的流动——兰金椭圆．在一均匀流动 $U_0\hat{x}$ 中，等强度的源和汇位于 x 轴上离原点相同距离处．从源流出的所有流体全被汇所吸收，并且在均匀流动的流体与从源向汇流动的流体之间存在确定的区分流线．这一区分流线可以考虑为一个椭圆形柱体截面的周边．因此，这些流动的叠加将给出围绕椭圆形柱体外部的流动．通过合并许多源和汇，我们可以得到围绕一个任意形状柱体的对称于 x 轴的近似流动流形．并且，借助应用沿 x 轴的分布源，我们可以求得绕这一柱体的精确流形；然而，其强度分布函数通常难于计算，因为强度分布函数涉及解一个积分方程．在空气动力学中，这样的方法非常有用．

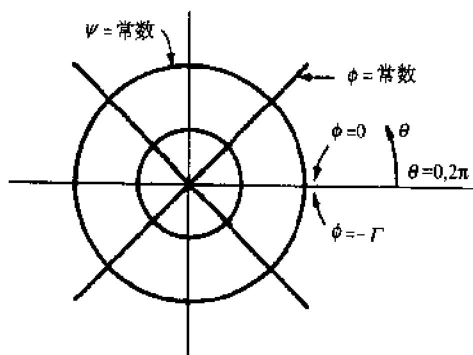


图 6-9　势涡及其等 ϕ 和等 ψ 线

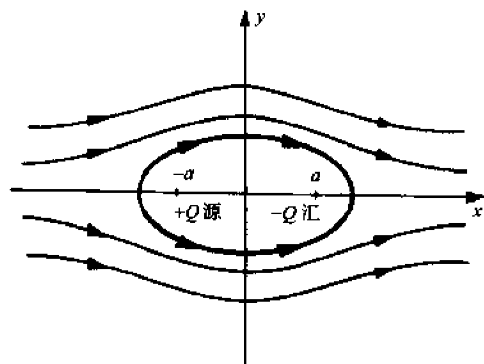


图 6-10　绕兰金椭圆的流动．椭圆是源和汇之间流动的流体与自由流中流体的区分流线

回到兰金椭圆，我们有

$$\phi = -U_0x - (Q/2\pi)\ln r_1 + (Q/2\pi)\ln r_2$$

$$\psi = -U_0y - (Q/2\pi)\theta_1 + (Q/2\pi)\theta_2 \tag{6.22}$$

它可以写作为

$$\phi = -U_0 x - \frac{Q}{4\pi}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$$

$$\psi = -U_0 y - \frac{Q}{2\pi}\left(\arctan\frac{y}{x+a} - \arctan\frac{y}{x-a}\right) \tag{6.23}$$

镜像法

如上面我们指出的,一流线可以考虑为一个固体边界. 如果能找到一个流动使得其等 ψ 线与边界一致,我们就能确定沿该边界的流动. 对于绕一个物体的流动,物体表面就是等 ψ 线.

常常可以通过流动流形的叠加来产生与壁面或边界一致的等 ψ 线. 这种方法的一个有用例子是镜像法. 考虑一个由一中间平板隔开的相同的流动,中间平板必须无流体通过,因此可以被看作为一个固体边界.

通过镜像法我们用叠加来反映绕一个没有流体通过的固体边界的流动. 用这一方法可以合成许多相当复杂的流动.

例如,考虑一个图 6-11 所示的由一个壁面(x 轴)附近的源(或汇)产生的流动. 我们构筑由于在 $y=a$ 处的一个源和在 $y=-a$ 处的一个镜像(假想)源产生的流动,沿作为区分流线或区分壁面的 x 轴,这两个流动互相排斥. 很明显,函数 ϕ 和 ψ 为

$$\phi = -\frac{Q}{4\pi}\ln\{[(y-a)^2+x^2][(y+a)^2+x^2]\}$$

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi}\left(\arctan\frac{y-a}{x} + \arctan\frac{y+a}{x}\right) \tag{6.24}$$

因此,在 $y=0$ 处的速度分量正交于壁面,$v(y=0)=0$.

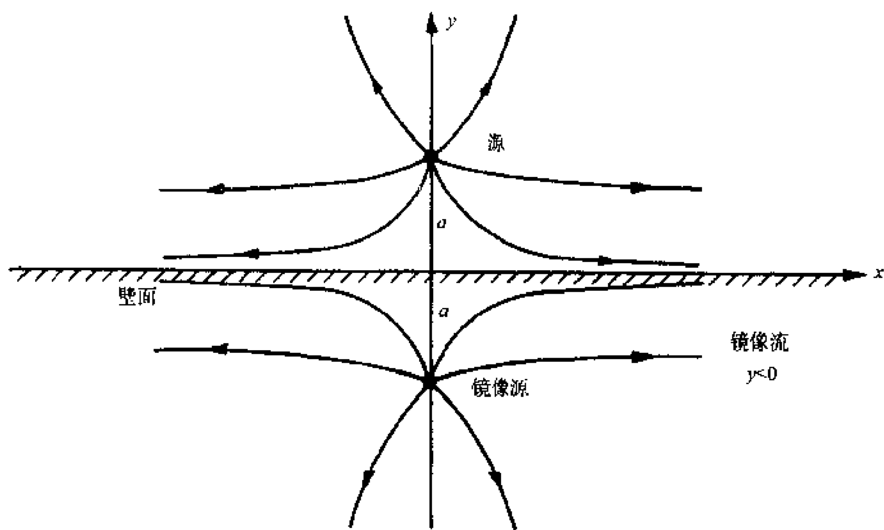


图 6-11 用于建立壁面附近的源所造成流动的镜像法

6.6 复势

在势流中,问题一般涉及在适当的边界条件下解拉普拉斯方程 $\nabla^2\phi=0$ 和 $\nabla^2\psi=0$. 合适的边界条件通常是:在无穷远处流动均匀或为零,和流体不能穿过它所绕流的固体表面. 然而,除了对于某些简单形状 ϕ 和 ψ 可以由解调和方程或直接积分 $\mathbf{V}=-\nabla\phi$ 容易地求得外,在速度已知时,如在上一节中的简单例子,最好用复变量理论和保角变换来确定 ϕ 和 ψ.

复函数 $F(z)$

在二维问题中，定义一个函数 F(称为复势)的充要条件是 ϕ 和 ψ 为调和函数及满足柯西-黎曼方程．复函数定义为

$$F = \phi + i\psi = F(z) \tag{6.25}$$

式中 $i=\sqrt{-1}$ 及 $z=x+iy$．在复平面($\phi+i\psi$)中，ϕ 和 ψ 形成一个矩形坐标网格．我们考虑 ϕ 和 ψ 是复变量 z 的函数，以 z 代替 x 和 y．平面 xy 代表物理流动平面．

一般

$$z = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

见图 6-12，z 为具有实数部分 x 和虚数部分 y 的复数．F 可以写作为 z 的函数，因此，F 的实数部分为 $\phi(x, y)$ 及 F 的虚数部分为 $\psi(x, y)$．

柯西-黎曼条件连同 ϕ 和 ψ 单值及 ϕ 和 ψ 的所有偏导数连续等条件意味着 F 是可析(或正则)函数．可析函数 $F(z)$ 是这样的函数，(1)在一封闭廓线 C 内为有限值并为单值，及(2)所有导数存在并为单值．一个 z 的可析函数的实数部分和虚数部分称为共轭函数并且是调和的．ϕ 和 ψ 是共轭函数并且我们知道 $\nabla^2\phi=\nabla^2\psi=0$．

参照图 6-12，dF/dz 可以对任意 Δz 进行计算．如果我们取 Δz 平行于 x 轴，我们有 $\Delta z=\Delta x$ 及

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

如果取 Δz 平行于 y 轴，我们有 $\Delta z = i\Delta y$ 并且

$$\frac{dF}{dz} = -i\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

因此两个表达式中无论那一个都可以应用，而且两者必定相等，因此，我们由令它们的实数和虚数部分分别相等得到柯西-黎曼条件：

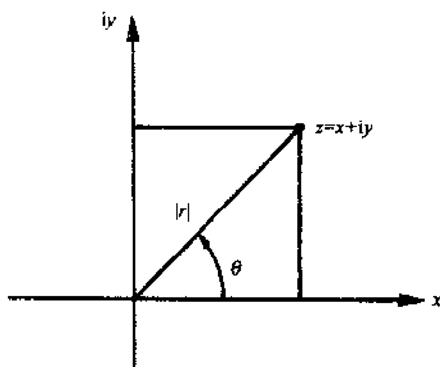


图 6-12　复平面 z

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \text{ 和 } \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

复速度

对复函数 F 微分，我们得到

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

或

$$-\frac{dF}{dz} = u - iv \tag{6.26}$$

$-dF/dz = u - iv$ 称为复速度．共轭势 $\bar{F} = (\phi - i\psi)$ 也可以对 $\bar{z}$，即共轭复变量$(x - iy)$，进行微分，得到 $-d\bar{F}/d\bar{z} = u + iv$．因此

$$\frac{dF}{dz}\cdot\frac{d\bar{F}}{d\bar{z}} = u^2 + v^2 = V^2 \tag{6.27a}$$

它是流体中速度的平方．一旦 $F(z)$ 已知，不需进一步计算就能求解 V^2，这常常很有用．为了

显示 $\bar{F}$ 的意义,设 $F=z+iz^2$,因此 $\bar{F}=\bar{z}-i\bar{z}^2$. 如果 $F=z+a^2/z$,$\bar{F}=\bar{z}+a^2/\bar{z}$. $\bar{F}(\bar{z})$的意义就是所有显 i 变更符号,所有 z 变成$\bar{z}$. 换句话说,

$$V^2 = \left|\frac{dF}{dz}\right|^2 \tag{6.27b}$$

因为$|V|$是$(u-iv)$的模.

一旦 V^2 已知,可以用伯努利方程求解流动中的压强.

令 $dF/dz=0$ 可以求得 $u=v=0$ 的驻点.

保角变换

发生运动的物理平面是 z 或(x, y)平面,在该平面,ψ 为常数的线为曲线并且代表流线. 在 F 平面中,ϕ 和 ψ 形成正交网络. 可以通过一个保持 ϕ 和 ψ 正交性质的转换将流动从 z 平面转换到另一个平面,比如说 ζ 平面. 这一转换称为函数

$$\zeta = f(z) \tag{6.28}$$

的变换函数. 可以看出,一个 z 平面中无限小的三角形可以在保持角度和相似性的条件下变换到ζ平面中的一个相似的无限小三角形. 这样的转换用于流动的变换;梅卡托投影就是将地球保角变换到一个平面上. 如果知道简单形状的流型,我们就能够通过选择合适的形式函数(6.28)构筑复杂形状的流形. 因此,通过方程(6.28)我们能够得到能描述在 ζ 平面中更复杂流动的$F(\zeta)$.

例如,考虑图 6-13 所示的变换. ζ 平面的上半部可以通过保角变换

$$\zeta = z^{\alpha} \tag{6.29}$$

变换到 z 平面的扇形中,式中坐标原点从 0 变成 0′.

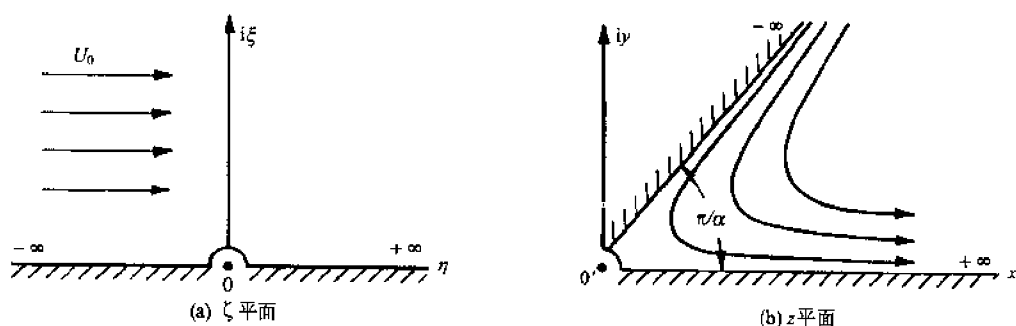


图 6-13 ζ平面的上半部分保角变换成为 z 平面内的 π/α 扇形

如果我们要考虑 ζ 平面中从左到右的均匀流动,

$$F = -U_0\zeta = -U_0\eta - iU_0\xi = \phi + i\psi \tag{6.30}$$

因此,在 z 平面内的流动应该为

$$F = -U_0\zeta = -U_0 z^{\alpha} \tag{6.31}$$

如图 6-13(b)所示,它代表在一个角内的流动.

6.7 若干简单流动的复势

复变量方法是势流理论中最有力的工具之一,并成为亚声速空气动力学的基础. 通过从

简单流型到更为复杂流型的一次次变换,常常可以构筑绕诸如圆柱,翼型等的流动. 这一节,我们要列出若干重要的复势并描述它们的流型. 此外,复势可以如 ϕ 和 ψ 那样叠加,从而得到不同的流型.

均匀流场　如我们在前面所指出的,

$$F=-U_0 z=-U_0(x+\mathrm{i}y)=\phi+\mathrm{i}\psi \tag{6.32}$$

是一个平行于 x 轴的均匀流动 U_0 的复势. 令实数和虚数部分相等,$\phi=-U_0 x$ 和 $\psi=-U_0 y$.这我们在前面已经知道并被表示在图 6-7 中.

源与汇　对一个强度为 Q 的源,复势为

$$F=-(Q/2\pi)\ln z=-(Q/2\pi)\ln r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{6.33}$$

这里很容易将 z 表示为 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,因此我们可以将 F 分离成实数和虚数部分:$F=-(Q/2\pi)(\ln r+\mathrm{i}\theta)$,因面得到 $\phi=(Q/2\pi)\ln r$ 和 $\psi=(Q/2\pi)\theta$,如图 6-8 所示. 对汇,除了 Q 为负外是相同的,如果我们定义 Q 为汇的强度,则

$$F=(Q/2\pi)\ln z \tag{6.34}$$

势涡　对图 6-9 所示的一个势涡

$$F=\mathrm{i}\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z=\mathrm{i}\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{6.35}$$

因此 $\phi=-(\Gamma/2\pi)\theta$ 和 $\psi=(\Gamma/2\pi)\ln r$,其中 $\Gamma/2\pi$ 为涡旋强度和 Γ 为环量.

偶极子或二极子　考虑在 A 点的一个强度为 Q 的源和在 B 点的一个强度为 $-Q$ 的汇. 如图 6-14 所示,令 A 点位于 $z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$,$B$ 点位于 $z=-a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. 因此,叠加后流动的复势为

$$F=-\frac{Q}{2\pi}\ln(z-a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})+\frac{Q}{2\pi}\ln(z+a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}) \tag{6.36}$$

流线为通过 A 点和 B 点的环.

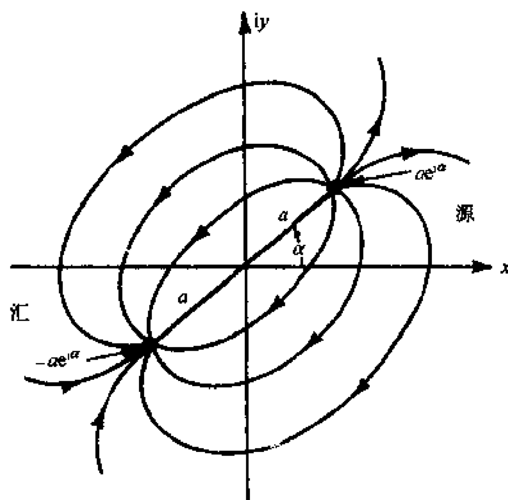


图 6-14　源和汇

当 A 点和 B 点彼此靠近,即 $A\to B(a\to 0)$时的极限流动称为偶极子或二极子. (当 $a\to 0$ 和 A 和 B 相重合时)流动的复势为

$$F=\frac{m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{z} \tag{6.37}$$

式中：甚至当 $a \to 0$ 时，$m = Qa/\pi$ 等于常数．当 $a \to 0$ 时，偶极子的强度 $Q \to \infty$ 并且 $\lim_{a\to 0} Qa/\pi = m$．对于图 6-15 所示流线和速度势变为圆形．这些流型与正负电荷的电偶极子场的图形以及二极无线电发射天线的发射图形类似．

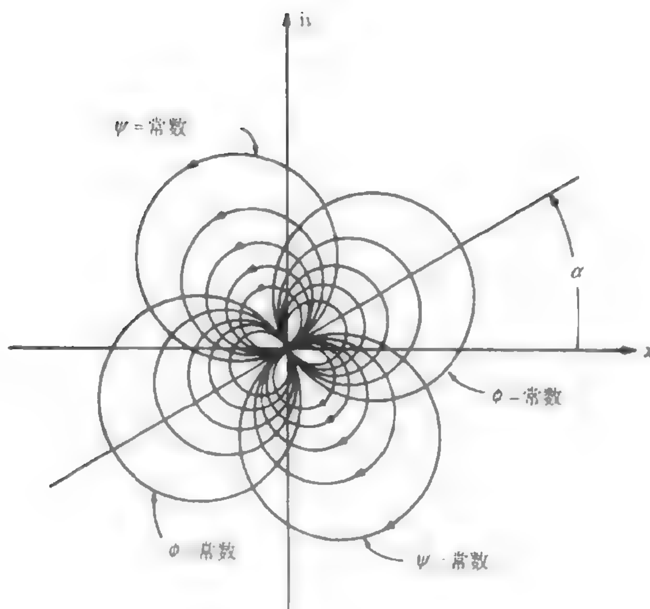


图 6-15　偶极子流

将方程(6.37)分离成变量 ϕ 和 ψ，我们得到

$$\phi = \frac{m(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}{(x^2 + y^2)}, \quad \psi = \frac{m(x\sin\alpha - y\cos\alpha)}{(x^2 + y^2)} \tag{6.38a}$$

它代表与原点相切的圆．如果 $\alpha = 0$，我们有

$$\phi = \frac{mx}{x^2 + y^2}, \ \psi = -\frac{my}{x^2 + y^2} \tag{6.38b}$$

绕一个圆柱体的流动　参看图 6-16，在 x 正方向上有一个流速为 U_0 的均匀流动．一个直径为 a 的圆柱体位于原点．绕圆柱体流动的复势由下式给出：

$$F = -U_0(z + a^2/z) \tag{6.39}$$

由方程(6.39)得到流函数为

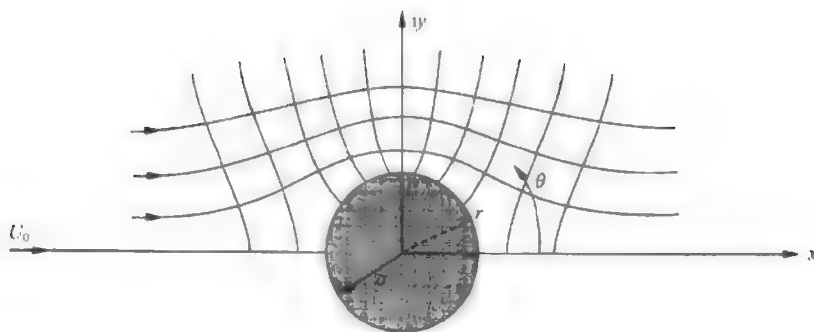


图 6-16　绕圆柱体的流动．对称于 x 轴

$$\psi = - U_0(r\sin\theta - \frac{a^2}{r}\sin\theta) = - U_0 y(1 - a^2/r^2) = - U_0 y + \frac{a^2 U_0 y}{x^2 + y^2} \qquad (6.40)$$

它表明:绕一个圆柱体的流动可以由绕一个强度为 $-a^2U_0$ 的偶极子与一均匀流动的叠加来描述.(负号仅仅更换了图 6-15 中源和汇的作用.)

速度势 ϕ 由

$$\phi = - U_0 x(1 + a^2/r^2) \qquad (6.41)$$

给出.

在 $r=a$ 处,圆柱的周边必须与流线相一致.并且确实在 $r=a$ 处,$\psi=0$.

速度场可以根据 $-\mathrm{d}F/\mathrm{d}z = u - \mathrm{i}v$ 得到,它可以转换成极坐标形式

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = - U_0 + \frac{U_0 a^2}{z^2} = - U_0 + \frac{U_0 a^2 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}}{r^2}$$

$$= U_0\left(\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta - 1\right) + \mathrm{i}U_0 \frac{a^2}{r^2}\sin 2\theta$$

因而笛卡儿速度分量为

$$u = - U_0\left(\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta - 1\right),\ v = - U_0 \frac{a^2}{r^2}\sin 2\theta \qquad (6.42)$$

以及极坐标速度分量 v_r 和 v_θ 为

$$v_r = U_0(1 - a^2/r^2)\cos\theta,\ v_\theta = - U_0(1 + a^2/r^2)\sin\theta \qquad (6.43)$$

所以

$$V^2 = u^2 + v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar{F}}{\mathrm{d}\bar{z}} = U_0^2\left[1 + \frac{a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\right]$$

绕柱体的压强可由伯努利方程得到

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = 常数 = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U_0^2}{2} = \frac{p_0}{\rho}$$

式中 p_0 为流场中任何点的总压强,即在该点速度 V 滞止至零时的压强,p_∞ 是速度为 U_0 时的自由流压强.在圆柱表面,即 $r=0$ 处,

$$p\,|_{r=a} = p_0/\rho - 2U_0^2(1 + \sin^2\theta - \cos^2\theta)$$

最大速度为 $2U_0$,出现在圆柱体顶端和底端($\theta=\pi/2,\ 3\pi/2$),那里压强最小.因为压强对称于 x 和 y 轴,对圆柱体没有净力.当然,实际上在圆柱体后部出现分离,应该存在阻力.然而,如果圆柱体发生变形而使后部延长至某一点使分离被阻止,那么除了引起表面摩擦的边界层之外有相当好的势流解.在下一节,我们将讨论机翼理论.在那里,势流理论能对绕一流线体的流动给出相当好的速度和压强分布.

6.8 环量和儒可夫斯基定理

这一节我们将讨论(有限环流)势涡流动与绕一圆柱体均匀流动相叠加.所形成的压强分布将对圆柱体产生升力,并成为空气动力学的理论基础.

围绕圆柱体的环量　现在考虑一个绕圆柱体的具有环量的均匀流动.环量可以由圆柱体的转动引起,所以如果那里没有均匀流动,直径为 a 的圆柱体的圆周速度应该等于直径 a 处势涡的切向速度.于是,复势为

$$F = - U_0(z + a^2/z) + \mathrm{i}\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z/a \qquad (6.44)$$

所以,圆柱体是 $\psi=0$ 线的一部分. 为确定流线($\psi=$常数)的形式,我们求解复速度 $-\mathrm{d}F/\mathrm{d}z$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}=U_0(a^2/z-1)+\mathrm{i}\frac{\Gamma}{2\pi z}$$

并对方程求解 z 得到驻点

$$U_0(a^2/z-1)+\mathrm{i}\frac{\Gamma}{2\pi z}=0$$

因此

$$z\mid_{V=0}=a\left(\mathrm{i}\frac{\Gamma}{4\pi aU_0}\pm\sqrt{1-\frac{\Gamma^2}{16\pi^2a^2U_0^2}}\right)\tag{6.45}$$

有三种情况:$\Gamma^2<(4\pi aU_0)^2$,$\Gamma^2=(4\pi aU_0)^2$,$\Gamma^2>(4\pi aU_0)^2$. 图 6-17 画出了这三种情况.

对圆柱体有一个升力,下面我们将研究这一升力的表达式,并证明升力 $L=-\mathrm{i}\rho U_0\Gamma$;即它是在 y 方向上等于 $-\rho U_0\Gamma$ 的一个力.

这里,Γ 的值决定于圆柱的转动速度,并且它是为什么垒球,高尔夫球或乒乓球在它们有旋转时运动轨迹是曲线的原因. 对图 6-17 所示的流动,Γ 为负值,升力的方向为 $+y$ 方向.

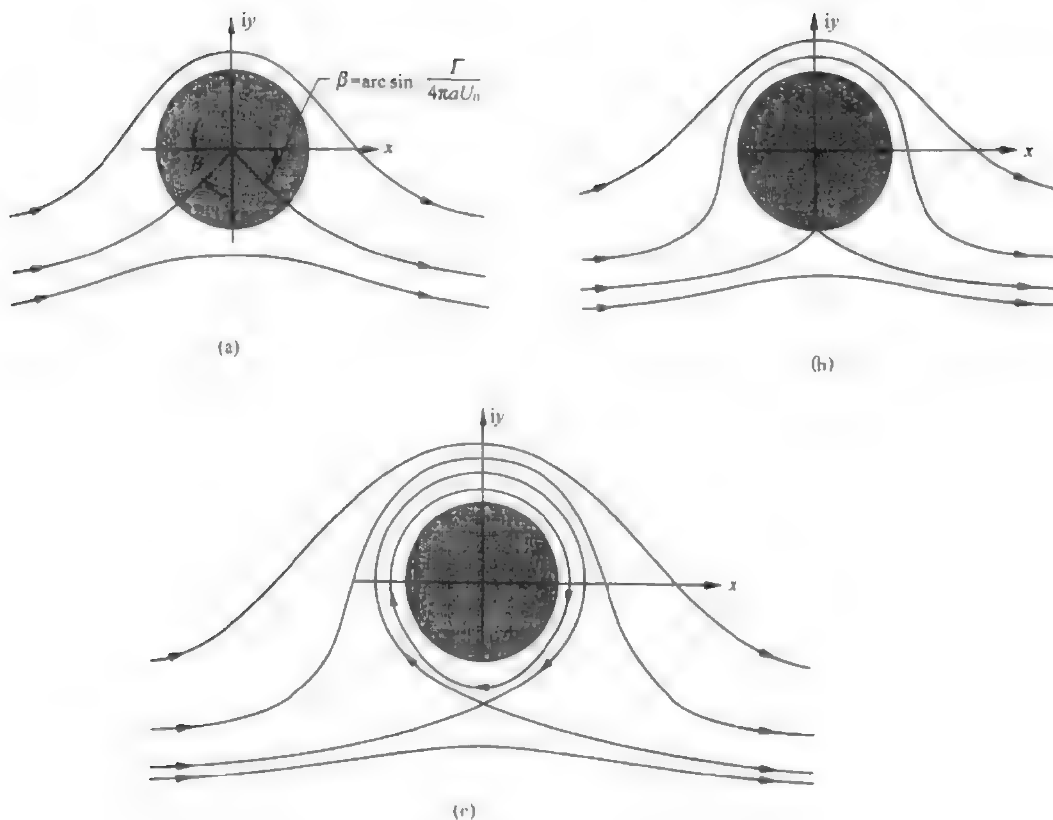


图 6-17　带有环流的绕圆柱体流动的流线

(a) $\Gamma^2<(4\pi aU_0)^2$,在圆柱底部有两个驻点; (b) $\Gamma^2=(4\pi aU_0)^2$,一个驻点位于圆柱底端;

(c) $\Gamma^2>(4\pi aU_0)^2$,单个驻点向下移动

布拉修斯定理与库塔-儒可夫斯基定理　现在,我们将推导作用在势流中圆柱体上的总力和动量,并将结果应用到作用于翼型的升力计算中去. 参照图 6-18,我们绕圆柱体周边积分压强以求得作用在圆柱体(单位长度)上的总复力 $X+\mathrm{i}Y$ 和动量 M. 根据伯努利方程,$p=p_0-\frac{1}{2}\rho V^2$,其中 p_0 为常数. 于是

$$p=p_0-\frac{1}{2}\rho V^2=p_0-\frac{1}{2}\rho\frac{dF}{dz}\cdot\frac{d\bar{F}}{d\bar{z}}$$

绕圆柱体周边 p_0 的积分为零,对升力无贡献. 在圆柱体表面上,ψ=常数($d\psi=0$),因此 $d\bar{F}=dF$. 参照图 6-18,我们有

$$X-iY=-\oint_C(pdy+ipdx)=-\oint_C ipd\bar{z}$$

$$=\oint_C\frac{1}{2}i\rho\frac{dF}{dz}\cdot\frac{d\bar{F}}{d\bar{z}}\cdot d\bar{z}=\frac{1}{2}i\rho\oint_C\left(\frac{dF}{dz}\right)^2dz \tag{6.46}$$

式中我们已经用 dF 代替了 $d\bar{F}$,消去了 $d\bar{z}$ 项,并乘和除了 dz. 动量 M 由下式给出:

$$M=\oint_C p(xdx+ydy)=Re\oint_C pzd\bar{z}$$

$$=Re\oint_C-\frac{1}{2}\rho\frac{dF}{dz}\cdot\frac{d\bar{F}}{d\bar{z}}\cdot zd\bar{z}=Re\left\{-\frac{1}{2}\rho\oint_C z\left(\frac{dF}{dz}\right)^2dz\right\} \tag{6.47}$$

式中 Re 表示实数部分.

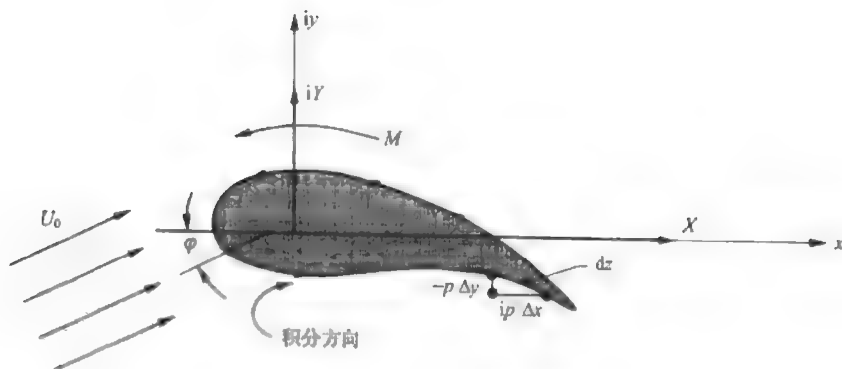


图 6-18 表示升力和力矩的绕翼型流动

一旦我们知道了 $F(z)$,那么升力和动量立即就可以求得. 进一步,展开 $F(z)$,可以求得对 X、Y 和 M 的显式. 库塔-儒可夫斯基定理给出了绕任意形状柱体的均匀流动的这些表达式.

(对足够大$|z|$)复函数$\frac{dF}{dz}$可以被展开为

$$-\frac{dF}{dz}=U_0e^{-i\varphi}+A/z+B/z^2+\cdots \tag{6.48}$$

因为很清楚,当 $z\to\infty$时,复速度 $-dF/dz$ 变成 U_0,U_0 是自由流速度并如图 6-18 所示通常与 x 轴成 φ 角. 因此,可以确定 F 为

$$F=-U_0e^{-i\varphi}z-A\ln z+B/z+\cdots \tag{6.49}$$

我们看出,第二项正是由于环量所形成的复势. 因此 $A=-i\Gamma/2\pi$. 于是

$$\left(\frac{dF}{dz}\right)^2=U_0^2e^{-2i\varphi}-i\frac{\Gamma U_0e^{-i\varphi}}{\pi z}-\frac{\Gamma^2-8\pi^2BU_0e^{-i\varphi}}{4\pi^2z^2}+\cdots$$

再根据布拉修斯定理和复变量积分理论我们得到

$$X-iY=\frac{1}{2}i\rho\left[2\pi i\left(-i\frac{\Gamma U_0e^{-i\varphi}}{\pi z}\right)\right]=i\rho\Gamma U_0e^{-i\varphi} \tag{6.50}$$

这就是库塔-儒可夫斯基定理．它指出了作用在柱体上的净力(升力)垂直于自由流速度并等于 $-\rho U_0 \Gamma$．通常我们可以得出结论：

1．力始终垂直于自由流速度(并因此称之为升力)；

2．如果 Γ 为负，升力为正(对于在 x 方向 U_0 为正)．没有环量就没有升力；升力仅确定于 Γ(它决定于绕物体流动的压强分布)；

3．如果绕物体的流动为势流并且不发生分离，平行于 U_0 方向上没有力(阻力)．阻力仅由边界层内表面摩擦产生；

4．在实际流动中，只要柱体为流线型，以上结果是准确的并成为亚声速空气动力学的基础．如果发生分离，由于尾迹内压强降低产生阻力，但它不能由势流预言．(除非常小黏性流动外)绕圆柱体的流动始终会发生分离，在那里并不是非常精确的势流流动．

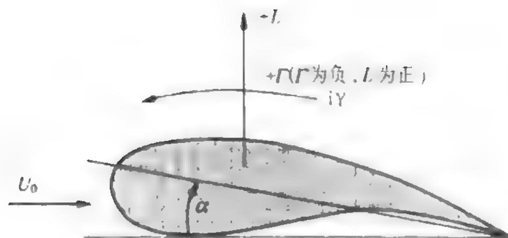


图 6-19　作用在翼型上的升力，α 为迎角，根据 α 的定义，$\alpha=0$ 时，$L=0$

因此，总的说来升力为 $-\rho U_0 \Gamma$，余下的任务是对如图 6-19 所示的已知柱体，如机翼，确定 Γ．迎角 α 是自由流速度和机翼剖面确定的翼弦线之间的夹角．迎角定义为，如果 $\alpha=0$，升力 L 为零，因而 Γ 为零．对于已知柱体形状，当 α 增加时，Γ 增大．直至发生失速或发生分离．所以，随 Γ 降低，升力就突然急剧下降．

6.9　机翼理论

现在我们将应用上一节的结果计算某些简单形状柱体的升力．我们尤其感兴趣的是机翼形状和产生环量的物理原因．如我们已经指出的，环量可以由圆柱体的转动而产生，但是对于机翼，它肯定不会转动，为什么产生环量？其原因可以由儒可夫斯基假设予以解释．儒可夫斯基假设非常简单的叙述是：在实际流动中无限大速度是不允许的．

机翼

如我们已经看到的，升力由于环量产生；并围绕机翼确实存在环量．参照图 6-20，库塔-儒可夫斯基假设指出，根据势流理论，在机翼尾缘奇点的速度必定为无限大，而这在实际流动中是不允许的，流动将自身调整，使驻点向尾缘移动，从面消除了奇点．绕机翼流动的环量值 Γ 恰好是驱使驻点向尾缘移动所需要的数值．很清楚，为实现这一移动 Γ 必定为负值，因此，如前所指出的那样，升力 $L=-\rho_0 U_0 \Gamma$ 为正值．

当流动起始时，势流如图 6-20(a)所示．随流速的增大，驻点移向后部并产生小涡旋，小涡旋脱落并在下游耗散．根据开尔文定理，流体中总环量最终必定为零．因此，Γ 等于但符号相

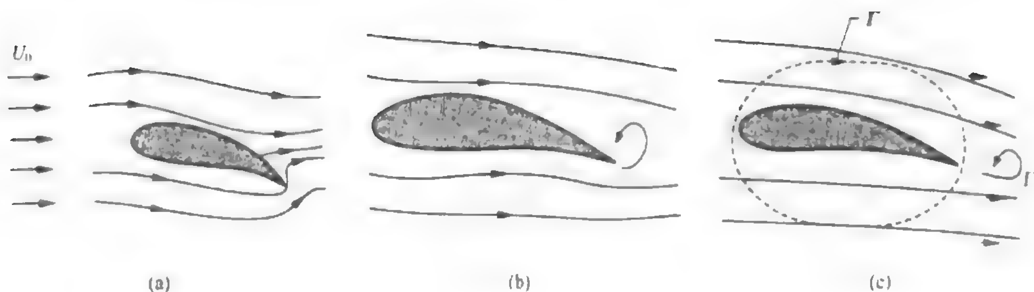


图 6-20　绕翼型的环量及其形成随流速的增大，驻点向尾缘移动并由此决定 L．(a)，(b)和(c)是这一过程的不同阶段

反于绕机翼产生的脱落涡旋，流体中总环量保持为零，但是绕机翼流动的环量为一负数．脱落涡旋流至机翼下游远处，但仍留在空气场中．（包括机翼和空气场的控制容积中的总环量为零．）

在咖啡杯中用一调羹掏出咖啡时可以容易地看到尾迹涡旋的产生．与咖啡有一定迎角提起调羹，你将看到尾迹涡旋的产生和脱落．（见图6-21）

势流和升力计算

绕给定机翼的流动可以用合适的复势 F 来描述．最简单的机翼是儒可夫斯基机翼，它可以由绕圆柱体的流动通过简单的变换得到．参照图6-22，该图表示了在 ζ 平面内绕圆柱体的流动通过儒可夫斯基变换后成为在 z 平面内的流动．因此，从 ζ 平面到 z 平面的变换为



图6-21　咖啡杯中调羹产生的尾涡，弯曲的调羹近似于翘曲的机翼

$$z = \zeta + l^2/\zeta \tag{6.51}$$

以及视在迎角 φ 绕（中心为 C）被变换的圆柱体的流动为

$$F = -U_0\left[(\zeta - be^{i\theta})e^{-i\varphi} + \frac{a^2}{(\zeta - be^{i\theta})e^{-i\varphi}}\right] \tag{6.52}$$

如果 $b=0$（C 位于原点），儒可夫斯基变换将圆柱体变换成中心位于原点，主轴沿 x 轴的椭圆．点 $\zeta=1$ 变换成点 $z=2l$ 并且它是柱体的后缘，在那里 dF/dz 有一个奇点，必须叠加一个合适数量的环量来消除它．

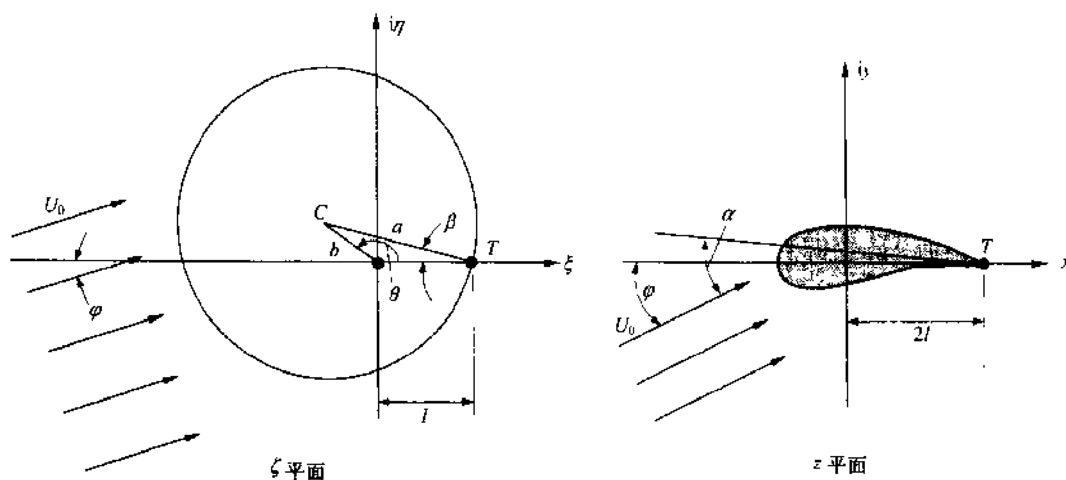


图6-22　儒可夫斯基变换，φ 为视在迎角．$L \perp U_0$，α 为（要确定的）绝对迎角．根据 α 的定义，$\alpha=0$ 时，$L=0$

我们必须在方程(6.52)中加上由于环量产生的复势，以使在后缘的速度为有限值．因此，绕柱体的总复势 $F(\zeta)$ 必须是

$$F(\zeta) = -U_0\left[e^{-i\varphi}(\zeta - be^{i\theta}) + \frac{a^2e^{i\varphi}}{(\zeta - be^{i\theta})}\right] + i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left(\frac{\zeta - be^{i\theta}}{a}\right) \tag{6.53}$$

z 平面中 T 点，（$z=2l$ 和 $\zeta=1$ 的）后缘，的复速度为

$$\left.\frac{dF}{dz}\right|_T = \frac{dF}{d\zeta}\cdot\left.\frac{d\zeta}{dz}\right|_{点T}$$

并且在后缘 $dz/d\zeta = 1 - l^2/\zeta^2 = 0$，因此在后缘 $d\zeta/dz$ 趋于∞，是一个奇点．为使后缘处的 dF/dz 为有限值，在 $z=2l$ 处的 $dF/d\zeta$ 必须为零．这一条件确定了 Γ 的数值，因而也就确定了作

用在机翼上升力的数值.

由方程(6.53)我们求 $dF/d\zeta=0$ 得到

$$\frac{dF}{d\zeta}=-U_0\left(e^{-i\varphi}-\frac{a^2e^{i\varphi}}{(\zeta-be^{i\theta})^2}\right)+i\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(\zeta-be^{i\theta})}=0 \tag{6.54}$$

并由图 6-22,$(\zeta-be^{i\theta})=[\zeta-l+ae^{(-\beta)}]$,因此方程(6.54)给出在 $\zeta=l$ 处

$$-U_0(1-e^{-2i(-\beta)+2i\varphi})+i\frac{\Gamma}{2\pi a}e^{-i(-\beta)+i\varphi}=0 \tag{6.55}$$

由此方程可以解得 Γ. 我们也可以用方程(6.55)的实数部分或虚数部分相等得到同样结果

$$\Gamma=-4\pi aU_0\sin(\beta+\varphi) \tag{6.56}$$

我们看出,Γ 是负值,它决定于自由流速度,视在迎角 φ 和参数 a 和 β. a 和 β 又取决于机翼的尺寸和弯度. 因为 $L=-\rho U_0\Gamma$ 与流线正交,对于正的 $(\beta+\varphi)$,L 为正值. 我们称角 $(\beta+\varphi)$ 为绝对迎角 α. 根据定义,当 $\alpha=0$ 时,升力为零.

在空气动力学中,术语迎角通常是 α,而不是 φ.

升力系数 C_L 定义为

$$C_L=\frac{L}{c\rho U_0^2/2} \tag{6.57}$$

式中 L 为单位机翼长度的升力,c 为机翼的弦长或厚度. 对于儒可夫斯基机翼,$c\approx 4a$,我们得到升力系数为

$$C_L=\frac{\rho U_0(4\pi aU_0)\sin\alpha}{4a\rho U_0^2/2}\cong 2\pi\alpha \tag{6.58}$$

对于小 α,C_L 如方程(6.58)所表示的随 α 线性增加,因此当迫近失速角 α_S 时,由于边界层分离,失去环量升力急剧下降. 失速角和准确的 C_L 与 α 的关系曲线最好由实验确定.

三维效应

作用在机翼上的升力由随机翼运动的线涡(周界涡)产生. 如我们在前面所指出的,这些线涡不会在机翼后缘消失,必须进入自由流(直至由于黏性而耗散). 如果沿机翼环量均匀分布,就如图 6-23 所示那样线涡应该在后缘脱落并以尾涡的形式进入自由流. 然而这一简单的马鞍形涡系并不十分准确,因为一般沿机翼 Γ 是变化的. 沿整个机翼长度涡脱落的结果形成如图 6-24 所示的由不同强度马鞍形涡系叠加而成的涡面. 换句话说,涡面的物理图像可以由想像一个滚珠轴承沿机翼表面向尾端滚动并延伸至机翼下游得到;机翼上方的空气向内流动,机翼下方的空气向外流动. 这一流离机翼尾梢的空气流动方向的差别产生涡层或涡面. 这一流动差别很容易理解,因为在机翼上下以及机翼中部与两端存在有压强差.

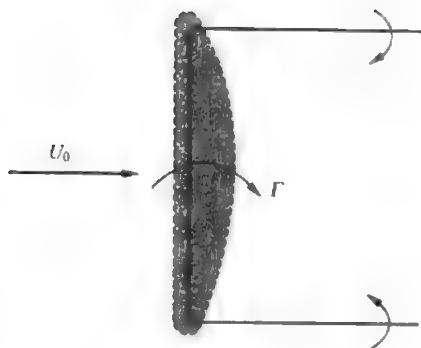


图 6-23 绕三维机翼的简单马鞍形涡谱,该图是机翼的顶视图

最后,在机翼下游几倍机翼长度或更小距离内,涡面形成如图 6-25 所示的两条明显的涡线. 这一现象可以在多喷气发动机飞机飞行时看到(发动机机仓悬挂在机翼下方). 可以看到喷出的蒸汽合并而形成两条明显的尾迹,一条自左机翼流出,一条自右机翼流出.

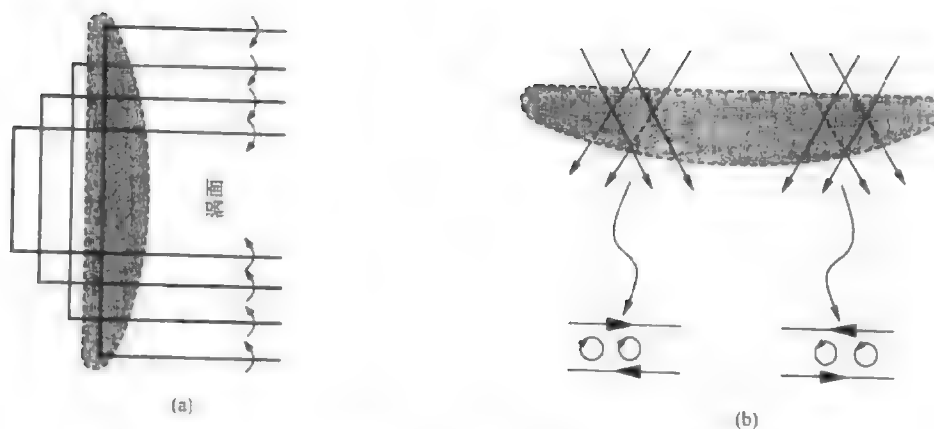


图 6-24　机翼下游的涡面

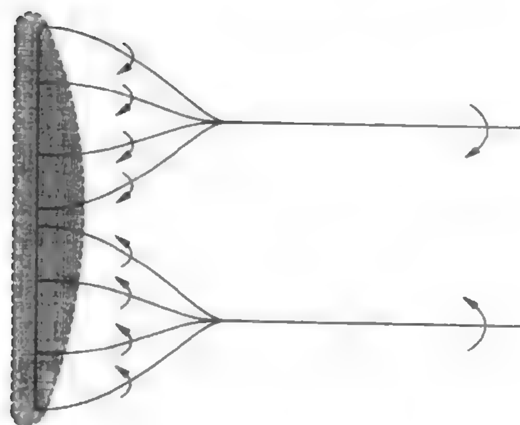


图 6-25　涡面累积成为两个间距略小于机翼翼展的清晰的涡街

要说明的最后一点是诱导阻力．因为涡面，产生气流"下洗"．下洗实际上改变了机翼的迎角，并造成后缘升力矢向后倾斜，与自由流的速度矢之间形成较小的夹角．因此，升力矢有一个平行于飞行方向的分量．这个分量是一个阻力，称为诱导阻力．其余的阻力，翼型阻力，由边界层的表面摩擦阻力和由涡面(即尾迹)中的卡门涡街产生的形阻力所组成．

这里我们不能研究这一问题，但是势流理论和边界层理论一起构成了亚声速空气动力学的基础．

参考文献

1. Batchelor, G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press. 1967.
2. Glauert, H., *The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1948.
3. Karamchetti K., *Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics*, John Wiley, 1966.
4. Kuethe, A.M. and Chow, C., *Foundations of Aerodynamics*, 4th ed., John Wiley, 1986.
5. Lamb, Sir Horace, *Hydrodynamics*, 6th ed., Cambridge University Press, 1932(also Dover).
6. Milne-Thompson, L. M.. *Theoretical Hydrodynamics*, 3rd ed., Macmillan, 1957.
7. Prandtl, L. and Tietjens, O. G., *Applied Hydro-and Aero-mechanics*, Dover, 1957.
8. Robertson, J.M., *Hydrodynamics in Theory and Application*, Prentice-Hall, 1965.
9. Shevell, R.S., *Fundamentals of Flight*, Prentice-Hall, 1983.

例　题

6.1 一龙卷风可以理想化为一个性质如同刚体旋转的风眼或核心的势涡．粗略的估计，风眼直径约为 100ft 量级．压强如何沿风眼附近地面变化？对于一个最大风速为 100mi/h 的龙卷风，最大压强降为多少？这一低压强是龙卷风掀起屋顶和造成其他破坏的部分原因．

解 速度 v_θ 为 $\Gamma/2\pi r$，因此

$$\Gamma = 2\pi r v_\theta = 2\pi(100\text{ft})(100\times 5280/3600\text{ft/sec}) = 9.2\times 10^4\text{ft}^2/\text{sec}$$

根据伯努利方程(假定标准空气压强为 p_0)，

$$p - p_0 = -\frac{1}{2}V^2\rho = -\frac{\Gamma^2\rho}{8\pi^2 r^2} = -\frac{(9.2\times 10^4)^2(0.0023)}{8\pi^2 r^2} = -\frac{2.4\times 10^5}{r^2}\text{psf}$$

负号表示压强低于远离龙卷风处的大气压强．在 $r=100$ft 处(它是最小 r，在那里我们可以应用势流理论)，压强降大约低于大气压强 24.6psf(大约为 1.7psi)．

6.2 图 6-26 是位于距离壁面距离为 a 的一个源．问作用在壁面上的总压强为多少？壁面后($x>0$)的压强为总压强 p_0．

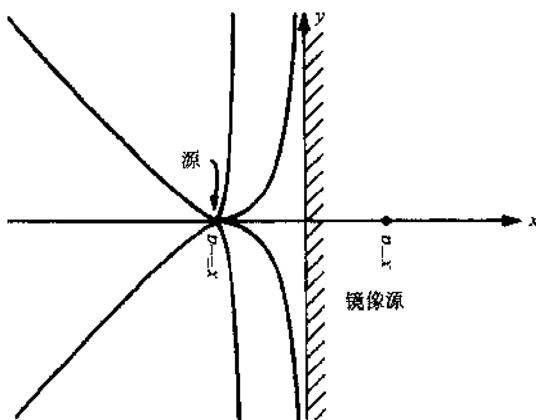


图 6-26

解 当我们将实源如图示置于 $x=-a$ 时，假定一个位于 $x=a$ 镜像源给出的流动．总流动的复势为

$$F = -\frac{Q}{2\pi}[\ln(z+a)+\ln(z-a)]$$

和

$$\bar{F} = -\frac{Q}{2\pi}[\ln(\bar{z}+a)+\ln(\bar{z}-a)]$$

我们求得

$$V^2 = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar{F}}{\mathrm{d}\bar{z}} = \frac{Q^2}{4\pi^2}\left[\frac{1}{(z+a)}+\frac{1}{(z-a)}\right]\left[\frac{1}{(\bar{z}+a)}+\frac{1}{(\bar{z}-a)}\right]$$

它可以简化为以下形式(因为 $z=x+\mathrm{i}y$ 和 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$)．

$$V^2 = \frac{Q^2(x^2+y^2)}{\pi^2[(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)+a^4]}$$

并根据伯努利方程 $p/\rho+\frac{1}{2}V^2=p_0/\rho$，我们求得壁面前后的压强差为 $p-p_0=-\frac{1}{2}V^2\rho$，以及作用在

壁面(垂直于页面)单位长度上的总力(向右为正)为

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty}(p-p_0)\mid_{x=0}\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\rho\int_{-\infty}^{+\infty}V^2\mid_{x=0}\mathrm{d}y = -\frac{\rho Q^2}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^2\mathrm{d}y}{(y^2+a^2)^2} = -\frac{\rho Q^2}{4\pi a}$$

结果为负表示净力向左,壁面被流动吸向实源.

6.3 如果是汇不是源,解习题6.2.

解 ☞ 除现在 Q 为负数外,复势与上相同. 然而,在求解作用在壁面上的力时,Q 表现为平方关系,因此与符号无关. 所以,我们得出结论:无论对于源还是汇,作用在壁面上的净力是相同的,壁面被吸向源或汇.

结果似乎出乎意料,但是在每一种情况下,靠近壁面处速度增加,造成压强下降,因而结果相同.

6.4 风从一斜坡吹下绕过一个半径为 b 的扇形高岗吹向平地. 流动如图6-27所示. 变换这一流动,求 ϕ 和 ψ 的显式.

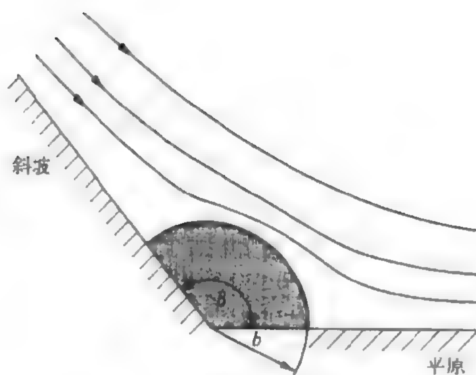


图 6-27

解 ☞ 我们以绕一个圆柱体的流动开始,然后用方程(6.29)进行变换,将它变换成为一个角.

参照图6-28,在 ζ 平面中

$$F(\zeta) = -U_0(\zeta + a^2/\zeta)$$

因此,由 $\zeta = z^\alpha$ 我们有

$$F(z) = -U_0(z^\alpha + a^2/z^\alpha)$$

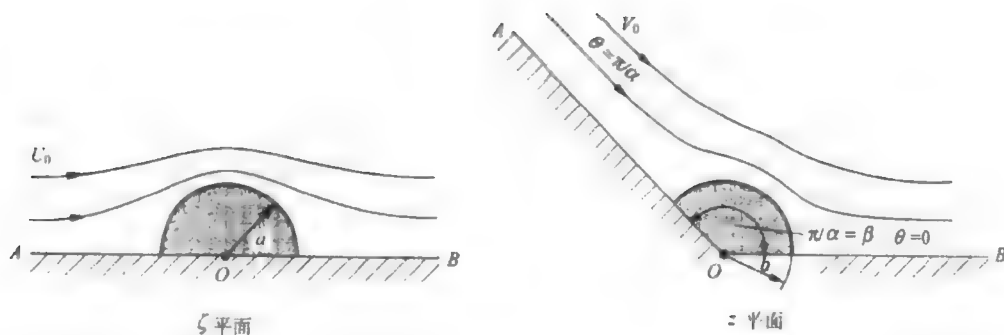


图 6-28

作为在物理 z 平面中的复势,α 由 $\pi/\alpha = \beta$ 给出. 重要的是要指出:在 z 平面中自由流的速度并不均匀,而是随 r 和 θ 而变化. 当在作儒可夫斯基机翼变换时,U_0 并不能从 ζ 平面直接变换至 z 平面. 此外,在 ζ 平面中圆的半径 a 也不与 z 平面中的扇形半径相等.

我们有

$$z^\alpha = r^\alpha e^{\alpha i\theta} = r^\alpha(\cos\alpha\theta + i\sin\alpha\theta)$$

及

$$F = -U_0[r^{\alpha}(\cos\alpha\theta + \mathrm{i}\sin\alpha\theta) + (a^2/r^{\alpha})(\cos\alpha\theta - \mathrm{i}\sin\alpha\theta)]$$

因此

$$\phi = \mathrm{Re}F = -U_0 r^{\alpha}[\cos\alpha\theta + a^2 r^{-2\alpha}\cos\alpha\theta]$$

$$\psi = \mathrm{Im}F = -U_0 r^{\alpha}[\sin\alpha\theta - a^2 r^{-2\alpha}\sin\alpha\theta]$$

自由流速度的性质可以从求由 $-\partial\phi/\partial r$ 给出的径向速度 v_r 看出

$$v_r = \alpha U_0 r^{\alpha-1}[\cos\alpha\theta - a^2 r^{-2\alpha}\cos\alpha\theta]$$

因此,对于 $\theta=\pi/2$(沿壁面)我们有

$$v_r|_{\theta=\pi/\alpha} = -\alpha U_0[r^{\alpha-1} - a^2 r^{-(1+\alpha)}]$$

对于大 r 和 $\alpha>1$, $v_r|_{\theta=\pi/2}$ 变大,并近似等于 $-\alpha U_0 r^{(\alpha-1)}$. 负号表示从无穷远处向内流动.

可以将半径 b 与半径 a 联系起来. 半径 b 由令 $v_r=0$ 确定,于是

$$1 - a^2 r^{-2\alpha}|_{r=b} = 0 \text{ 由此 } b = a^{1/\alpha}$$

6.5 变换

$$z = C(\zeta + \lambda\zeta^{-1}),\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ 0 \leqslant C$$

将 ζ 平面内具有单位半径的一个圆变换至 z 平面中的一个椭圆,如图 6-29 所示.

(a) 用这一变换求绕图 6-29 所示的具有半轴为 a 和 b 的椭圆形柱体稳定流动的复势 $F(z)$. 无穷远处未受干扰的速度数值为 U_0,它与 x 轴的夹角为 α.

(b) 令 $z=k\cosh\gamma$, k 为一实数以及 $\gamma=\xi+\mathrm{i}\eta$. 因此,等 ξ 线是一簇 z 平面内的椭圆,以及等 η 线是一簇正交于椭圆的共焦双曲线. 在 z 平面内所形成的等 ξ 和等 η 网格称为椭圆坐标. 应用这些椭圆坐标并以 V 代表(a)中所描述的椭圆柱体表面上流动速度的数值,在 $\alpha=0$ 时以 η 表示 V.

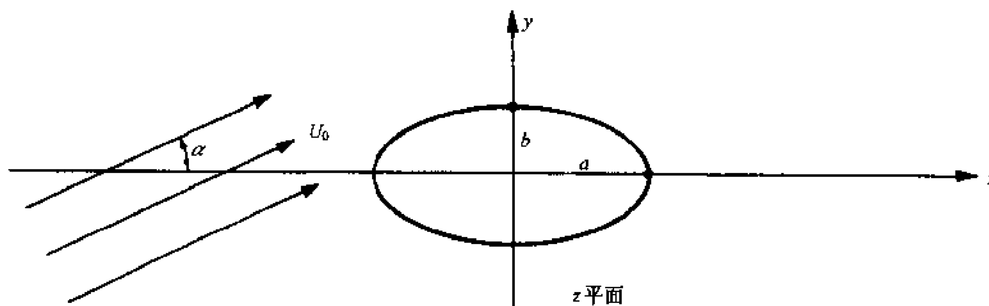


图 6-29

解 (a)让我们首先研究 $\zeta-z$ 变换, $z=C(\zeta+\lambda\zeta^{-1})$. 令对于一个单位半径的圆 $\zeta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,以及 $z=x+\mathrm{i}y$. 因此

$$z = C(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) = C(1+\lambda)\cos\theta + \mathrm{i}C(1-\lambda)\sin\theta$$

和 $x=C(1+\lambda)\cos\theta$, $y=C(1+\lambda)\sin\theta$,所以 $\dfrac{x^2}{C^2(1+\lambda)^2}+\dfrac{y^2}{C^2(1+\lambda)^2}=1$. 因此

$$a = C(1+\lambda),\ b = C(1-\lambda);\ C = (a+b)/2,\ 4C^2\lambda = a^2 - b^2 \tag{1}$$

现在,对于图 6-30 所示的在 γ 平面中绕单位半径圆的流动

$$F(\gamma) = A(\gamma + \gamma^{-1})$$

因此 $\zeta=\gamma\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$,所以

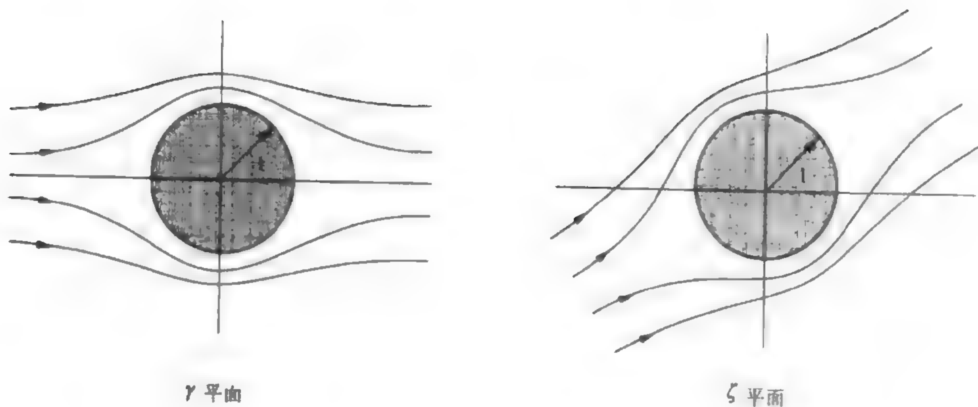


图 6-30

$$F(\zeta)=A(\zeta e^{-i\alpha}+\zeta^{-1}e^{i\alpha})$$

由给定的变换 $z=C(\zeta+\lambda\zeta^{-1})$，我们得到

$$\zeta=\frac{1}{2C}(z\pm\sqrt{z^2-4C^2\lambda})$$

这里我们取正号，所以是图 6-30ζ 平面中圆外侧的定义域变换至 z 平面内椭圆外侧的定义域．因此

$$F(z)=A\left[\frac{e^{-i\alpha}}{2C}(z+\sqrt{z^2-4C^2\lambda})+\frac{2Ce^{i\alpha}}{(z+\sqrt{z^2-4C^2\lambda})}\right] \tag{2}$$

现在

$$\left.\frac{dF}{dz}\right|_{z\to\infty}=\frac{A}{C}e^{-i\alpha}，而-\left.\frac{dF}{dz}\right|_{z\to\infty}=(u-iv)\mid_{z\to\infty}=U_0e^{-i\alpha}$$

因而

$$A/C=-U_0 \tag{3}$$

应用由方程(1)和(3)得到的 C,λ 和 A 的数值，方程(2)变成

$$F(z)=-\frac{1}{2}U_0(a+b)\left\{\frac{[z+\sqrt{z^2-(a^2-b^2)}]e^{-i\alpha}}{a+b}+\frac{[z-\sqrt{z^2-(a^2-b^2)}]e^{i\alpha}}{a-b}\right\} \tag{4}$$

(b) 我们已知 $z=k\cosh\gamma$，$\gamma=\xi+i\eta$，我们可以写出

$$x+iy=k\cosh(\xi+i\eta)=k(\cosh\xi\cos\eta+i\sinh\xi\sin\eta)$$

因此

$$\frac{x^2}{k^2\cosh^2\xi}+\frac{y^2}{k^2\sinh^2\xi}=1,\qquad \frac{x^2}{k^2\cos^2\eta}-\frac{y^2}{k^2\sin^2\eta}=1$$

令 $\xi=\xi_0$ 代表 z 平面中半轴为 a 和 b 的椭圆；所以 $k\cosh\xi_0=a$ 以及 $k\sinh\xi_0=b$ 或

$$\left.\begin{aligned}&k^2=a^2-b^2,\ \tanh\xi_0=b/a\\&\frac{e^{2\xi_0}}{(a+b)^2}=\frac{e^{-2\xi_0}}{(a-b)^2}=\frac{1}{k^2}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(在 $x=0$ 条件下)方程(4)变为

$$F(\gamma)=-\frac{1}{2}U_0(a+b)\sqrt{a^2-b^2}\left(\frac{e^{\gamma}}{a+b}+\frac{e^{-\gamma}}{a-b}\right)$$

$$\bar{F}(\bar{\gamma})=-\frac{1}{2}U_0(a+b)\sqrt{a^2-b^2}\left(\frac{e^{\bar{\gamma}}}{a+b}+\frac{e^{-\bar{\gamma}}}{a-b}\right)$$

$$(V_\gamma^2)_{\xi=\xi_0}=\frac{dF}{d\gamma}\cdot\frac{d\bar{F}}{d\bar{\gamma}}=\frac{U_0^2}{4}(a+b)^2(a^2-b^2)\left\{\frac{e^{2\xi}}{(a+b)^2}+\frac{e^{-2\xi}}{(a-b)^2}-\frac{e^{2i\eta}}{(a^2-b^2)}-\frac{e^{-2i\eta}}{(a^2-b^2)}\right\}$$

方程(5)给出

$$V_\gamma^2|_{\xi=\xi_0} = \frac{1}{4}U_0^2(a+b)^2|2-2\cos 2\eta| = U^2(a+b)^2\sin^2\eta$$

$$V^2 = V_z^2|_{\xi=\xi_0} = \frac{V_\gamma^2|_{\xi=\xi_0}}{|\mathrm{d}z/\mathrm{d}\gamma|^2_{\xi=\xi_0}} = U_0^2\left(\frac{a+b}{a-b}\right)\left(\frac{\sin^2\eta}{\sin^2\eta+\sinh^2\xi_0}\right)$$

式中 $\xi_0=\mathrm{arth}b/a$.

6.6 求图 6-31 所示位于一个二维槽道中间平面内的源的复势.

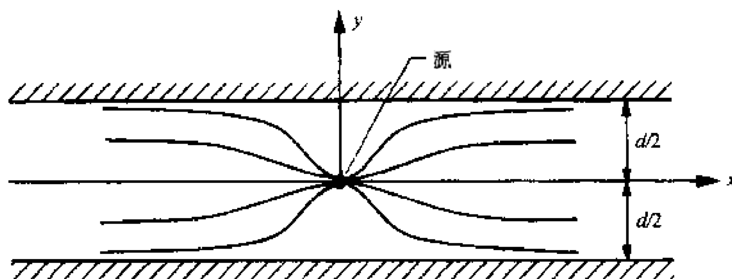


图 6-31

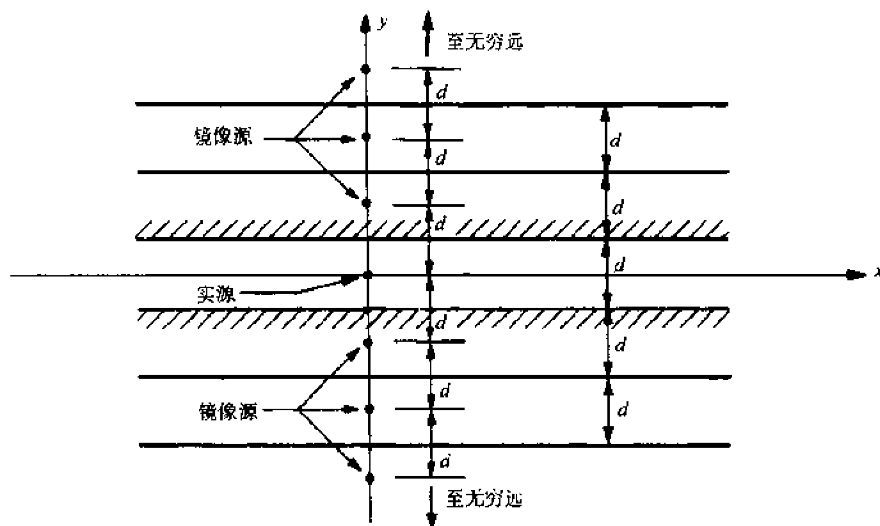


图 6-32

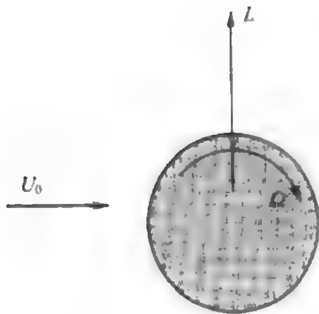


图 6-33

解 ☞　根据镜像法,我们构筑一个如图 6-32 所示的无限列阵.

因此,复势由所有镜像的复势求和得到

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{Q}{2\pi}\ln(z+\mathrm{i}nd) + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{Q}{2\pi}\ln(z-\mathrm{i}nd)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -\frac{Q}{2\pi}\ln(z+\mathrm{i}nd) = -\frac{Q}{2\pi}\ln\left(\sinh\frac{\pi z}{d}\right)$$

由 $-d/2<y<d/2$ 区域内计算 F,我们可以得到位于 $\pm d/2$ 处的壁面之间的流动.

我们求得 ϕ 和 ψ 为

$$\phi = -\frac{Q}{2\pi}\ln\left(\sinh\frac{\pi x}{d}\cos\frac{\pi y}{d}\right), \psi = -\frac{Q}{2\pi}\ln\left(\cosh\frac{\pi x}{d}\sin\frac{\pi y}{d}\right)$$

6.7 标准状态的空气以 100ft/sec 的速度绕图 6-33 所示的直径为 1in 的圆柱体流动，圆柱体以 3600rpm 的转速转动．计算作用于圆柱(单位长度上)的升力．

解 用 $L=-\rho U_0\Gamma$，由假定

$$\Gamma=\oint \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_0^{2\pi}-(r\Omega)(r\mathrm{d}\theta)=-2\pi r^2\Omega$$

$$=-2\pi(1/24\mathrm{ft})^2(3600\times 2\pi/60\mathrm{rad/sec})=-4.1\mathrm{ft}^2/\mathrm{sec}$$

可以计算得到环量 Γ．因此

$$L=-\rho U_0\Gamma=-(0.0023\mathrm{slug/ft}^3)(100\mathrm{ft/sec})(-4.1\mathrm{ft}^2/\mathrm{sec})$$
$$=0.94\mathrm{lb/ft}$$

6.8 图 6-34 是绕(对称于 x 轴的)任意形状 $f(x)$ 二维柱体的流动，它当然可以由合适的沿 x 轴的分布函数 $q(x)$ 确定．对于给定的形状 $y=f(x)$，假定柱体的前缘位于坐标原点，求 $q(x)$．

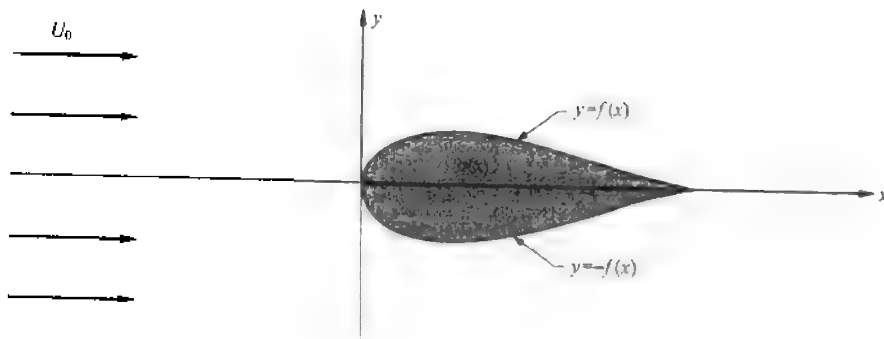


图 6-34

解 柱体表面，$\pm f(x)$ 为流线型．显然，沿 x 轴分布函数 $q(x)$ 必须变换符号并没有流体穿过柱体的边界 $\pm f(x)$．

对于任意源元 $q(x)\mathrm{d}x$，复势为

$$\mathrm{d}F=-\frac{q(x')\mathrm{d}x'}{2\pi}\ln(z-x')$$

式中我们用 x' 表示积分变量，x' 为相对于复平面 $z=x+\mathrm{i}y$ 中 x 的所要计算的 F 的位置．因此

$$F=\int_0^L-\frac{q(x')}{2\pi}\ln(z-x')\mathrm{d}x'$$

但是 F 的镜像部分为 ψ，并且与 $y=f(x)$ 相同，$\psi(x,\ y)=$ 任意常数 $=0$．取复势 F 的虚数部分，我们有

$$\mathrm{Im}F=\psi=\int_0^L-\frac{q(x')}{2\pi}\arctan\frac{y}{x-x'}\mathrm{d}x'$$

因为在表面处 $y=f(x)$ 和 $\psi=0$，有

$$0=\int_0^L-\frac{q(x')}{2\pi}\arctan\frac{f(x)}{x-x'}\mathrm{d}x'$$

这就是要求解的 $q(x)$ 的积分方程．一般，求解并不容易．绕兰金椭圆柱体(图 6-10)的流动是这种方法特别简单的例子．

这一技术对绕飞船和船身流动的计算很有用．

补 充 习 题

6.9 流体中涡管的端部是否能，还是一定能形成环形？

6.10 在龙卷风中,你能确定涡丝,还是只能确定涡管? 设其中心为均匀截面.

6.11 在黏性剪切流中,能确定涡丝吗? 能确定涡管吗? 在泊肃叶流动中,涡线是什么形状?

6.12 为什么空气绕机翼上部流动向内,指向机翼中心,而在机翼底部流动向外,指向尾端?

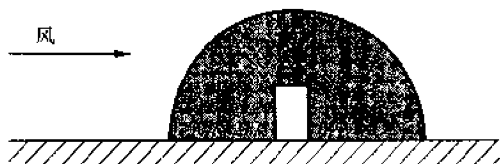


图 6-35

6.13 由于风的绕流,一个北极圆顶活动小屋经受一个升力. 小屋的形状近似为半圆形. 0℉的空气形成的风速为 80mph,求作用在图 6-35 所示的直径为 10ft 的活动小屋单位长度上的升力.

6.14 在上一习题中,当小屋的门为左开时,门的位置在确定升力中是否重要?

6.15 讨论 $z = C\cosh F$ 的流动,证明

$$x = C\cosh\phi\cos\psi,\ y = C\sinh\phi\sin\psi$$

和流线(ψ= 常数)为共轭双曲线,并且这一流形可以描述流过一小孔的流动.

6.16 计算离壁面距离为 a,强度为 m 的一偶极子作用在壁面上的力. 假定壁面平行于 x 轴和偶极子的方向与 x 轴平行.

6.17 如果上一习题中偶极子的方向与壁面倾斜成 α 角,力为多大?

6.18 如果习题 6.16 和 6.17 中我们取偶极子的强度为 $-m$,将会发生什么? 作用在壁面上力的符号会改变吗?

6.19 讨论 $F = z^2 - 1$ 的运动.

6.20 求图 6-36 中由位于宽度为 d 的槽道壁面上的一个源所产生的流动的 F,ϕ 和 ψ 并绘出流线.(提示:构筑一个镜像无限列阵并求和.)

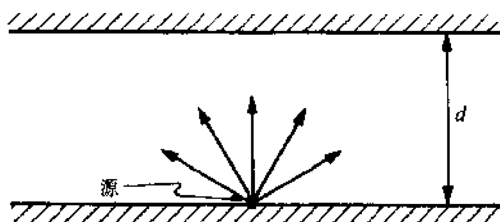


图 6-36

6.21 讨论 $F = Az^2$ 的运动.

6.22 讨论 $z^2 = F^3$ 的运动.

6.23 求图 6-37 所示流过具有两个对称源的槽道流动的 F 并画出其流线.

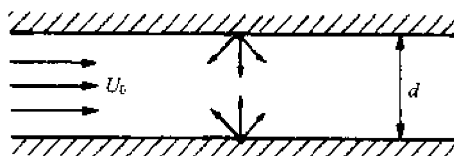


图 6-37

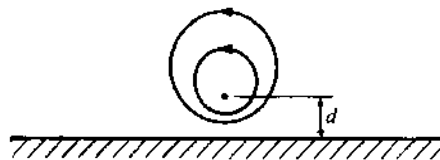


图 6-38

6.24 一势涡位于离壁面 d 处. 讨论其流动. 见图 6-38.

6.25 讨论图 6-39 中绕一靠近于壁面的圆柱体的流动. 假定 $d \gg D$.

6.26 如果习题 6.25 中的圆柱体以角速度 Ω 绕其轴转动,讨论其流动.

6.27 讨论习题 6.26 中作用在圆柱体上的力.

6.28 如图 6-40 所示为一张有转动手柄的重量很轻的卡片,手柄插入一个两端具有凸缘的卷筒中. 如果我们通过卷筒向下微微吹入空气,卡片能够维持原位而不下落. 为什么? 实际上,空气在进入径向通道时改变了速度方向,卡片与卷筒之间的流动类似于势源流动. 求沿卡片表面的压强分布. 它能解释升

力吗？

如果我们通过卷筒向下吹入非常强劲的空气，卡片下落．为什么？通过卷筒冲下的空气的动量为多少？如果空气开始径向流动，空气必须改变它的方向．这有助于解释升力吗？

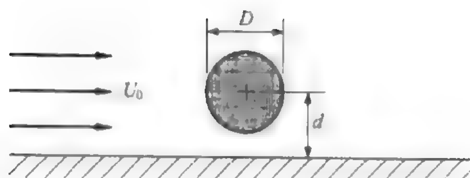


图 6-39

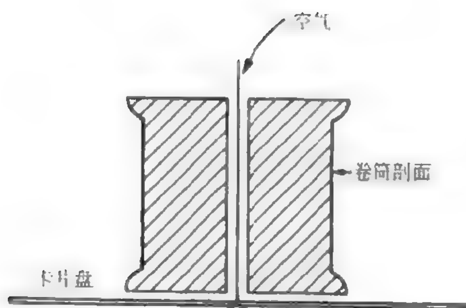


图 6-40

6.29 一个源位于 z_1 和一个汇位于 z_2．对于一般的源和汇强度，F，ϕ 和 ψ 是什么？

6.30 对于位于沿同一条线 $z=e^{i\alpha}$ 上的同等强度，距原点距离都为 a，并浸埋在沿 x 轴均匀流动中的一个源和汇，画出其流线．

6.31 对于一个位于图 6-41 所示直角内的源，复势是什么？求复速度．

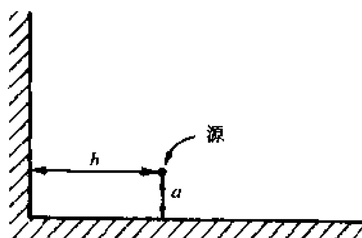


图 6-41

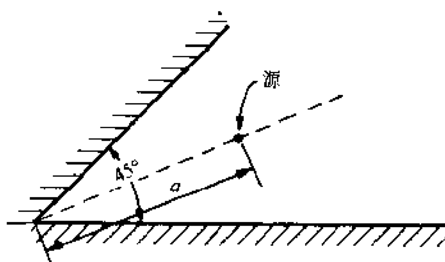


图 6-42

6.32 对于位于 45°角之角平分线上，离角顶点距离为 a 的一个源，求 F 并描述其流动．见图 6-42．

6.33 对一环量为 Γ，刚体核心直径为 a 的龙卷风，计算龙卷风内的压强分布．你是否认为这一低压强可以对龙卷风的毁坏作用负责？

6.34 图 6-43 表示一个海洋涡旋．沿 A-A 线，压强从大直径处的流体静力学值 ρgh 降至 $p=0$(表压值)．根据势涡理论推导涡旋自由表面的方程．在足够深的涡旋中心会发生什么？这一涡旋能否终止，还是能一直延伸到海底？你能解释为什么涡旋能将物体吸入海中吗？

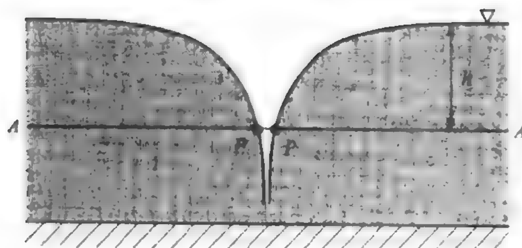


图 6-43

6.35 在第三章习题 3.14 中我们讨论了喷水器的运动和相互作用力矩．当水离开喷嘴时，由于反冲而转动．考虑以下问题：将相同的喷水器完全浸埋在一个大游泳池或湖泊中．水通过喷嘴从池中吸出并通过软管返回，供给喷嘴．当水被泵出喷嘴时，喷水器会在相反方向转动吗？它当真会转动吗？提示：当喷水

器工作时，水以射流形式离开喷嘴．但是当水被吸入喷嘴时，它是以射流形式进入喷嘴，或喷嘴的作用像势流中的一个汇吗？这一问题随后由物理学家理查德-费曼在他的书：《费曼先生，你肯定在说笑话》（诺顿，1985）中进行了讨论．在他的书中对此进行了解释，并由约翰-惠勒在1989年2月的 Physics Today 杂志第24页上进行了讨论．

答案：没有转动，喷嘴的作用像一个汇．

6.36 详细推导非定常流动伯努利方程(6.9)．

第六章符号表

F = 复势
Im = 表示镜像部分
L = 升力
M = 动量
p = 压强
p_0 = 总压强
p_∞ = $V = U_0$ 的自由流压强
Q = 容积流率
Re = 虚数的实数部分
U_0 = 自由流速度
u = 速度的 x 分量
$\boldsymbol{V}$ = 速度矢
v = 速度的 y 分量
v_r = 速度的 r 分量
v_θ = 速度的 θ 分量
w = 速度的 z 分量
X = 力的 x 分量
Y = 力的 y 分量
$z = (x + iy)$ = 复变量
Γ = 环量
ρ = 密度
ϕ = 速度势
ψ = 流函数，重力势
$\boldsymbol{\Omega}$ = 角速度矢
$\boldsymbol{\omega}$ = 涡量或转动矢
$(\bar{\ })$ = 表示复共轭

第七章　一维可压缩流动

7.1　引言

对许多实际流动，利用“无摩擦”和“不可压缩”假设可以获得相当准确的模型和描述（见第六章）．在另一些流动中，黏性则是重要的（见第五章）．本章考虑一维可压缩流动，在决定这种流动的特征时．密度变化具有很大的重要性．尽管一维流动的限定似乎相当严厉，然而，对许多实际流动而言，可以发现这种物理模型是一种很好的近似．

本章仅限于讨论内部流动．在应用一维假设时，认为在管道的任一横截面上所有的量（压强、温度、速度等）是均匀的①．

内流（各种管流）沿管道的特性变化可能是由面积改变、加热或摩擦引起的．事实上，在实际流动中这些影响因素会同时发生．然而，在以下的研究中每次仅考虑一种因素的影响．这样做的理由有二：一是对许多流动而言，实际上只有一个影响因素是重要的；二是便于更好地理解各种影响因素在许多一般流动中所起的作用．

理想气体近似

理想气体近似对低密度或中等密度气体是有效的．这一近似使得气体性质之间的关系可以方便地用一个总的数学模型来表示．例如，若假定流体是理想气体，则有

$$pv = RT \tag{7.1}$$

式中 p 是绝对压强，v 是比容，R 是气体常数，T 是绝对温度．另外，若假定在定容和定压条件下的比热不随温度变化，那么在物态 1 和物态 2 之间有下列辅助的特性关系式：

$$u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1) \tag{7.2}$$

$$h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) \tag{7.3}$$

其中 u 为比内能，h 为比焓，c_v 和 c_p 分别为定容比热和定压比热．如果进一步假定流动是无摩擦和绝热的（即等熵的），再利用理想气体物态方程，则可得到如下描述压强的方程

$$p(1/\rho)^k = pv^k = 常数 \tag{7.4}$$

其中 k 是比热比，即 $k = c_p/c_v$．

无限小扰动的传播

流体中的扰动将以某种有明确意义的，并与流体性质有关的速度在流体中传播．如果扰动无限小，则这种扰动的传播速度称为**声速**．声速是流体自身的物性，在可压缩流动中声速是非常重要的特性．



图 7-1　声波的传播

通过考察一根长管中的流体可以确定声速，如图 7-1 所示．一旦管中出现无限小扰动，其波阵面将以速度 a 运动．把坐标系取在波上，

---

① 严格地讲，一维流动定义为描述这种流动仅需一个空间坐标的流动．这可以认为是一种完全发展的管流．然而，我们仅关注每一横截面上满足均匀条件的流动．

那么未受扰动的流体将以速度 a 相对于波阵面运动.

横截面积为 A 的控制体的动量方程为

$$A[p-(p+\mathrm{d}p)]=\rho Aa[(a+\mathrm{d}V)-a]$$

由此可得

$$-\mathrm{d}p=\rho a\mathrm{d}V$$

其中 ρ 是密度, a 是声波的速度,即声速. 控制体的连续方程为

$$\rho Aa=(\rho+\mathrm{d}\rho)(a+\mathrm{d}V)A$$

通过简化并忽略高阶项,可得

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=-\frac{\mathrm{d}V}{a}$$

组合动量方程与连续方程,有

$$\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho=a^2$$

该方程常常写成

$$(\partial p/\partial\rho)_s=a^2 \tag{7.5}$$

因为扰动为无限小,因此这样的过程是可逆的、绝热的,故而是等熵的,上式导数的下标 s 即表示等熵.

对理想气体,利用方程(7.4)可得

$$a^2=kRT \tag{7.6}$$

马赫锥

在滞止流体中,某点处的小扰动将沿径向向四周传播,不同时刻形成的波阵面是同心球面,如图 7-2 所示. 进而,如果允许扰动源以速度 V 运动,并且 V 小于 a,描述不同时刻的波阵面仍为球面,但是这些波阵面不再同心,这种情况如图 7-3 所示. 如果 $V>a$(也就是相当于扰动速度大于声速),则形成一个锥形表面. 该表面的一侧,流动不受扰动;而另一侧能感受到波的影响,如图 7-4 所示,其半锥角 $\alpha=\arcsin(a/V)=\arcsin(1/M)$,这里 $M=V/a$ 是马赫数.

图 7-3 和图 7-4 所示的扰动可以想像成扰动是不动的,而流体以速度 V 自右向左运动,由此所得到的图像是相同的. 这两个图像表明了亚声速与超声速流动的基本差别. 在亚声速流动中, $M<1$,整个流动都能感受到无限小的扰动;在超声速流动中, $M>1$,则仅是部分流动可感受到扰动. 这导致亚声速与超声速的流动特性有一些有趣而重要的差别.

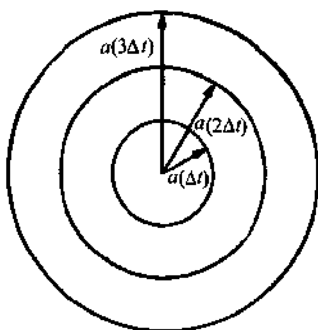


图 7-2　静止的无限小扰动

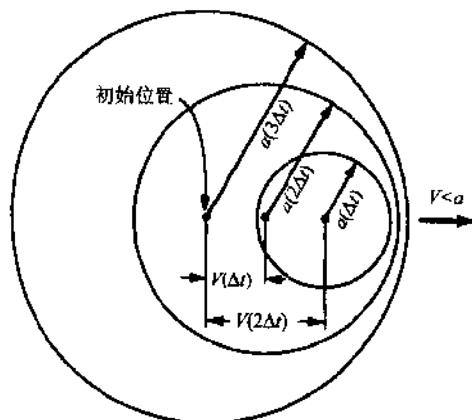


图 7-3　$V<a$ 的无限小扰动

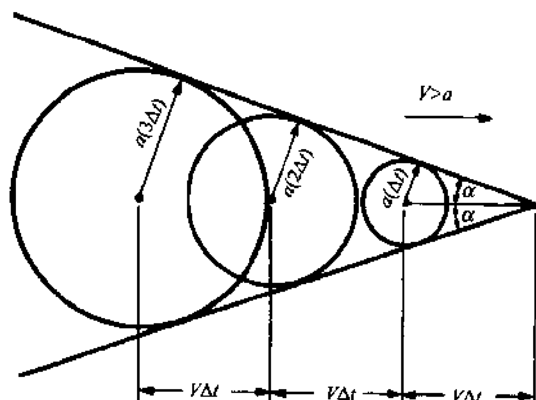


图 7-4　$V>a$ 的无限小扰动，$\alpha=\arcsin(1/M)$

7.2　等熵流动

许多流动可相当准确地描述为等熵流动．这种假设意味着流动是无摩擦和绝热的，并且在流动性质上不存在间断．这种流动例子有：(1)只有小速度梯度和小温度梯度的外部流动；(2)喷管和扩张管中的内部流动，其中面积变化是引起流动特性变化的最主要原因．

面积变化的影响

不作轴功的理想气体定常一维绝热流动的能量方程是

$$V^2/2+c_pT=\text{常数}$$

利用声速方程(7.6)，可得

$$V^2/2+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}=\text{常数}$$

求微分给出

$$V\mathrm{d}V+a^2\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=0 \tag{7.7}$$

对一维定常流动连续方程求微分可得

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}A}{A}+\frac{\mathrm{d}V}{V}=0 \tag{7.8}$$

联合方程(7.7)和(7.8)可得

$$\frac{\mathrm{d}A}{A}=\frac{\mathrm{d}V}{V}(M^2-1) \tag{7.9}$$

类似地可导出 $\mathrm{d}M$ 的表达式

$$\frac{\mathrm{d}M}{M}=\frac{1+[(k-1)/2]M^2}{M^2-1}\mathrm{d}A \tag{7.9a}$$

由方程(7.9)和(7.9a)可得到一些有趣而意要的结果．可以发现若 $M<1$，增大面积造成的结果是速度减小；然而，若 $M>1$，其结果正好相反．根据方程(7.9a)可看出马赫数要平滑地通过 $1(M=1)$，$\mathrm{d}A$ 必须为零．表 7.1 概述了由方程(7.9)和(7.9a)得到的结论．

收缩喷管流动

现在研究如图 7-5 所示的收缩管道中的流动．假定流体为理想气体，流动是一维、定常、

表 7.1 面积变化对 V 和 M 的影响

	$M<1$	$M>1$
$dA<0$	V 增大 M 增大	V 减小 M 减小
$dA>0$	V 减小 M 减小	V 增大 M 增大

绝热和无摩擦的. 连续方程是

$$\dot{m} = A_2 V_2 / v_2 \tag{7.10}$$

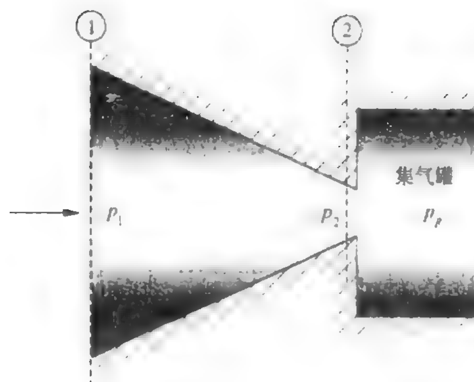


图 7-5 收缩喷管

其中 $\dot{m}$ 是质量流率,$v=1/\rho$ 是比容. 用焓 h 表示的能量方程是

$$\frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) = h_1 - h_2 \tag{7.11}$$

若假定 $V_1 \ll V_2$,并利用等熵关系和物性参数关系,方程(7.11)可改写成

$$V_2 = \left\{\frac{2k}{k-1} p_1 v_1 \left[1 - (p_2/p_1)^{(k-1)/k}\right]\right\}^{1/2} \tag{7.12}$$

根据等熵关系 $p_1 v_1^k = p_2 v_2^k$,合并方程(7.10)和(7.12)可给出

$$\dot{m}/A_2 = \left\{\frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{v_1}\left[(p_2/p_1)^{2/k} - (p_2/p_1)^{(k+1)/k}\right]\right\}^{1/2} \tag{7.13}$$

如果令入口条件不变,那么质量流量的变化仅是由 p_2 的变化引起的. 其结果示于图 7-6,这是由方程(7.13)作出的曲线图. 然而,实际的质量流量值是 $\dot{m}$ 对 p_R/p_1 的曲线,这里 p_R 是集气罐压强.

实际结果与预测结果之间有某些明显的差异. 集气罐压强从 $p_R/p_1 = 1.0$ 减小至质量流量达到最大值所对应的 p_R/p_1 值的区间内,实际结果与方程预测结果是很好吻合的. 当集气罐压强进一步下降时,质量流率不再变化. 通过实验还可发现喉部压强 p_2 永远不会小于最大质量流量时的喉部压强值. 此最小喉部压强称为临界压强 p_c,该值可以通过对方程(7.13)求导数,并令其为零求得. 由此有

$$(p_2/p_1)_{最大流量} = p_c/p_1 = [2/(k+1)]^{k/(k-1)} \tag{7.14}$$

通过联立方程(7.12)和(7.14)可以发现在临界压强处的马赫数等于 1. 基于上一节的讨论,这一结果并不意外. 因此,为了获得马赫数大于 1 的流动,必须在收缩喷管后延伸一扩张段.

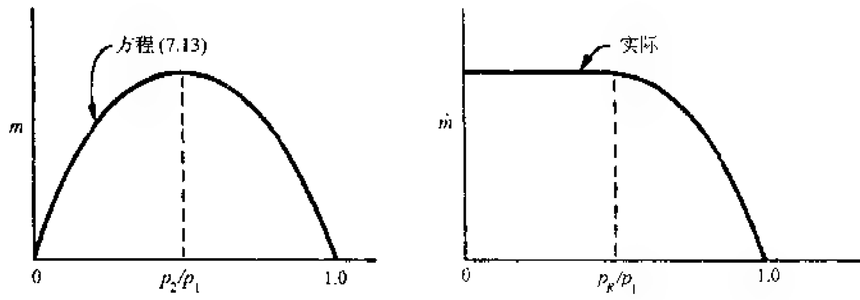
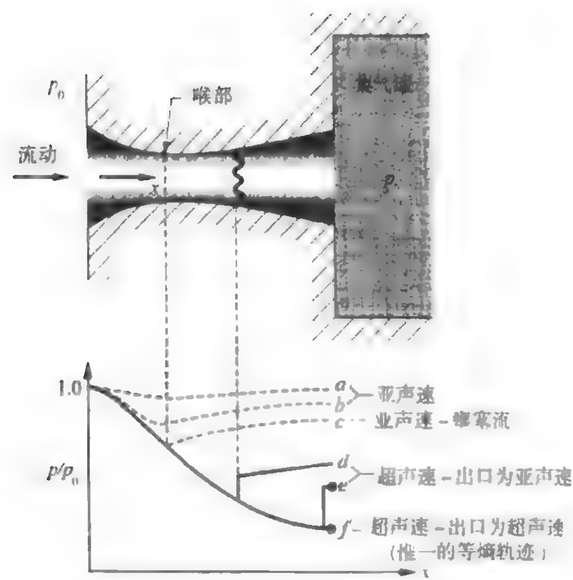


图 7-6 收缩喷管中的质量流量

收缩-扩张喷管



两者相差不超过百分之几.

在有些问题中,设计者连几个百分点的预测偏差都不想要,这时就必须考虑流动是否是真正一维的?是否存在边界层?是否有传热?或气体是否是理想气体?

等熵方程

如果流动是一维、定常、绝热的,并且流体是理想气体.那么在位置1和位置2之间的能量方程是

$$c_pT_1+\frac{V_1^2}{2}=c_pT_2+\frac{V_2^2}{2}=c_pT_0=h_0 \tag{7.15}$$

式中 T_0 是驻点温度或储气罐温度,这是在绝热条件下流体变为静止所达到的温度.h_0 是驻点比焓.应指出的是,如果流动是绝热的,那么驻点温度 T_0 沿流线是常数,这时并不要求流动是等熵的.用马赫数代替速度,并利用 $c_p-c_v=R$,则能量方程变为

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{1+\frac{1}{2}(k-1)M_1^2}{1+\frac{1}{2}(k-1)M_2^2} \tag{7.16}$$

如果利用理想气体压强与温度之间的等熵关系,则有

$$\frac{p_2}{p_1}=\left[\frac{1+\frac{1}{2}(k-1)M_1^2}{1+\frac{1}{2}(k-1)M_2^2}\right]^{k/(k-1)} \tag{7.17}$$

质量流量可以表示为

$$\dot{m}=\rho AV$$

或者,用马赫数表示为

$$\dot{m}/A=\sqrt{k/RT}pM \tag{7.18}$$

驻点压强 p_0 是流体通过等熵滞止所达到的压强.对喷管等熵流动而言.驻点压强就是储气罐压强.对任何流体状态,总可以认为是从压强为 p_0 的容器通过一个假想的等熵喷管把流动输送到该状态.

在等熵流动中,沿流线驻点压强为常数,也就是 $p_{01}=p_{02}$.然而,若流动绝热,但并不等熵,那么沿流动的驻点温度 T_0 仍为常数,但 p_0 不是常数.

利用声速表达式 $a^2=kRT$ 和绝热(不必等熵)流动的能量方程可以获得理想气体等熵流动的其他结果.

$$\frac{V^2}{2}+\frac{a^2}{k-1}=\frac{a_0^2}{k-1} \tag{7.19}$$

$$\frac{a_0^2}{a^2}=\frac{T_0}{T}=1+\frac{k-1}{2}M^2 \tag{7.20}$$

再利用等熵流动方程(7.4)可获得

$$\frac{p_0}{p}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{k/(k-1)} \tag{7.21}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{1/(k-1)} \tag{7.22}$$

在管道中,特别是喷管内,面积 A 是一个重要参数. 这里用带星号的量( )* 表示马赫数为 1 处的条件或特性. 由连续方程

$$\dot{m} = \rho AV = \rho^* A^* a^* \tag{7.23}$$

式中 A^* 为虚构的喉部面积,这是通过等熵途径达到声速状态所需要的面积. A^* 在管道中可能存在,也可能实际上并不存在,这取决于管道中能否实现声速状态. 如果能达到声速状态,则有 $A_t = A^*$,这里 A_t 是实际的喉部面积. 当然,声速 a 在流动过程中是变化的,而 a^* 正是 $M=1$ 处的声速值.

运用喷管关系,面积比也可以用当地马赫数 M(该处的面积为 A)来表示

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2}\left[\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{(k+1)/(k-1)} \tag{7.24}$$

注意,式(7.14)中给出的临界压强 p_c 就是 p^*.

对于 p_0 和 T_0 为常数的等熵流动,方程(7.20)、(7.21)、(7.22)和(7.24)分别给出了用当地马赫数 M 表示的 T/T_0、p/p_0、ρ/ρ_0 和 A/A^*. 因为 T/T_0、p/p_0、ρ/ρ_0 和 A/A^* 仅为 M 数的函数,因此,这些比值已制成数值表供计算时使用. 这种简表见附录 D.

7.3　正激波

如前所述,当喷管出口压强值处于某一范围时,收缩-扩张喷管内将会出现压强(密度或温度)间断面. 这种间断称之为**正激波**. 本节将讨论(1)表明这样的间断是可能出现的,(2)推导描述激波前后特性变化的方程.

假定如图 7-8 所示的正激波可用下述模型来描述:

1. 越过激波的面积为常数.(管道面积可以变化,但跨过激波厚度面积不变.)
2. 理想气体.
3. 定常流动.
4. 一维流动.
5. 绝热.

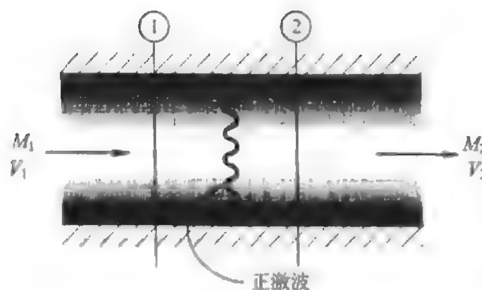


图 7-8　正激波流动模型

在线 1 和线 2 之间的控制体非常薄,并且相对于激波是静止的(相对于固定的观察者而言,实际上激波可能运动,也可能是不动的). 这里重要的是应认识到通过激波的流动是不可逆的,因而不能使用等熵方程. 该控制体所形成的能量、动量和连续方程变成(参见上一节)

能量:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1+\frac{1}{2}(k-1)M_1^2}{1+\frac{1}{2}(k-1)M_2^2} \tag{7.16}$$

连续:

$$p_2/p_1 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\frac{M_1}{M_2} \tag{7.25}$$

动量:

$$(p_1 - p_2)A = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

或改写成

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1+kM_1^2}{1+kM_2^2} \tag{7.26}$$

将物态方程与表示熵变化的热力学表达式相结合,可得

$$s_2 - s_1 = c_p \ln(T_2/T_1) - R\ln(p_2/p_1) \tag{7.27}$$

方程(7.16)、(7.25)和(7.26)有三个未知量(T_2, p_2, M_2),联立这些方程可给出

$$M_2 = \left[\frac{M_1^2(k-1)+2}{2kM_1^2-k+1}\right]^{1/2} \tag{7.28}$$

方程(7.16)、(7.26)和(7.28)用上游条件完整地描述了激波波后的条件①.

尽管在数值计算时通常都使用激波表,然而通过一些代数变换,还可以得到几个上下游特性参数之间的关系式. 如兰金-雨贡纽关系式

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1+\frac{k+1}{k-1}\frac{p_2}{p_1}}{\frac{k+1}{k-1}+\frac{p_2}{p_1}} = \frac{u_1}{u_2} \tag{7.29}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}\frac{\frac{k+1}{k-1}+\frac{p_2}{p_1}}{1+\frac{k+1}{k-1}\frac{p_2}{p_1}} \tag{7.30}$$

其他有用的关系式还有

$$\frac{p_2}{p_1} = 1+\frac{2k}{k+1}(M_1^2-1) \tag{7.31}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(k+1)M_1^2}{(k-1)M_1^2+2} \tag{7.32}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}\frac{\rho_1}{\rho_2} \tag{7.33}$$

这些下游对上游特性参数的比值仅是 M_1 的函数,可以将这些比值作为自变量 M_1 的函数制成激波数值表.

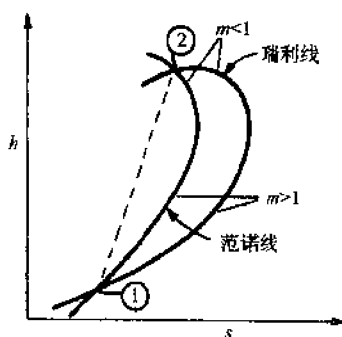


图 7-9　范诺和瑞利线

一个还没有回答的问题是:什么时候会出现正激波? 假定除动量方程之外,模型的所有条件均得到满足,那么方程(7.16)、(7.25)和(7.27)(即能量、连续和物态方程)在焓-熵图上确定了一条曲线,该曲线通过初始状态 1,如图 7-9 所示. 该曲线称之为**范诺线**.

假定除能量方程之外,模型的其余条件均得到满足,那么,在焓-熵图上可得到另一条曲线. 这条曲线称之为**瑞利线**.

为了使模型的全部条件都得到满足,则必须同时满足范诺线和瑞利线. 由于这两条曲线有两个交点,所以有两个状态能满足条件,而所有其他状态不能满足. 另外应注意的是,这两种许可的状态在性质上有一定的差别.

这样,若流动具有状态 1 的条件,则有可能通过非连续变化使流动呈现状态 2 的条件. 试问流动条件能从状态 2 变成状态 1 吗? 答案是否定的,因为这意味着熵减小,这与热力学第二定律是相违背的. 两条曲线在较低位置交点所对应的流动是超声速的,在较高位置交点所对应的流动是亚声速的. 由此表明在超声速流动中有可能出现间断,而在亚声速流动中是不可能出现的.

---

① 通过正激波的特性变化已用简便的形式制成数表. 使用数表消除了运用上述方程进行计算的必要性. 激波数表可从参考文献中或附录中找到.

7.4 等截面绝热流动(范诺线)

考虑理想气体在等截面管道中的绝热、一维、定常流动. 描述这种流动的方程组是(其中下标 1 表示上游某一参考状态)

能量:
$$h_1 + V_1^2/2 = h + V^2/2 = h_0 \tag{7.34}$$

式中 h_0 是由上式定义的驻点焓.

动量:
$$(p_1 - p)A - \tau_0 LC = A(\rho V^2 - \rho_1 V_1^2) \tag{7.35}$$

其中 τ_0 是壁面剪应力,L 为长度,C 为圆周长度或浸湿周长.

连续:
$$V_1/v_1 = V/v \text{ 或 } V_1\rho_1 = V\rho \tag{7.36}$$

物态方程:
$$p_1 v_1/T_1 = pv/T \tag{7.37}$$

特性关系
$$s - s_1 = c_v \ln(h/h_1) + R\ln(v/v_1) \tag{7.38}$$

合并能量和连续方程可得

$$h = h_0 - \frac{1}{2}(V_1/v_1)^2 v^2 \tag{7.39}$$

进一步将该方程与特性关系式合并,可得如图 7-9 所示的范诺曲线. 在用 1 标明的上游条件不变的情况下,该曲线代表了所有可能的状态. 可以看出这条曲线有一个最大的熵值,该值有重要的意义. 例如,若上游条件 1 处于图 7-9 所示曲线的较低位置,那么,正如图上所表明的那样,焓值将是增大的. 应注意的是,按照热力学第二定律熵只能增大. 这意味着如果流动状态达到与最大熵值所对应的状态,那么,流动状态将不可能再作进一步的变化. 该最大熵状态代表在等面积管道出口处的流动为"壅塞"流动.

把 Tds 表达式(即 $Tds = dh - vdp$,此为特性关系式)与微分形式的能量和连续方程相联立,可得

$$\frac{ds}{dh} = \frac{1}{T}\left(1 - \frac{1}{V^2}\frac{dp}{d\rho}\right) \tag{7.40}$$

如果令该方程等于零,可得壅塞流动时管道出口处的状态为

$$V^2 = dp/d\rho = (\partial p/\partial \rho)_s = a^2 \tag{7.41}$$

或者

$$M = 1.0$$

由此可见,无论初始状态是亚声速(上部曲线)或超声速(下部曲线)流动,摩擦效应均使流体向马赫数为 1 的趋势发展.

根据上述方程可以确定气体在等面积管道中作一维绝热流动的特性变化. 总结这些结果可得

特性	亚声速流	超声速流
s	增大	增大
h	减小	增大
T	减小	增大
M	增大	减小
V	增大	减小
p	减小	增大
p_0	减小	减小
ρ	减小	增大

如果管道出口处的马赫数为 1,这时管道中的流动叫做**壅塞**. 在这种情况下,若集气罐压强或背压强(即管道排气处的环境压强)进一步下降,管道的流量不会增加,管道中的特性不会变化. 一般讲,流动壅塞可能是因足够低的背压强引起的,也可能是因管道过长造成的. 在等面积管道中,亚声速流动($M<1$)永远不可能变成超声速流动,只能在出口处达到声速状态($M=1$). 类似地,超声速流动($M>1$)永远不可能以平滑的方式通过 $M=1$ 而变成亚声速流动,仅在出口处可能达到 $M=1$.

然而,在某些条件下超声速管流中可能形成激波,使超声速流动变成亚声速流动,这种变化是不能以平滑连续变化的方式实现的. 如果没有摩擦,那么沿等面积管道的流动特性和马赫数是不变的;如果有壁面摩擦,沿等面积管道的流动是变化的,还可能形成激波.

可用如下方法获得有摩擦绝热流动的计算公式. 将方程(7.35)改写成微分形式

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\frac{2kfM^2}{D}+\frac{kM^2}{2V^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(V^2)=0 \tag{7.42}$$

其中 f 是摩擦因数,其定义是 $f=\tau_0/(\rho V^2/2)$(该系数与第三、四和五章中定义的和水力学中所使用的达西摩擦因数 f 相差 4 倍). 在可压缩流动中常用的 f 称为**范宁摩擦因数**,它与边界层理论中使用的摩擦因数相同. D 为管道的水力学直径,其定义是

$$D=\frac{4A}{C}$$

面马赫数的定义是

$$M^2=\frac{V^2}{a^2}=\frac{V^2}{kRT}=\frac{\rho V^2}{kp}$$

其他方程(7.34)至(7.39)也可写成微分形式,并可组成用 M 数和位置 x 表示的各个特性变量. 其中特别有意义的是沿管道用位置 x 表示的当地 M 数的表达式

$$\frac{\mathrm{d}M^2}{M^2}=\frac{kM^2[1+M^2(k-1)/2]4f}{(1-M^2)D}\mathrm{d}x \tag{7.43}$$

积分以上方程,从 $x=0$ 处的马赫数 M_1 积到沿管道任意位置 x 处的 M 值,由此得到的 M 值是初始马赫数和下游任意位置的函数. 如果从 $x=0$ 处的 M_1 积到 $M_2=1$,则可以得到一个 x 值,该 x 是马赫数变成 1 的距离,所以称其为临界长度 L_{max},这时出现壅塞. 临界长度的表达式是

$$4\bar{f}\frac{L_{max}}{D}=\frac{1-M_1^2}{kM_1^2}+\frac{k+1}{2k}\ln\left(\frac{(k+1)M_1^2}{2\{1+[(k-1)/2]M_1^2\}}\right) \tag{7.44}$$

其中 $\bar{f}$ 是长度的平均摩擦因数. 由于 $4\bar{f}L_{max}/D$ 是 M 数的函数,因此从初始马赫数 M_1 变到另一马赫数 M_2 的流动所需要的管长 L 可表示为

$$4\bar{f}\frac{L}{D}=\left(\frac{4\bar{f}L_{max}}{D}\right)_{M_1}-\left(4\bar{f}\frac{L_{max}}{D}\right)_{M_2} \tag{7.45}$$

$4\bar{f}L/D$ 值作为 M 数的函数已作成数表,从而提供了一种快速运算方法. 许多参考文献有这样的数表.

为了进行特性计算,简便的方法是将 $M=1$ 处的特性表示为$(\ )^*$. 在有摩擦的绝热管道中,如果有壅塞,$M=1$ 仅出现于管道出口处;对实际管道而言,$M=1$ 可代表将管道延伸后的某个虚构位置. 任意 M 数处的特性参数与 $M=1$ 处的参数(用星号表示)的比值,例如 p/p^*,仅是马赫数的函数. 因此,管道中任意两个位置之间的特性参数比值(如 p_2/p_1)可用下列关系式进行计算

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{(p/p^*)_{M_2}}{(p/p^*)_{M_1}} \tag{7.46}$$

特性比值( )/( )* 已制成数表，这些数表可从参考文献 1、4、6 和 8 中找到．这些特性比值的解析表达式列出如下：

$$\frac{p}{p^*}=\frac{1}{M}\frac{k+1}{2\{1+[(k-1)/2]M^2\}} \tag{7.47}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho}=\frac{V}{V^*}=M\frac{k+1}{2\{1+[(k-1)/2]M^2\}} \tag{7.48}$$

$$\frac{T}{T^*}=\frac{k+1}{2\{1+[(k-1)/2]M^2\}} \tag{7.49}$$

$$\frac{p_0}{p_0^*}=\frac{1}{M}\left(\frac{2\{1+[(k-1)/2]M^2\}}{k+1}\right)^{(k+1)/2(k-1)} \tag{7.50}$$

壅塞效应　前面已叙述了在某些条件下流动会壅塞．给管道输气可用两种方法，即使用收缩喷管或者收缩—扩张喷管．用收缩喷管输送时，整个管道中流动必须保持为亚声速(见图 7-10)．沿着管道，马赫数增大而压强减小．对于某一给定的背压强，当管长增加时，出口马赫数亦增大，直到出口马赫数变成 1 为止，并出现壅塞．然后，若背压强进一步减小，这时管道的出口压强保持不变，面管外会出现外部膨胀使其适应背压强的要求，管内流动是不变的．另一方面(参看图 7-10)，对于一个给定背压强(p_a)又未壅塞的较短管道，若将背压强充分减小至 p_b 使管道出现壅塞．进一步将背压强下降至 p_c，这时管外会出现外部膨胀而管内却不受影响．

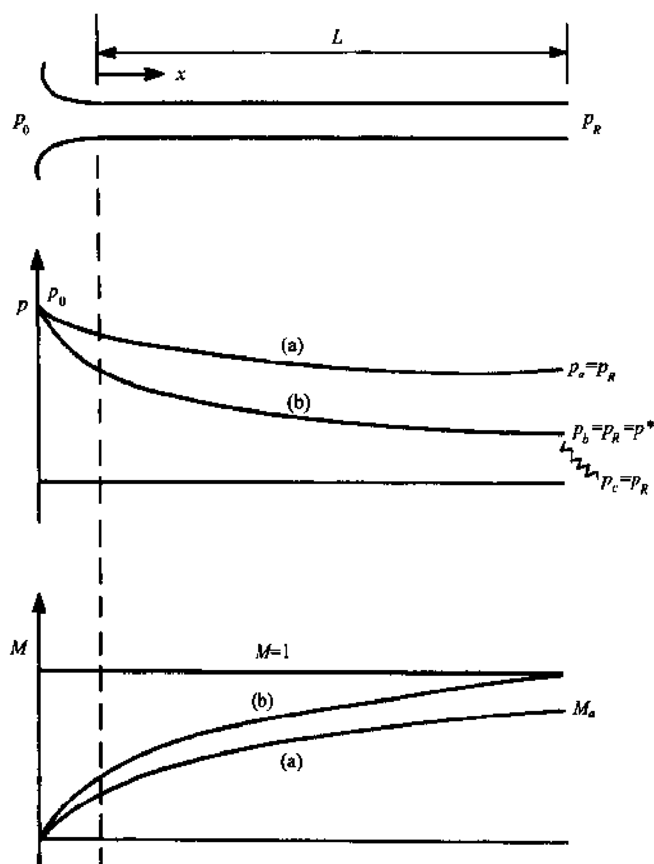


图 7-10　由收缩喷管流入的亚声速管道
(a) 表示非壅塞流，(b) 壅塞亚声速流

若用收缩—扩张喷管给管道输气，这时进入管道的流动可以是亚声速的，也可以是超声速的，管内还可能出现激波，这取决于背压强和管长. 在这种情况下，背压强变化的影响是复杂的，这里仅作简略叙述. 有兴趣的读者可阅读参考文献，特别是夏皮罗（参考文献6）有更完整的论述.

如图7-11所示，对于给定的储气罐状态，管道内为超声速流动，喉部马赫数为1，管道入口处的马赫数 M_1 是惟一的. 随着向下游流动，马赫数减小而压强增高. 对于给定的管长，为了平滑流动必须有惟一的背压强. 当管长增加时（假定为了保证平滑流动而背压强随之连续地调节），出口处的马赫数将减小，直至达到 L_{max} 值，该处的马赫数变成1（见图7-11a）. 如果进一步增加管长，其后果是管内形成激波. 激波随着管长增加向上游移动，直至激波最终被喷管吞没，使整个管内的流动变成亚声速的. 如果 L 等于 L_{max}（对超声速流动）而背压强 p_R 小于它的匹配值（p^*），这时管内流动保持不变，但管外出现膨胀波用以调节压强. 若背压强大于 p^*，管道出口处会形成弱激波，激波将随着背压强的增高而向上游移动. 最后激波会被吞没，使整个管内变成亚声速流动. 再进一步提高背压强，将减小亚声速流动的流量.

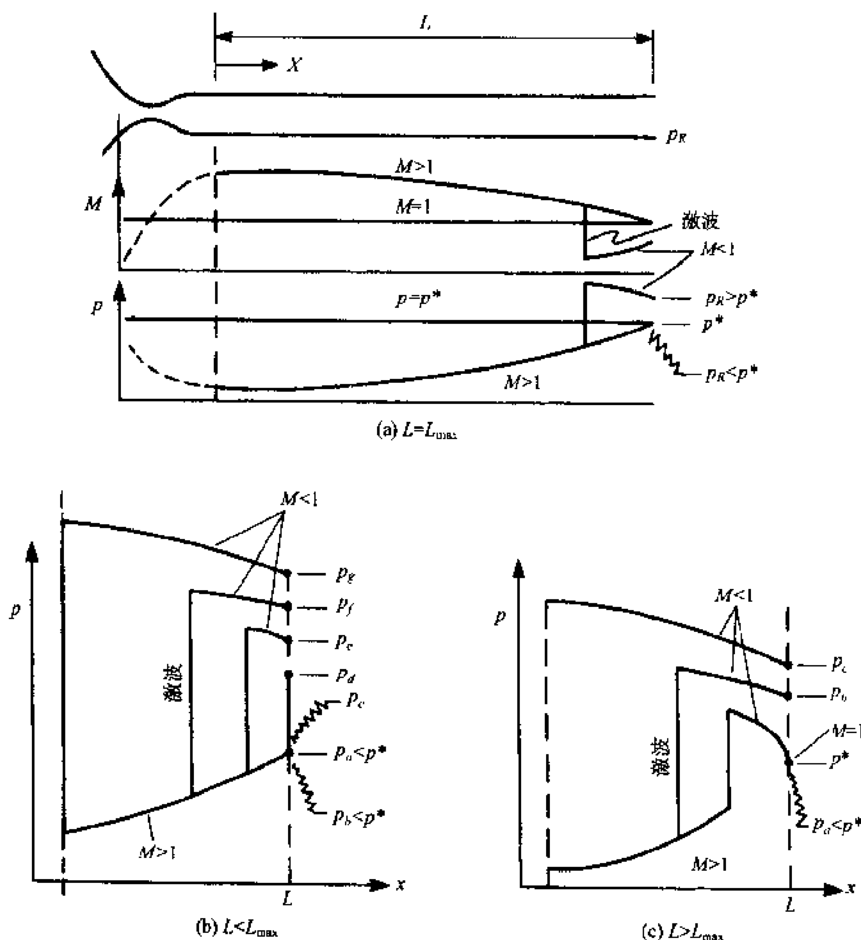


图7-11　由收缩-扩散喷管流入的管道内有激波的超声速流动

图7-11b是 $L<L_{max}$ 的情形，对于平滑的超声速流动，出口处的 M 值是惟一的，背压强（p_a，小于 p^*）也是惟一的. 如果背压强下降到 p_b，会出现外部膨胀，管内流动是不变的. 如果背压强增高到 p_c，管外出现激波. 若将背压强进一步提高到 p_d，激波正好进入管口. 以后随着背压强的增加 p_e，p_f，激波依次向上游移动. 最后背压强达到 p_g 值，在这种情况下激波位于喷管中. 如果再提高背压强，将使激波移至喷管喉部，然后消失，整个管道变成亚声速流

动. 激波通过喷管喉部称为被吞没.

图 7-11c 是 $L>L_{max}$ 的情形. 如果背压强 p_a 小于临界压强 p^*，会在管内一个特有的位置处形成激波，使管道出口处的 M 值等于 1. 激波后的流动是亚声速的. 为了适应背压强 p_a，管道外部会出现自由膨胀. 当背压强升高时，激波仍在原处，但自由膨胀变得较弱，直到背压强正好等于特有的压强 p^*，该压强对应于管道出口处 $M=1$ 时的压强值. 进一步把背压强提高到 p_b，将引起激波向上游移动，通过出口处的压强 p_b 与背压强和合适的出口马赫数值(该值为亚声速)相匹配可确定出激波位置. 当背压强进一步增大至 p_c 以后，激波位于喷管中，并最后因背压强过大而使激波被吞没，整个管内流动变成亚声速的.

7.5　有加热或冷却的理想等截面流动

有加热或冷却的无摩擦、一维、定常、等截面管流的方程组是

能量：$$h_1+V_1^2/2+q=h+V^2/2$$

动量：$$p_1-p=\rho V^2-\rho_1 V_1^2$$

连续：$$\rho_1 V_1=\rho V$$

物态方程：$$p_1/\rho_1 T_1=p/\rho T$$

其中 q 是传给单位质量流体的热量. 合并动量和连续方程，当熵最大时，用微分形式可给出

$$(\partial p/\partial \rho)_s=a^2=V^2$$

就这种流动而言，与壅塞条件相对应的出口马赫数也是 1. 对流动流体加热使其熵增大，因此，无论是亚声速还是超声速流动，加热的影响都是引起马赫数趋于 1.

有趣的是由瑞利线可以发现，当流动处于该曲线的某一部分时，向管内气体加热将使温度减低.

7.6　有摩擦等温流动

有一些流动近似是等温的(如长输气管中天然气的流动). 这里，对这种流动推导描述压强下降的表达式.

如图 7-12 所示，对这种流动取气体的控制体. 该控制体的一维定常流动的动量方程是

$$\sum F_x=\dot{m}(V+\mathrm{d}V-V),\ [p-(p+\mathrm{d}p)]\left(\frac{1}{4}\pi D^2\right)-\tau_0\pi D\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{4}\pi D^2\right)\rho V\mathrm{d}V$$

然后，将摩擦因子表达式

$$f=\tau_0/\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right)$$

与动量方程合并，简化后可得

$$\frac{v}{V^2}\mathrm{d}p+\frac{2f}{D}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}V}{V}=0$$

若将连续方程与理想气体的定温物态方程合并，可得

$$\frac{v}{V^2}=\frac{v_1}{V_1^2 p_1}p$$

再合并以上两方程，可给出

$$\frac{v_1}{V_1^2 p_1}p\mathrm{d}p+\frac{2f}{D}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}V}{V}=0$$

假设摩擦因子仅取决于雷诺数(对一个已知管道),那么,由于等温流动的雷诺数是常数,因此摩擦因子也是常数(注意,$\rho V=$常数和 $\mu=f(T)=$常数).

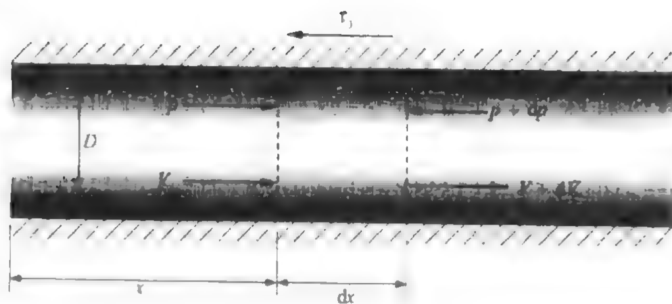


图 7-12 在等面积管道中等温流动的体元

现在,积分动量方程可得

$$(p/p_1)^2 = 1 - kM_1^2(2\ln V/V_1 + 4fL/D) \tag{7.51}$$

其中 L 是长度,这是用下标 1 指明的位置与无下标量的位置之间的长度. 方程(7.51)可改写成

$$fL/D = \frac{1}{4kM_1^2}[1-(p/p_1)^2] + \frac{1}{2}\ln p/p_1 \tag{7.52}$$

由此可见压强是长度的非线性函数,然而,在不可压缩流动中,压强却是长度的线性函数.

联合动量和连续方程可以表明,当出现壅塞流动时,管道的出口马赫数是 $M^*=1/\sqrt{k}$. 相应的压强是 $p^*/p_1=M_1\sqrt{k}$.

7.7 低马赫数不可压缩流动

从能量方程出发

$$\frac{1}{2}(V_1^2 - V^2) = h - h_1$$

对理想气体等熵过程,改写上式可得

$$\frac{1}{2}(V_1^2 - V^2) = \frac{kRT}{k-1}[1-(p_1/p)^{(k-1)/k}]$$

令 $V_1 \to 0$ 可得驻点压强的表达式

$$p_0/p = [1 + \frac{1}{2}(k-1)M^2]^{k/(k-1)}$$

如果用对马赫数的二项展开式表示,以上方程可写成

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho V^2[1 + \frac{1}{4}M^2 + \frac{1}{24}(2-k)M^4 + \cdots] \tag{7.53}$$

当马赫数 M 为小量时,方程变为

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho V^2 \tag{7.54}$$

这与不可压缩流动驻点压强的表达式是相同的.

以上结果的重要性在于,绕物体的和管内气体的等熵流动,只要马赫数很小(比如说 $M<$

0.3)，就可以视为是不可压缩流动. 显而易见，采用等密度模型会使问题有显著简化.

7.8 激波管

激波管是一种在短时间间隔内能产生高速高温气体的装置. 激波管是封闭的，用膜片把管子分隔成两部分. 一部分处于高压强，另一部分则是低压强. 膜片突然瞬时破裂，随后，一道激波在低压强一侧的静止气体中传播，一束膨胀波在高压强一侧的静止气体中传播，而受扰动气体(在激波与膨胀波之间的气体)相对于未受扰动气体或管体作高速运动，这种运动可能是超声速的. 激波管如同下吹式风洞一样，可用来作为脉冲型风洞.

活塞产生的激波

在讨论激波管之前，先讨论激波管中所产生的波的类型. 图 7-13 所示的是运动活塞在管中产生的激波. 该激波是正激波，前面已计算过这种激波的阶跃条件. 在活塞与激波之间的气体速度与活塞速度相同.

管中活塞和激波的运动过程用 x-t 图表示，图中各条线的斜率是速度的倒数.

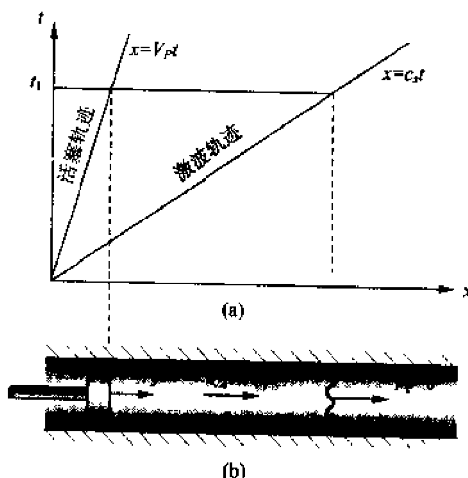


图 7-13　由运动活塞产生的激波

(a) x-t 图，(b) t_1 时刻的管道. V 是气体的绝对速度

中心膨胀波

如果活塞在管中不是向前推进，而是向后拉动，由此形成膨胀波，这种波向离开活塞的方向传播. 膨胀波是等熵的.

突然拉动活塞形成改变质点速度和压强的阶梯函数(质点被瞬时调整到活塞速度，并随活塞一起运动). 该阶梯函数平化成波进行传播；在这种局部性的波中，扰动以当地声速运动. 因为越过这种波压强(和温度)是变化的(这种波在开始时对这些变量是一个阶跃)，因此在这种波之中扰动传播的当地声速也是变化的. 波的一个边缘与未受扰动气体(4 区)相接，此处的温度和声速最大；波的另一个边缘与 3 区相接，此处的温度最低，相应的声速也是最小. 因此，如图 7-14 所示，这样的膨胀波在传播时是发散的或成扇状的. 图 7-14 中的 x-t 图是由等声速线组成的扇形，它表明这种膨胀波的发展过程. 这些等声速线称为**特征线**，它是当地等熵扰动的轨迹. 显然，扰动传播的绝对速度是当地声速和当地气体绝对速度之和. 右端特征线(4 区)的斜率是 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=a_4$，而左端特征线的斜率是 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=a_3+V_3$. 定义 V_3 向右为正，显然这里的 V_3 是负值，因为 V_3 必须等于活塞速度 $-V_p$. 由此可知，$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 值可正可负，这分别取决于 $a_3>V_3$ 还是 $a_3<V_3$.

只要具体地计算出 a_3，随后就能确定膨胀扇的结构. 在膨胀扇中，用 a_4 表示的当地声速可写为(已利用了等熵关系式)

$$a = a_4(\rho/\rho_4)^{(k-1)/2}$$

扇形波系中质点的当地速度可以表示为

$$\mathrm{d}V = a\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$$

对该式积分可得

$$a = a_4 + \frac{1}{2}(k-1)V$$

在波阵面之后的区域中，绝对波速 c 是当地声速与流体速度之和，即

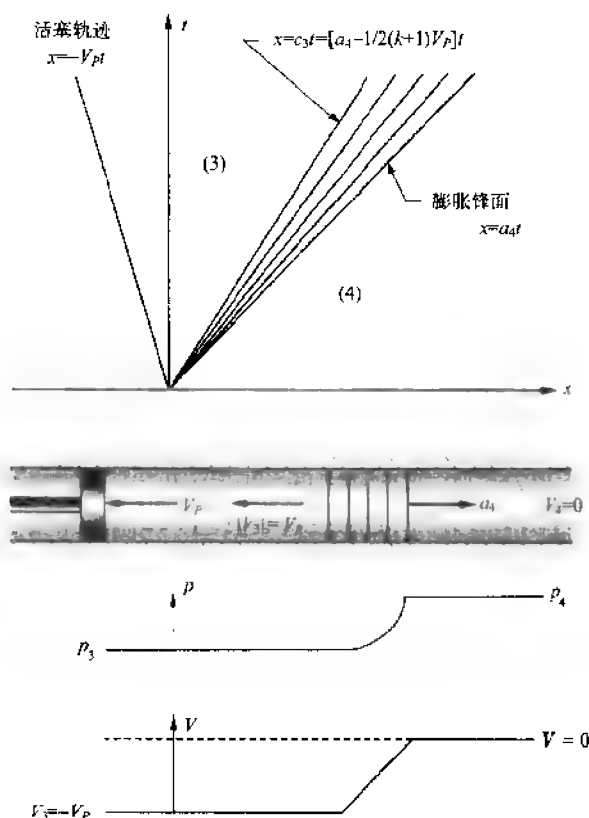


图 7-14　把活塞从管道拉出时产生的中心膨胀扇

$$c = a + V = a_4 + \frac{1}{2}(k+1)V$$

在这里 V 是负值，所以越过波从 4 区到 3 区，c 是减小的. 左端特征线的斜率是

$$c_3 = a_4 + \frac{1}{2}(k+1)V_3 = a_4 - \frac{1}{2}(k+1)V_P \tag{7.55}$$

该斜率可正可负，或者说该特征线可向右倾斜，也可向左倾斜. 根据等熵关系式，跨过膨胀扇的密度和压强变化可分别表示为

$$\rho_3/\rho_4 = \left[1 - \frac{1}{2}(k-1)V_P/a_4\right]^{2/(k-1)} \tag{7.56}$$

$$p_3/p_4 = \left[1 - \frac{1}{2}(k-1)V_P/a_4\right]^{2k/(k-1)} \tag{7.57}$$

其中 V_P 是正数.

激波管流动

现在可以把活塞驱动的激波和活塞驱动的中心膨胀波扇结合起来，用以描述激波管流动. 由图 7-15 可以看出，当膜片破裂后会产生激波和膨胀波，还会形成接触面. 接触面两侧的压强和速度相等，但温度、密度和马赫数不相等. 这两个条件

$$p_2 = p_3,\quad V_2 = V_3$$

足以用来确定 2 区和 3 区的状态，还可确定出越过激波和膨胀扇的跃变.（这里 $V_2 = V_3$ 是负数，因为气体向左流动.）利用 1 区和 4 区的已知条件，根据方程(7.57)可解得用 p_3 和 p_4 表

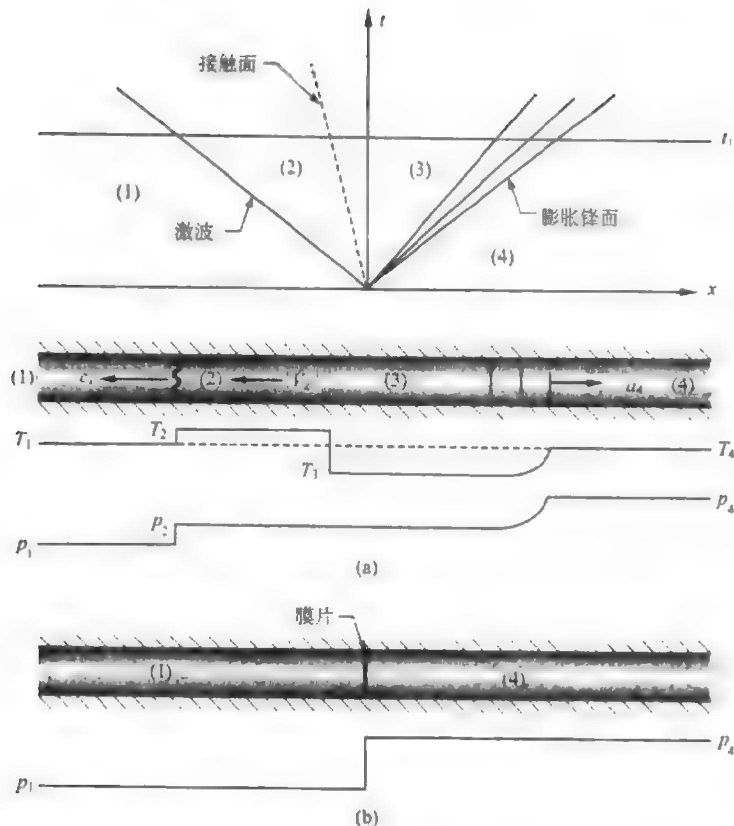


图 7-15　激波管.(a) $t=t_1$ 时刻,(b) $t=0$ 时刻

示的 V_3,再根据正激波关系可解得用 p_1 和 p_2 表示的 V_2. 然后,令 $V_2=V_3(p_2=p_3)$可获得关于 p_2 的关系式. 结果是

$$\frac{p_4}{p_1}=\frac{p_3}{p_1}\left[1-\frac{(k-1)(a_1/a_4)(p_2/p_1-1)}{\sqrt{2k}\sqrt{2k+(k+1)(p_2/p_1-1)}}\right]^{-2k/(k-1)} \tag{7.58}$$

该式隐式地给出了 p_2/p_1. 一旦 p_2 值知道后,该问题中其余参数都可以方便地求得.

参考文献

1. John, J. E. A., *Gas Dynamics*, 2nd ed., Allyn and Bacon, 1984.
2. Liepmann, H. W., and Roshko, A., *Elements of Gasdynamics*, John Wiley, 1957.
3. Owczarek, J. A., *Fundamentals of Gas Dynamics*, International Textbook, 1964.
4. Saad, M. A., *Compressible Fluid Flow*, Prentice-Hall, 1985.
5. Shames, I. H., *Mechanics of Fluids*, Mc Graw-Hill, 1962.
6. Shapiro, A. H., *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, Ronald Press, 1953.
7. Thompson, P. A., *Compressible-Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, 1972.
8. Zucrow, M. J. and Hoffman, J. D., *Gas Dynamics*, Vol. 1, John Wiley, 1976.

例　　题

7.1　一架在 10000ft 高度飞行的飞机,空气温度是 20°F,压强为 21.0in 汞柱. 机翼上某一点(见图 7-16)的静压强是 980lb/ft²,当地马赫数为 0.95. 假定流动是无摩擦绝热的. 问飞机相对于未受扰动空气的速度是多少?

解 认为飞机不动，那么空气运动．根据理想气体等熵流动，有

$$T_2 = T_1(p_2/p_1)^{(k-1)/k} = (460+20)\left[\frac{980}{21(0.491)(144)}\right]^{0.286} = 427(°R)$$

和　$$V_2 = M_2 a_2 = M_2\sqrt{kRT_2} = 0.95\sqrt{1.4(32.2)(53.3)(427)} = 955(ft/sec)$$

再由能量方程

$$V_1^2/2 + h_1 = V_2^2/2 + h_2$$

和

$$V_1^2 = V_2^2 + 2c_p(T_2 - T_1) = (955)^2 + 2(32.2)(778)(0.24)(427-480)$$
$$= 275000(ft^2/sec^2)$$

所以，$V_1 = 524$ ft/sec.

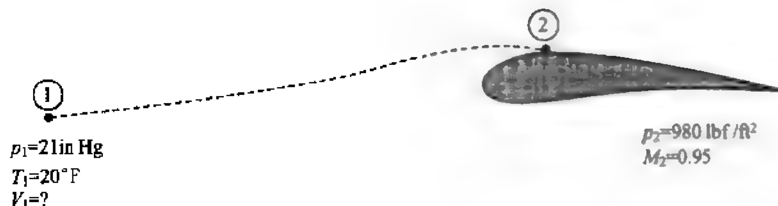


图 7-16

7.2 如图 7-17 所示，空气在收缩管道中流动，流动条件示于图上．试计算喉部 2 处的压强、温度、速度和马赫数．

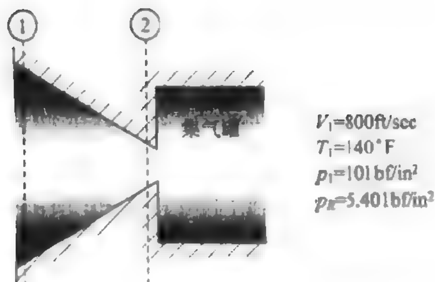


图 7-17

解 假设流动是无摩擦绝热的．接着先确定上游条件，认为上游的速度可以忽略．根据能量方程，有

$$T_0 = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = (140+460) + \frac{(800)^2}{2(32.2)(778)(0.24)} = 653(°R)$$

和　$$p_0 = p_1(T_0/T_1)^{k/(k-1)} = 10[653/(140+460)]^{3.5} = 13.52(lbf/in^2)$$

所以　$$p_R/p_0 = 5.40/13.52 = 0.407$$

其中 T_0 和 p_0 分别是驻点温度和驻点压强．

临界压强比是 $p_c/p_0 = [2/(k+1)]^{k/(k-1)} = 0.528$．由此可见，集气罐中的压强低于临界压强，该喷管在壅塞状态下运行．这样，有 $p_2 = p_c$，这里 p_c 是临界压强，等于 $0.528p_0$．

由此可以求得

$$p_2 = 0.528(13.52) = 7.14(lbf/in^2)$$

$$T_2 = T_1(p_2/p_1)^{(k-1)/k} = (140+460)(7.14/10)^{0.286} = 546(°R)$$

$$M_2 = 1.0(\text{壅塞流})$$

$$V_2 = a_2 = \sqrt{kRT_2} = \sqrt{1.4(32.2)(53.3)(546)} = 1140(ft/sec)$$

7.3 空气在收缩-扩张喷管中流动，入口处的压强和温度分别是 14.7psi 和 70°F．喉部面积是 $1.0in^2$．在喷管扩散段中某一位置处的压强是 1.37psi．求该处的面积．

解答　假定流动是无摩擦绝热的. 注意到喷管扩张段中的压强低于临界压强. 可见喷管是在壅塞状态下运行,喉部压强 p_t 是

$$p_t = p_c = 14.7[2/(k+1)]^{k/(k-1)} = 14.7(0.528) = 7.79(\text{lb/in}^2)$$

$$T_t = T_0\left(\frac{p_t}{p_0}\right)^{(k-1)/k} = (460+70)\left(\frac{7.79}{14.7}\right)^{0.286} = 442(°\text{R})$$

所以　$$T_3 = T_0(p_3/p_0)^{(k-1)/k} = (460+70)(1.37/14.7)^{0.286} = 269(°\text{R})$$

和　$$V_t = \sqrt{kRT_t} = \sqrt{1.4(32.2)(53.3)(442)} = 1030(\text{ft/sec})$$

能量方程给出　$$V_3^2/2 + h_3 = h_0$$

所以　$$V_3 = \sqrt{2c_p(T_0 - T_3)} = \sqrt{2(32.2)(778)(0.24)(530-269)} = 1770(\text{ft/sec})$$

连续方程是　$$\rho_t A_t V_t = \rho_3 A_3 V_3$$

因此　$$A_3 = A_t\frac{\rho_t}{\rho_3}\frac{V_t}{V_3} = A_t\frac{p_t}{p_3}\frac{T_3}{T_t}\frac{V_t}{V_3} = 1.0\,\frac{7.79\,269\,1030}{1.37\,442\,1770} = 2.00(\text{in}^2)$$

7.4　如图 7-18 所示,空气在绝热等直径水平管道中流动. 入口条件是 $p_1 = 100\text{lb/in}^2$, $T_1 = 100$°F和 $V_1 = 500\text{ft/sec}$. 管道直径是 6.0in,流动是"壅塞"的. 试求流体作用于管道的净力.

解答　取如图所示的包围自入口至出口之间的流体为控制体,对其应用动量方程,有

$$\sum F_x = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

即　$$(p_1 - p_2)(\pi D^2/4) - F_{\text{管壁}} = \rho_1 A_1 V_1(V_2 - V_1)$$

现在需要确定出口处的状态. 对壅塞流动有

$$M_2 = M^* = 1.0(\text{壅塞流})$$

所以　$$V_2 = \sqrt{kRT_2}$$

根据能量方程,

$$V_2^2 = V_1^2 + 2c_p(T_1 - T_2) = V_1^2 + 2c_p(T_1 - V_2^2/kR)$$

那么　$$V_2^2 = \frac{V_1^2 + 2c_pT_1}{1 + 2c_p/kR} = \frac{V_1^2 + 2c_pT_1}{1 + 2/(k-1)}$$

$$V_2 = \left[\frac{(500)^2 + 2(32.2)(778)(0.24)(460+100)}{1 + 2/(1.4-1)}\right]^{1/2} = 1030(\text{ft/sec})$$

出口温度是

$$T_2 = \frac{V_2^2}{kR} = \frac{(1030)^2}{1.4(32.2)(53.3)} = 442(°\text{R})$$

根据连续方程有

$$\rho_2 V_2 = \rho_1 V_1$$

因此　$$(p_2/T_2)V_2 = (p_1/T_1)V_1$$

和　$$p_2 = p_1\frac{T_2 V_1}{T_1 V_2} = 100\left(\frac{442}{460+100}\right)\left(\frac{500}{1030}\right) = 38.2(\text{lbf/in}^2)$$

那么　$$(p_1 - p_2)(\pi D^2/4) = (100 - 38.2)(36\pi/4) = 1750(\text{lbf})$$

和

$$\rho_1 A_1 V_1(V_2 - V_1) = \frac{100}{53.3(32.2)(460+100)}(36\pi/4)(500)(1030-500) = 780(\text{lbf})$$

所以,最后可得管道作用于流体的力是

$$F_{剪切} = 1750 - 780 = 970(\text{lbf})$$

力的方向如图 7-18 所示.

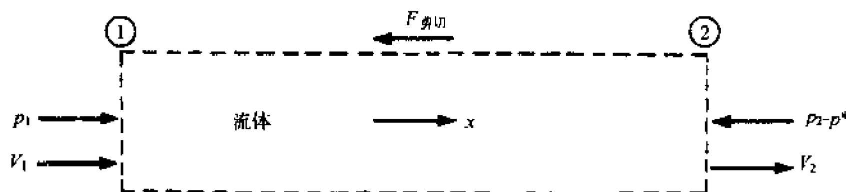


图 7-18

7.5 可压缩流体作等温流动,无外功,试证明

$$\frac{dM^2}{M^2} = 2\frac{dV}{V}$$

证 ☞ 根据马赫数定义有 $M^2 = V^2/a^2$. 假定流体满足理想气体物态方程,则有 $a = \sqrt{kRT}$. 对等温流动,a 为常数. 将马赫数表达式的两边取对数,可得

$$\ln M^2 = \ln V^2 - \ln a^2$$

或

$$\ln M^2 = 2\ln V - \ln a^2$$

然后对其求微分,可得

$$\frac{dM^2}{M^2} = 2\frac{dV}{V}$$

7.6 一完全气体以定温状态在等面积管道中流动,试证明

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dV}{V} = -\frac{1}{2}\frac{dM^2}{M^2}$$

证 ☞ 假定是一维定常流动,连续方程是 ρVA = 常数,因为面积是常数,所以有 ρV = 常数. 利用理想气体物态方程,并与连续方程联立,消去密度后可得 pV = 定值,再取微分给出

$$p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = 0$$

除以 pV 可得

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dV}{V}$$

然后利用 7.5 题的结果,有

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dM^2}{M^2}$$

7.7 证明完全气体绝热流动有如下关系:

$$T/T_0 = 1 - \frac{1}{2}(k-1)(V/a_0)^2$$

其中 T_0 是驻点温度,a_0 是驻点声速($a_0 = \sqrt{kRT_0}$).

证 ☞ 根据一维定常流动的能量方程,当不作功和作绝热流动时,有

$$h - h_0 = -V^2/2$$

对 c_p 为常数的完全气体,有

$$c_p(T - T_0) = -V^2/2$$

除以 c_pT_0,整理后给出

$$T/T_0 = 1 - V^2/2c_pT_0$$

再将 $c_p = kR/(k-1)$ 和 $T_0 = a_0^2/(kR)$ 代入上式可证得

$$T/T_0 = 1 - \frac{1}{2}(k-1)(V/a_0)^2$$

7.8 空气流经一收缩-扩张喷管，出口面积比 $A^*/A_e = 0.2363$，其中 A_e 是喷管出口面积，A^* 是喉部面积. 如果一道激波位于 $A^*/A = 0.5926$ 处，试用气源压强 p_0 表示出背压强、出口马赫数 M_e 和激波前后的一些重要特性值?

解 ☞ 越过激波，比值 A^*/A 要发生变化，因为这种流动是非等熵的. 虽然越过激波 A 不变化，但 A^* 要变化，原因是越过激波气体有不同的驻点压强. 如果管内不出现激波，利用等熵流数表可查得出口马赫数是 3. 在位置 1 处，该处正好在激波位置 $A^*/A = 0.5926$ 的上游，查表可得 $M_1 = 2$.

利用激波数表由 $M_1 = 2$ 查得激波下游的 $M_2 = 0.5773$. 再次利用等熵数表，由 $M_1 = 2$ 查得

$$p_1/p_{01} = 0.1278$$

由激波数表查得

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = 0.7209 \text{ 和 } \frac{p_2}{p_1} = 4.5$$

所以

$$p_2 = 4.5p_1 = 4.5 \times 0.1278p_{01} = 0.5751p_{01}$$

激波下游从马赫数 $M_2 = 0.5773$ 和 $p_2 = 0.5751p_{01}$ 到出口的流动进程是等熵的.

已知用实际喉部面积 A_1^* 表示的实际出口面积 A_e. 越过激波 $A_1 = A_2 = A_1^*/0.5926$.

利用等熵数表，由 $M_2 = 0.5773$ 可查得 $A_2^*/A_2 = 0.82$. 希望得到的是 A_2^*/A_e，因为由该值可获得实际的 M_e. 为此，可写出

$$\frac{A_2^*}{A_e} = \frac{A_1^*}{A_e} \cdot \frac{A_1}{A_1^*} \cdot \frac{A_2^*}{A_2} = (0.2362)\left(\frac{1}{0.5926}\right)(0.82) = 0.327$$

查等熵数表，由该 A^*/A_e 值可得 $M_e = 0.20$. 进而由数表还可查得 $p_e/p_{02} = 0.973$. 因此，$p_e/p_{01} = (p_e/p_{02})(p_{02}/p_{01}) = (0.973)(0.7209) = 0.70$. 因此，如果令背压强是 $0.70p_{01}$，激波将出现在给定的位置，而出口马赫数是 $M\backslash - e = 0.20$.

7.9 容器中的空气通过收缩喷管流入一根有摩擦的绝热长管. 容器中的驻点压强和温度分别是 300psi 和 520°R. 若管道直径是 1in，(平均)摩擦因数为 0.002，背压强保持为 100psi，求 L_{max}? 如果管道为 L_{max}，那么在以上条件下的流量是多少?

解 ☞ 求解这个问题需用试凑法. 喉部(位置 1 或者管道入口)处的压强和马赫数是未知的. 计算过程如下：先假设一个 M_1 值，由等熵数表(对喷管内的流动)查得相应的 p_1 值. 利用 M_1 由范诺流动数表查得 $4\bar{f}(L_{max}/D)$ 值，这样可获得 L_{max}. 由范诺数表还可查得 p_1/p^* 值(该值仅取决于 M_1). p^* 正好是出口压强 100psi. 当然出口马赫数是 1. 然后，将由范诺表获得的管道入口处的 p_1 与由等熵喷管流动获得的 p_1 值进行比较. 当这两种计算 p_1 的方法给出相同的结果时，所选择的 M_1 值就是正确的.

经过几次试探后可得到

$$M_1 = 0.4$$

$$\frac{4\bar{f}L_{max}}{D} = 2.31$$

利用 $\bar{f} = 0.002$ 和 $D = 1\text{in}$，可得

$$L_{max} = 289\text{in}$$

从等熵数表查得 $p_1/p_0 = 0.896$，由此给出 $p_1 = 0.896 \times 300 = 269(\text{psi})$. 在范诺数表中由 $M_1 = 0.4$ 查得 $p_1/p^* = 2.696$，因为 $p^* = 100(\text{psi})$，所以 $p_1 = (2.696)(100) = 269(\text{psi})$. 核对以上两个结果是十分接近的，这样试凑结束.

一旦 M_1 求得后，管道中的其他特性可用类似的方法获得. 质量流量可由管中任意地点的特性和

速度计算而得. 在壅塞情况下,两个方便的地点是管道入口处(这里 $M_1=0.4$)和管道出口处(这里 $M_3=1$),这两处都可用来计算流量,而且答案应该是相同的. 这里使用管道入口处来求解,根据等熵数表获得的入口值是

$$\rho_1 = 0.9243\rho_0$$

$$a_1 = 0.9844a_0$$

$$V_1 = M_1 a_1$$

再利用

$$k = 1.4$$

$$T_0 = 520°\text{R}$$

$$R = 1718\,\frac{\text{ft}^2}{°\text{Rsec}^2}$$

$$p_0 = 300\text{psi}$$

可算得

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{300\times 144}{1718\times 520} = 0.048(\text{slug/ft}^3) = 0.000028(\text{slug/in}^3)$$

$$a_0 = \sqrt{kRT_0} = \sqrt{1.4\times 1718\times 520} = 1122(\text{ft/sec}) = 13460(\text{in/sec})$$

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 = (0.9243)(0.000028)\left(\frac{\pi(1)^2}{4}\right)(0.4)(0.9844)(13460) = 0.108(\text{slug/sec})$$

应该记住的是,质量的单位是 slug,所以密度 ρ 必须是 slug/ft^3 或 slug/in^3. 如果质量单位使用 lb,那么动量方程中必须使用因子 g_c,正如为获得声速所做的. 另外,R 的单位也必须与 ρ 和物态方程的单位相一致. 在工程计算中常见的是 $R=53.3$ft/°R,其中质量用 lb 给出,因此声速方程中必须使用因子 g_c. 本书使用的质量单位是 slug 或者 kg,所以没有必要使用转换因子 g_c.

补 充 习 题

判断下列 7.10 至 7.27 题中各种叙述的正与误.

7.10 声波和激波

(a) 无相似性;

(b) 除了越过这些波转性变化的大小之外,其余是相同的;

(c) 均为不可逆过程;

(d) 均为可逆过程;

(e) 以不同的速度在静止空气中运动.

7.11 对于理想气体的等熵流动

(a) 驻点温度是常数;

(b) 驻点压强是常数;

(c) 熵是常数;

(d) 最大马赫数是 1;

(e) 当压强增大时温度下降.

7.12 理想气体在收缩管道中流动的情况下

(a) 沿流向温度下降;

(b) 入口条件和喉部直径固定时存在一个最大流量;

(c) 可能出现正激波;

(d) 沿流向速度总是增加的;

(e) 马赫数可能大于 1.

7.13 理想气体在收缩管道中流动时

(a) 出口面积和入口条件固定时存在一个最大流量;

(b) 喉部马赫数总是 1;

(c) 喉部的温度最高;

(d) 在壅塞状态开始时喉部气体速度等于声速;

(e) 在临界状态下正激波出现在喉部.

7.14 等熵超声速喷管流动

(a) 收缩段中可能出现正激波;

(b) 扩张段中可能出现正激波;

(c) 是"无激波的".

7.15 对收缩-扩张管道流动而言

(a) 当出口马赫数大于 1 时,管内不会出现激波;

(b) 当超过临界压强比时,喉部马赫数将大于 1;

(c) 在给定的下游位置处,压强仅用喉部声速表示是可能的;

(d) 喉部马赫数总是 1.

7.16 可压缩流体在收缩-扩张管道中流动,并运行于壅塞状态

(a) 扩张段中的流动全是超声速的;

(b) 收缩段中可能出现正激波;

(c) 扩张段中可能出现正激波;

(d) 喉部马赫数总是等于 1;

(e) 喉部压强与入口压强之比与流动的几何形状无关.

7.17 一维流动中越过正激波

(a) 速度、压强和密度增大;

(b) 压强、密度和温度增大;

(c) 速度、温度和密度增大;

(d) 驻点焓不变.

7.18 一道正激波

(a) 只有流动是超声速时才可能出现;

(b) 总是包含有温度升高;

(c) 总是包含有压强下降;

(d) 总是以声速(相对于流体)运动;

(e) 亚声速流动时可能出现.

7.19 一道正激波

(a) 可在以超声速通过可压缩流体的钝头体的前面形成;

(b) 只有当流动是超声速时才会出现;

(c) 将引起流体的熵增大;

(d) 包含无摩擦绝热过程;

(e) 是不可能的.

7.20 等面积管道中,关于有摩擦绝热的亚声速流动

(a) 沿流向温度将升高;

(b) 驻点温度减小;

(c) 驻点压强减小;

(d) 速度增大;

(e) 极限马赫数是 1.

7.21 范诺线

(a) 表示绝热流动在 h-s 图上一系列的平衡状态;

(b) 表示有摩擦流动在 h-s 图上一系列的平衡状态;

(c) 是从能量、连续和物态方程推导出来的;

(d) 仅代表亚声速流动;

(e) 在等面积管道中代表等温流动.

7.22 等面积管道中,关于有摩擦绝热的超声速流动

(a) 沿流向温度将升高;
(b) 驻点温度下降;
(c) 驻点压强减小;
(d) 速度增大;
(e) 极限马赫数是 1.

7.23 理想气体在等面积管道中的等温流动
(a) 沿流向压强减小;
(b) 热量从流体传出;
(c) 流体质点被加速;
(d) 流体密度减小;
(e) 最大马赫数是 1.

7.24 理想气体在绝热等面积管道中流动,初始马赫数小于 1,
(a) 沿流向速度减小;
(b) 沿流向温度减小;
(c) 马赫数能增大到超过 1;
(d) 沿流向熵总是增大的;
(e) 压强是常数.

7.25 理想气体在等面积无摩擦管道中流动,对其加热或冷却的结果是
(a) 加热总是引起熵增大;
(b) 加热总是引起速度增大;
(c) 加热总是引起温度升高;
(d) 加热总是引起速度减小;
(e) 对亚声速流动,极限马赫数是 1.

7.26 非理想气体在无摩擦等面积管道中作绝热流动
(a) 当熵增大时驻点温度升高;
(b) 在 $M=1$ 处出现最高温度;
(c) 在 h-s 图上的平衡状态曲线称为瑞利线;
(d) 可应用等熵方程;
(e) 对超声速流动,极限马赫数是 1.

7.27 理想气体在无摩擦等面积管道中作绝热流动
(a) 沿流向压强必减小;
(b) 温度将保持为常数;
(c) 速度将保持为常数;
(d) 熵将增大;
(e) 马赫数将保持为常数.

7.28 300℉下,二氧化碳气体的声速是多少? 60℉下,水的声速是多少?

7.29 空气绕物体流动,在未受扰动区中有一点 A,该点处的密度是 0.002378slug/ft^3,压强是 14.7psi,速度是 350ft/sec. 物体上 B 点处的压强是 7.35psi. 若流动是无摩擦绝热的,试求 A 和 B 点处的马赫数.

7.30 飞机在标准空气中飞行,速度是 600ft/sec. 飞机表面某点处空气相对于飞机的速度是 200ft/sec. 试求该处的当地马赫数.

7.31 物体以 400ft/sec 的速度在标准空气中运动. 物体上某点处空气相对于物体的速度为零,求该点的压强.

7.32 一钝头炮弹以 1900ft/sec 的速度在静止空气中运动,空气压强为 14.7psi,温度是 60℉. 试计算驻点压强、驻点焓和驻点温度.

7.33 设计一喷管,以 0.30lb/sec 的流量将空气等熵地从 50psi 和 200℉膨胀到 18psi. 试计算(a)喷管出口处的马赫数? (b)出口面积为多少 ft^2?

7.34 空气等熵地流过一收缩喷管,喉部面积是 0.1ft^2. 入口处空气为 60psi 和 200℉,速度近似为零. 集气罐压强是 15psi. 试求质量流量为多少 lb/sec?

7.35 空气通过收缩-扩张喷管作膨胀流动,过程是无摩擦和绝热的. 若喷管将空气从压强 160psi 和温度

20°F膨胀到压强20psi. 试确定(a)若质量流量是4.5 lb/sec,为了设计出最佳的无激波喷管,其喉部和出口面积为多少?(b)喷管出口马赫数是多少?

7.36 初态为50psi和250°F的空气,等熵地流过喉部面积为0.4in^{2}的收缩-扩张喷管. 下游压强是14.7psi,温度是40°F. 试计算(a)质量流量是多少lb/sec?(b)喷管出口速度是多少?

7.37 100psi和140°F的空气流经一收缩喷管进入集气罐,罐中压强是20psi. 假定流动是无摩擦和绝热的,并且可以不计上游速度,试计算喉部速度.

7.38 (原著同7.37题)

7.39 示意地画出理想气体的h-s和T-s图,气体绝热地流过(1)一根长直管,(2)一个喷管,(3)一个扩散器.

7.40 某种气体(分子量是18,$k=1.3$)被泵入内径为36in的管道,该管道连接两个相距40mi的压气机站. 上游站的压强不超过90psi,下游站的压强不低于10psi. 假定通过管道有充分的热交换,以保持气体温度为70°F,运动黏度系数是4×10^{-4} ft^2/sec. 试计算在70°F和1atm下所允许的最大体积流量是多少ft^3/day?

7.41 200psi和60°F的空气,以190ft/sec的速度进入直径为6in的管道. 摩擦系数f是0.016. 若流动是等温的,问压强为75psi处的马赫数和入口至该位置的距离是多少?

7.42 600psi,温度为200°F,速度为300ft/sec的空气流进一水平管道. 对等温流动而言,极限压强是多少?对绝热流动而言,极限压强是多少?

7.43 压强是120psi和温度为80°F的空气流入一钢管. 钢管长950ft,内径5in. 入口速度是80ft/sec. 假定为等温流动,试求(a)如果流体视为可压缩的,其压强降是多少(psi)?如果流体视为不可压缩的,其压强降又是多少(psi)?

7.44 初始压强为60psi,温度为140°F的氢气流入一水平绝热管道,管道长900ft,内径为0.2ft. 摩擦因子是0.015. 问可能的最大流量是多少?为保持这种流动所需的压强降为多少?

7.45 将空气充入实验室的大容器,压强达到200psi,温度为室温. 请设计一超声速喷管拧在容器壁上,将容器中的空气以超声速排向大气(如果把一个小翼型或实验物体放在喷管气流中,其效果如同是一个下吹式超声速风洞). 假定对所感兴趣的性能有一个短时间间隔,在此时间间隔内容器中空气的压强保持为200psi. 令喉部面积是0.5in^2.

7.46 在7.9题中,如果背压强升高或降低,请讨论会发生什么变化?

7.47 气源压强是2MPa,通过收缩一扩张喷管与直径为0.01m的绝热长管相连. 喷管喉部面积比是$A^*/A_1=0.2362$,其中A_1是长管的横截面积. 平均摩擦因子是0.001,求L_{max}. 管内无激波(平滑)流动时的背压强为多少?如果该背压强保持不变,而管长变成$2L_{max}$,求管中激波的位置. 如果管长变成$0.5L_{max}$,激波又会位于何处?在上述各种情况下,请详细讨论当背压强升高或降低时会发生什么?

第七章符号表

A=面积
a=声速
C=浸湿周长
c_p=定压比热
c_s=激波速度
c_v=定容比热
D=管道的水力学直径
f=范宁摩擦因数
h=单位质量焓(比焓)
k=比热比,c_p/c_v
K=开尔文度
L=管道长度
M=马赫数,V/a
$\dot{m}$=质量流量
p=压强
°R=兰金度
R=气体常数
s=单位质量熵(比熵)
T=绝对温度
t=时间
u=单位质量内能(比内能)
V=速度
v=比容=$1/\rho$
x=轴向坐标
ρ=密度
τ_0=壁面剪应力
$(\ )_c$=表示临界条件
$(\ )_R$=表示集气罐条件(背压强)
$(\ )_0$=表示驻点条件
$(\ )_t$=表示喉部条件
$(\ )^*$=表示壅塞流或$M=1$条件

第八章 二维可压缩流动气体动力学

8.1 理想可压缩流动方程组

第六章讨论了二维不可压缩位势流动,第七章讨论了一维可压缩流动. 这里将延伸这些内容,得出可压缩无摩擦(理想)流动的更一般的处理方法. 因为流动是理想的,所以可以再一次表明整个流动是无旋的(如果自由流是无旋的),因而也是有势的. 这里将涉及一般的三维可压缩位势流动,不过为了显示计算方法,通常将局限于讨论二维问题.

如前所述,这里只讨论边界层(边界层内流动是有旋的)之外的流动,主要是涉及空气动力学问题——绕机翼和飞机的流动.

在低速(马赫数 $M<0.3$)流动时,流体特性近似是不可压缩的,故采用不可压缩位势流动的分析(见第六章)是合适的. 随着流速增加,压缩性效应变得越来越重要,当马赫数越过 1 时,在物体上会形成激波,下面将研究这种流动. 如果自由流马赫数大于 1($M>1$),流动是超声速的,这是与亚声速($M<1$)非常不同的流动. 当物体上一部分是亚声速流动,另一部分是超声速流动时,称之为**跨声速流动**. 在定常跨声速流动中,物体上可以发现 $M<1$, $M=1$ 和 $M>1$ 的区域. 与纯粹的亚声速或超声速流动相比,跨声速流动在数学上是相当复杂的. 当飞机从亚声速加速到超声速运动时,飞机必须经历跨声速状态.

本章将研究很宽的马赫数范围. 从亚声速区开始一直延伸到很高的马赫数. 当马赫数 M 大于 6 时,称为**高超声速流动**,在这种情况下,对普通超声速所做的许多假设将不再适用,从而使分析变得更为复杂. 当 M 增大到高超声速区域时,边界层摩擦增大,驻点温度变得如此之高(当 M 大于 6 时),以至于边界层内的温度大增,将会使飞行器表面变得非常热,为了防止结构破坏而不得不使用特殊的耐熔材料或烧蚀材料. 再入飞行器就会经历如此高的马赫数范围. 第十章会讨论高超声速边界层的结构. 这里,我们仅关心边界层以外的位势流动解. 从亚声速流动到高超声速流动,控制流动的定律基本上是相同的. 但是,当马赫数变化时,基本方程中各个项,有的变得更重要,有的变得不重要. 事实上,当 M 大于 1 和 M 小于 1 时,微分方程的整个性质发生了改变. 其结果是:亚声速和超声速流动的流动图像是完全不同的.

在大多数可压缩空气动力学流动问题中,把整个流动视为无摩擦、无旋和等熵流动是恰当的. 然而,对超声速流动,可能会出现激波,流动越过激波是不等熵的.

这里先简要地评述除激波计算之外都可以使用的无摩擦、等熵流动的基本方程组. 一般讲,该方程组是非线性的,因此必须发展出各种近似解法. 在某些情况下,即使有激波出现,也可以构筑出精确解.

基本方程组与第五章所推导的方程组相同,不过,现在必须计及可压缩性效应,因此还必须考虑能量方程或与能量方程等效的方程. 这样,基本方程组包括连续、运动和能量方程. 如果用温度表示的能量方程,还必须有物态方程. 如果整个流动是等熵的,则可以利用压强与密度之间的等熵关系式,而不必使用能量方程.

正如第五章中已表明的,只要流动是无旋的,绝热无摩擦流动沿流线就是等熵的. 进而,如果整个流动有均匀的总焓(或驻点焓), $h_0=h+V^2/2$,另外还是无旋的,那么整个流动均是

等熵的. 这样的流动有时称之为**均熵流**①.

完全气体二维均熵流动(体积力可忽略),其基本关系式是

连续：
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0 \tag{8.1}$$

动量：
$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x} \tag{8.2}$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}$$

等熵关系：
$$p/p_0=(\rho/\rho_0)^k \tag{8.3}$$

其中 $k=c_p/c_v$ 是比热比,p_0 和 ρ_0 是任意参考状态下的压强和密度,通常取自由流数值或驻点值.

方程(8.1)至(8.3)是独立的,但不是惟一的. 也可以用完整的能量方程连同物态方程来代替(8.3)式. 如果流动是非绝热的,则必须做这样的替代.

由于流动是无旋的,因此可以引入速度势,其定义是 $\boldsymbol{V}=-\nabla\phi$. 这样$\nabla p$ 项可写成

$$\nabla p=(\partial p/\partial\rho)_s\nabla\rho=a^2\nabla\rho \tag{8.4}$$

其中 a 是声速. 这样可形成 $\boldsymbol{V}$ 的标量积和矢量形式的运动方程,再用(8.4)和(8.1)式消去 p 和ρ,所得结果(对二维流动)是

$$(u^2-a^2)\frac{\partial u}{\partial x}+(v^2-a^2)\frac{\partial v}{\partial y}+uv\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0 \tag{8.5}$$

以及条件$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$,或者用 ϕ 表示为

$$\frac{1}{a^2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}\left(2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)\right]=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \tag{8.6}$$

当 $a\to\infty$时,上式简化成$\nabla^2\phi=0$,这正是不可压缩流动所适用的方程. 方程(8.6)是用 ϕ 描述流动的单一方程,但是方程中的声速 a 必须通过能量方程建立与速度分量的联系,从而使情况变得复杂化. 在 8.3 节中讨论小扰动理论时,将清楚地完成这种计算. 对薄物体,例如翼型和细长旋成体,小扰动方法可使方程(8.6)线性化(并获得近似解).

8.2 节讨论精确的激波-膨胀波解法,在 8.4 节讨论方程(8.5)的求解方法.

8.2 激波-膨胀波理论

如果流动完全由激波和/或膨胀波组成,那么某些绕简单几何体的流动可以获得精确解. 这里先讨论斜激波和简单膨胀波,然后说明怎样把这些解组合起来去描述某些绕简单形状物体的流动.

斜激波

图 8-1 表示一道斜激波. 由动量守恒可知,越过激波切向速度分量 V_t 是连续的,所以有 $V_{t1}=V_{t2}$,而 V_{n1}和 V_{n2}之间的关系如同第七章中的正激波关系. 因此,利用法向速度表示,一

---

① 用克罗柯定理说明如下. 克罗柯定理是

$$T\nabla s+\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})=\nabla h_0+\partial\boldsymbol{V}/\partial t$$

其中 s 是比熵. 如果$\nabla\times\boldsymbol{V}=0$ 和$\nabla h_0=0$,则对定常流动有$\nabla s=0$. 这里不证明该定理,而是根据运动方程和热力学关系 $T\mathrm{d}s=\mathrm{d}h-(1/\rho)\mathrm{d}p$. 在大多数空气动力学流动中,流体来自相同的气源,因此自由流是常数,h_0 也是常数.

道斜激波将等同于一道正激波，而马赫数(用 V_n 表示，$M_1=V_{n1}/a_1$)、压强、密度等可用正激波中相同的方法进行叙述. 因为 $V_{t1}=V_{t2}$，但是 $V_{n1}\neq V_{n2}$，所以穿过斜激波，实际的速度矢量 $\boldsymbol{V}$ 要转动，并改变大小，如图 8-2 所示. V_{n1} 大于声速 a_1，V_{n2} 必定小于声速 a_2. 然而，虽然 $V_1>a_1$，但 V_2 却有可能大于 a_2. 所以在斜激波情况下，尽管激波后速度的法向分量是亚声速的，而波后速度却不必是亚声速值.

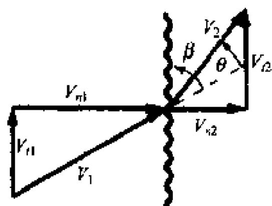


图 8-1　斜激波

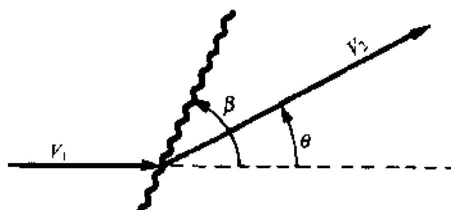


图 8-2　越过激波速度矢量的转动

令 $M_1=V_1/a_1$ 和 $V_{n1}=V_1\sin\beta$，所以 $V_{n1}/a_1=M_1\sin\beta$. 利用第七章中的正激波关系，这里用 $M_1\sin\beta$ 代替正激波中的 $M_1$①. 为了查阅，将斜激波关系列出如下.

$$\frac{V_{n1}}{V_{n2}}=\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{(k+1)(M_1^2\sin^2\beta)}{(k-1)M_1^2\sin^2\beta+2}$$

$$\frac{p_2-p_1}{p_1}=\frac{2k}{k+1}(M_1^2\sin^2\beta-1)$$

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{a_2^2}{a_1^2}=1+\frac{2(k-1)}{(k+1)^2}\frac{M_1^2\sin^2\beta-1}{M_1^2\sin^2\beta}(kM_1^2\sin^2\beta+1)\tag{8.7}$$

$$\frac{s_2-s_1}{R}=\ln\left\{\left[1+\frac{2k}{k+1}(M_1^2\sin^2\beta-1)\right]^{1/(k-1)}\cdot\left[\frac{(k+1)M_1^2\sin^2\beta}{(k-1)M_1^2\sin^2\beta+2}\right]^{-k/(k-1)}\right\}$$

$$M_2^2\sin^2(\beta-\theta)=\frac{1+\frac{1}{2}(k-1)M_1^2\sin^2\beta}{kM_1^2\sin^2\beta-\frac{1}{2}(k-1)}$$

注意到 $0<\beta<\pi/2$ 和 $M_1\sin\beta=V_{n1}/a_1\geqslant 1$，所以对于一个给定的 M_1，β 有一个最小值. 因此，

$$\arcsin(1/M_1)\leqslant\beta\leqslant\pi/2\tag{8.8}$$

对于正激波，$\beta=\pi/2$. 对于弱激波，激波退化成声波，$\beta=\arcsin(1/M)$.

注意到 $M_2=V_2/a_2$ 和 $V_{n2}/a_2=M_2\sin(\beta-\theta)$，可以求得 M_2 的值. 根据正激波关系

$$M_2^2=\frac{1+\frac{1}{2}(k-1)M_1^2}{kM_1^2-\frac{1}{2}(k-1)}$$

分别用 $M_1\sin\beta$ 和 $M_2\sin(\beta-\theta)$ 代替 M_1 和 M_2，可得

① 将 $M_1\sin\beta$ 视为正激波数表中的 M_1，就可以利用正激波数表.

$$M_2^2\sin^2(\beta-\theta)=\frac{1+\frac{1}{2}(k-1)M_1^2\sin^2\beta}{kM_1^2\sin^2\beta-\frac{1}{2}(k-1)} \tag{8.9}$$

利用方程(8.7)中的第一个表达式和 V_{n2} 相对于 V_{n1} 的几何关系($\tan\beta=V_{n1}/V_{t1}$, $\tan(\beta-\theta)=V_{n2}/V_{t1}$),可以把 β 和 θ 关联起来. 所以有

$$\frac{\tan(\beta-\theta)}{\tan\beta}=\frac{(k-1)M_1^2\sin^2\beta+2}{(k+1)M_1^2\sin^2\beta}$$

或者改写成

$$\tan\theta=2\cot\beta\frac{M_1^2\sin^2\beta-1}{M_1^2(k+\cos2\beta)+2} \tag{8.10}$$

给定一个 M_1,对每一个 θ 值存在两个 β 值. 图 8-3 画出了方程(8.10)的曲线图.

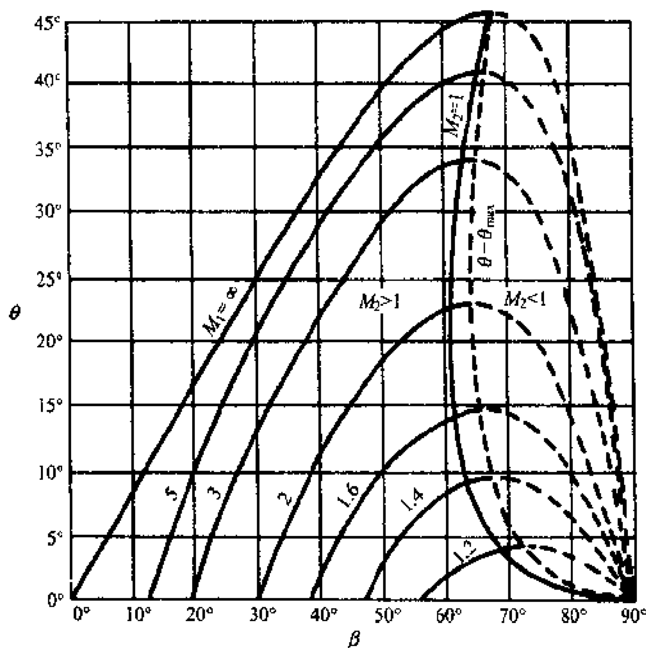


图 8-3　斜激波的 β 与 θ 的关系

对于任意一个 θ 值($\theta<\theta_{max}$)有两个解. 实际上,如果 $\theta<45°$,通常是弱解(较小的 β 值). 除了在 $M_2=1$ 曲线和 $\theta=\theta_{max}$ 曲线之间的小区域之外,与弱解对应的 M_2 仍然大于 1.

在实践中怎样确定 β 和 θ? 或者说斜激波是怎样产生的? 一个简单的例子是绕拐角的流动,如图 8-4(a)所示. 一个对称的尖楔也可产生相同的流动图像,见图 8-4(b),该图像对称于水平中心线. 矢量 $\boldsymbol{V}_2$ 平行于楔(或拐角)的表面,其倾角为 θ. 只要 M_1 是确定的,随之 β 也是确定的.

对于任一给定的马赫数,存在一个最大的 θ 值. 如果实际的楔角 θ 大于最大值,其结果是激波将离开物体,并位于物体前方. 该脱体激波在物体周围弯曲,称之为**弓形激波**. 弓形激波的位置取决于下游流动. 弓形激波后总有一个亚声速区. (弓形激波的顶点处总是正激波,波后 $M_2<1$,其跃变条件沿弯曲激波连续地变化.)完整的描述弓形激波是困难的,事实上弓形激波的位置不能清楚地确定(因为亚声速可以影响上游),以至于必须同时考虑整个流动. θ 有一个绝对极限,当 θ 大于 45°时,无论马赫数 M_1 如何大,激波总是脱体的. 因此,只要物体

是钝头体,激波就是脱体的(因为在头部 $\theta=90°$). 图 8-5 中的虚线称之为**声速线**,线上的 $M=1$. 声速线把超声速流动区与亚声速流动区分开.

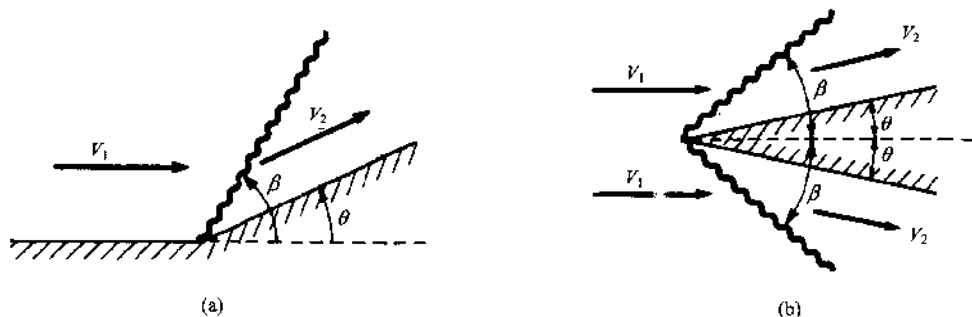


图 8-4 流动 (a)越过折角和(b)绕对称楔所产生的斜激波

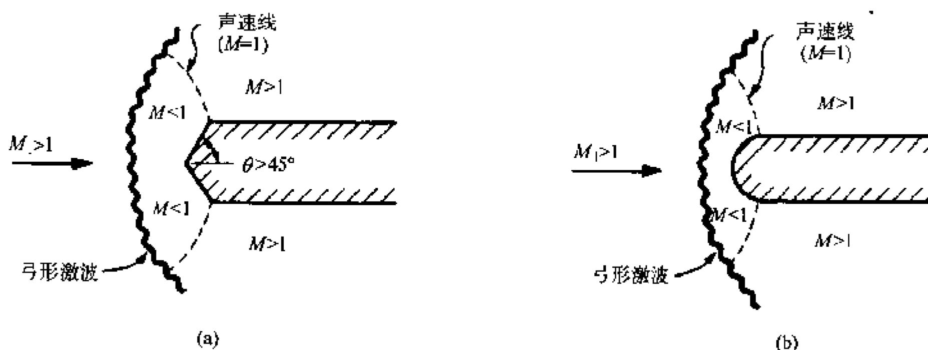


图 8-5 脱体激波. (a)楔;(b)钝体

当楔角 θ 变为零时,β 角变为 $\arcsin(1/M)$,这种波称之为**马赫线**. 它仅仅是声音扰动的轨迹,因为激波强度已变得无限小,所以任何无限小扰动或声扰动将沿着该线传播. 角 $\arcsin(1/M)$用 μ 表示,称之为**马赫角**. 在三维情况下,马赫线形成一个锥面(从一个点扰动,正如第七章所讨论的).

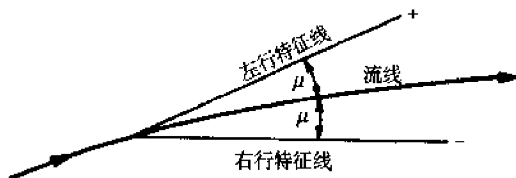


图 8-6 超声速流中的特征线
[$\theta\to0$ 和 $\beta\to\mu=\arcsin(1/M)$]
一组在流线右边行走,另一组在左边行走

在二维情况下,流动中任一点处有两条马赫线,马赫线与流线之间的夹角为 $\pm\beta=\arcsin(1/M)$. 这样的线称之为**特征线**,而且必定指向下游,因为在超声速流动中扰动不会影响上游(见图 8-6).

在三维情况下,马赫线的轨迹形成一个锥,称之为**马赫锥**. 在飞机或导弹前面可形成这样的**马赫锥**,它描绘出了影响区,如 7.1 节所讨论的. 在速度矢量右边的马赫线称之为**右行特征线**(或马赫线),左边的马赫线称之为左**行特征线**. 有时也用符号(-)或(+)分别表示这两条线. 这两种表示方法可任意选用.

当 θ 角变得很小,但为有限值时,激波会变得很弱,这时激波关系可进行简化. 可以证明跨过激波 $\Delta p\sim\theta$,而 $\Delta s\sim\theta^3$,由此可见对于非常弱的激波,流动近似是等熵的. 越过弱激波速度的变化量 ΔV 近似是(当流动偏转 $\Delta\theta$ 时)

$$\frac{\Delta V}{V}=-\frac{\Delta\theta}{\sqrt{M_1^2-1}} \tag{8.11}$$

该式对等熵流是精确的. 如果压缩是通过连续弯曲产生的(见图 8-7),则会形成连续的马赫线族,而式(8.11)可写成微分形式

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \tag{8.12}$$

马赫线汇聚形成激波,但是在物体附近由马赫线组成的压缩扇中流动近似是等熵的.

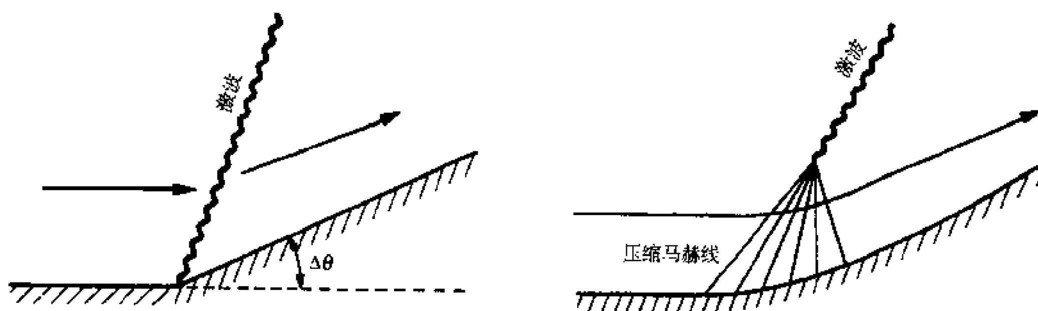


图 8-7　由转弯形成的超声速压缩流动

斜激波会从固壁反射,使反射激波下游的流动平行于壁面. 图 8-8 显示了这种反射. 一般而言,由激波相交(见图 8-8(b))等引起的激波相互作用可以利用这样的条件来描述:即流动方向必须适应固体边界或满足连续性的要求.

如果反射激波需要的偏转角大于上游马赫数所可能产生的转角,在这种情况下将会发生从壁面脱离,见图 8-8(c).

如果激波击中折角处的壁面,并且下游壁面与下游流动相一致,这样将不会出现反射,激波被"消失",见图 8-8(d).

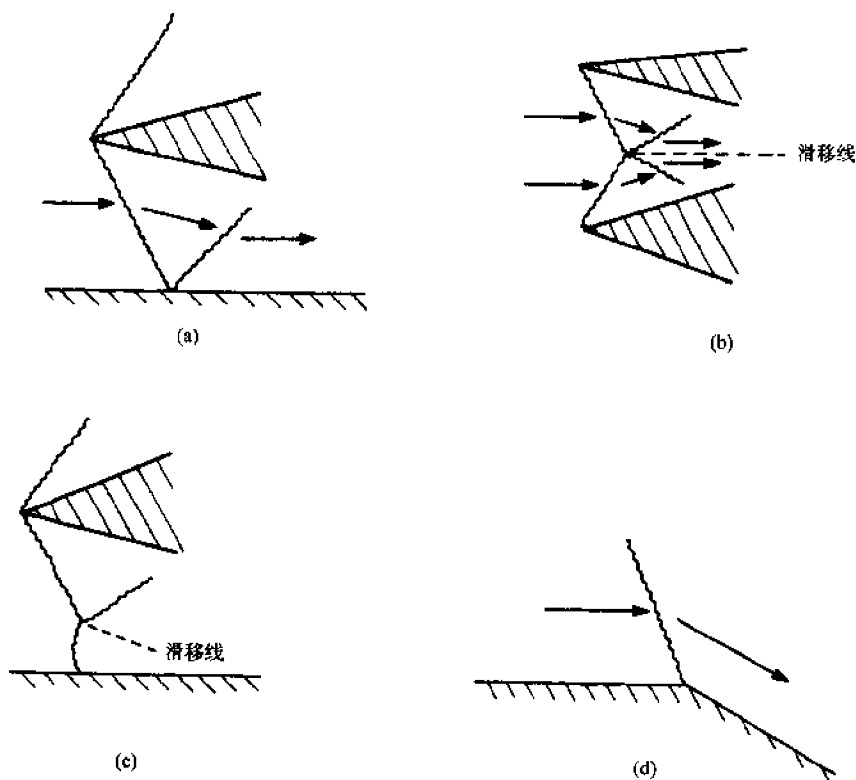


图 8-8　激波相互作用. (a)从固壁反射,(b)两道激波相交,(c)从壁面脱离,(d)消失

超声速膨胀和普朗特-迈耶函数

在凸折角或凸曲面上的流动,不可能形成激波,而是进行等熵膨胀,见图 8-9. 一条单一的波不可能调节这样的变化(它将导致熵减少),必须形成扇形波. 图 8-9 中画出的各条线实际上是马赫线或特征线. 在流动中任一点处,这些线与流线的夹角是 arcsin$(1/M)$. 沿马赫线所有流体特性是常数,速度矢量也是这样.

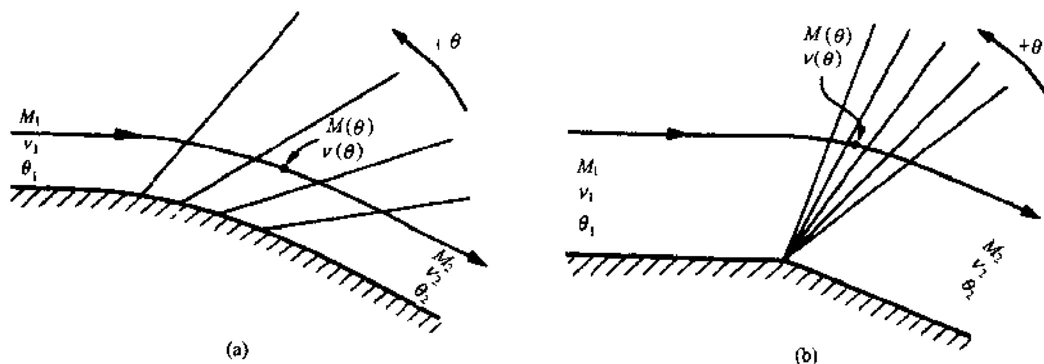


图 8-9　在凸面上的超声速膨胀. (a)绕曲面连续膨胀,(b)在尖拐角处的中心膨胀扇

方程(8.12)适用于整个膨胀区,θ 是流线的倾角,并可以为任意数值. 通常取 $\theta_1=0$,规定逆时针测量的 θ 为正(见图 8-9,图中若取 $\theta_1=0$,那么 θ_2 是负的). 对方程(8.12)积分,可得

$$-\theta+\text{const}=\int_{V_1}^{V}\sqrt{M^2-1}\,\frac{\mathrm{d}V}{V}=\nu(M) \tag{8.13}$$

函数 $\nu(M)$称之为**普朗特-迈耶函数**,该函数的显解是

$$\nu(M)=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\arctan\sqrt{\frac{k-1}{k+1}(M^2-1)}-\arctan\sqrt{M^2-1} \tag{8.14}$$

式中 ν 用弧度表示. 式(8.13)中的常数可任意选择,为此选 $M=1$ 时,$\nu=0$,这样,最后可得

$$-(\theta-\theta_1)=\nu(M)-\nu_1(M_1) \tag{8.15}$$

对给定的 θ_1 值(通常取为零)和 M_1 值,可以求出 $\nu(M)$,由此对任何 θ 值可得到相应的 M 值. $\nu(M)$是 M 的单调函数,$\nu(M)$值从 $M=1$ 时的零变化到 $M\to\infty$时的 ν_{max},这里 $\nu_{max}=\frac{1}{2}\pi(\sqrt{(k+1)/(k-1)}-1)$. 对超声速膨胀,$\theta$ 是负的,对超声速压缩,θ 是正的(见图 8-10). 对空气,ν_{max}是 2.77rad 或 130°.

$\nu(M)$的简表列于表 8.1①,表中单位是度.

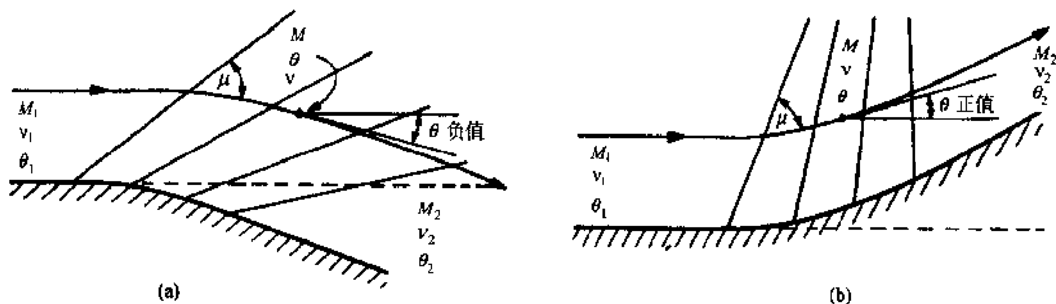


图 8-10　超声速膨胀和压缩. 马赫线与流线之间的当地夹角是 μ. (a)超声速膨胀;(b)超声速压缩

① 更完整的数表可从参考文献或附录 D 中找到.

表 8.1　普朗特-迈耶函数

ν/度	0.0	26.5	49.8	65.7	77.0	85.0	91.0	95.6	99.3
M	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00

例如，考虑一凸表面上的流动(见图 8-9(a))，总的转角是 10°，$M_1=2$. 根据表 8-1，查得 $\nu_1=26.5°$，由 $\theta_2=-10°$，利用式(8.15)有 $\nu_2=26.5°+10°=36.5°$，因此 M_2 近似为 2.39. 值得注意的是在确定最终状态时与曲率没有关系. 一个尖折角与一个平滑曲线对膨胀波可给出相同的结果. 但对压缩情况而言，只有光滑曲线是等熵的，一个尖凹角将导致一道激波.

当绕折角膨胀时，如果 $|\theta|$ 角大于 ν_{max} 会怎样？在这种情况下，流线相当于绕 ν_{max} 膨胀所呈现的流动，在“滑流”或“切向不连续”线与物体之间的区域中流体是滞止的. 滑流线两侧的压强是连续的，但速度是不连续的，见图 8-11.（实际上，由于形成涡层，滑流线和滑流线以下的流体可能是湍流，而不是滞止不动.）

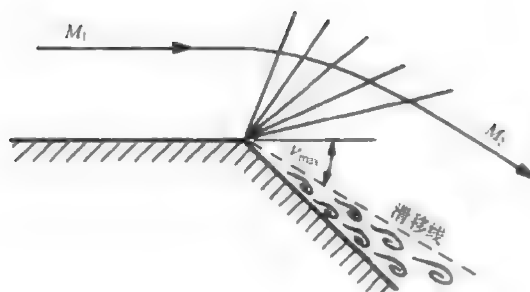


图 8-11　绕 $|\theta|>\nu_{max}$ 拐角的膨胀，形成滑移线

斜激波和膨胀波的组合

在超声速流动中，把斜激波解和等熵膨胀流解连接起来，就能获得绕较为复杂外形的流动图像. 因为流动是超声速的，没有上游效应，因此计算这种流动可以采用在物体上“推进”的方法. 图 8-12 显示的是几种绕简单物体的

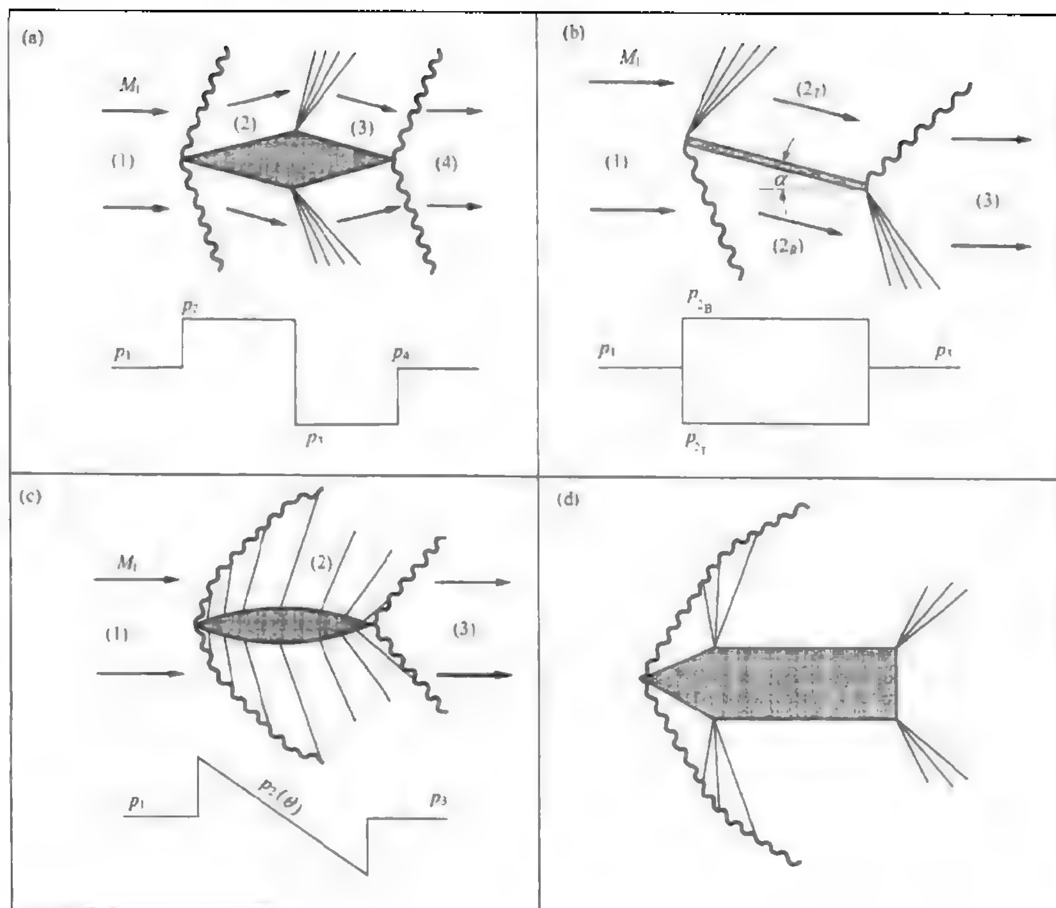


图 8-12　二维物体上的激波-膨胀波流动

流动,图上同时画出了压强分布曲线.

在图 8-12(b)中,流体流过有攻角平板的上下两面,然后流体必定在平板尾缘处会合,会合后的压强等于自由流压强,然而会合后"接触面"两侧的速度、温度和密度可能稍有差异. 图中平板下部通过激波压强增大,上部通过膨胀波压强减小,由此导致平板产生升力. 与亚声速升力翼型不同,超声速翼型在流动方向上有压力分量. 这种力是阻力,称之为**波阻**.

实践中,超声速飞机的机翼在某些方面的行为像亚声速机翼,这样可以减小波阻. 超声速飞机上出现亚声速机翼,这是可能的,因为像后掠机翼会导致垂直于机翼前缘的速度分量是亚声速的.

在早期的超声速飞行中,机翼是薄而直的(即机翼垂直于机身).流动图像类似于图 8-12(b)所示的图像. 首次试飞时,在亚声速与超声速之间的跨声速区飞机很难控制. 在此区域中,沿机翼上表面形成垂直于机翼的激波,由于激波处出现边界层分离,引起升力下降,从而破坏了控制面的效率. 飞机尾翼(升降舵)也会遭遇同样的情况. 在那时解决的办法是提升水平尾翼至机翼的洗流之外,还使用全动水平尾翼作为升降舵. 在现代超声速飞机设计中采用"后掠"机翼使这个问题得到解决.

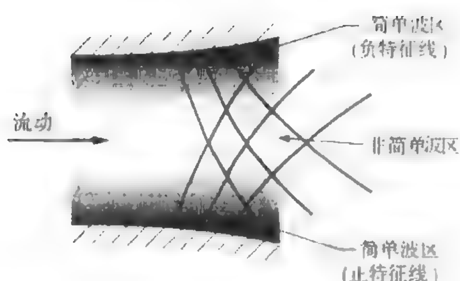


图 8-13 喷管中的非简单波流动. 膨胀波相互作用,而特征线不再是直线

简单波区和非简单波区

前面已讨论过简单的斜激波和等熵膨胀波或等熵压缩波. 在有些区域中这些波会相互作用并发生弯曲(特征线不再为直线),使简单波解不再有效,必须用完整的方程组求解. 一般讲,这些方程是非线性的,但是,在某些简单情况下,如绕薄物体的流动,方程组可以线化. 这些解法将在 8.3 节中讨论. 图 8-13 所示的喷管流动是非简单波流动的实例.

薄翼型理论

绕小攻角薄翼型的流动,只要激波足够弱,可以视为等熵流动,那么激波-膨胀波理论就能作显著地简化. (随后要讨论的线化扰动理论可获得相同的结果.)对弱激波或膨胀波,根据式(8.7)和(8.9),压强变化近似是

$$\frac{\Delta p}{p} \approx \frac{kM^2}{\sqrt{M^2-1}}\Delta\theta$$

假设 M 接近于 M_1, p 接近于 p_1,则有

$$\frac{p-p_1}{p_1} \approx \frac{kM_1^2}{\sqrt{M_1^2-1}}\theta \tag{8.16}$$

压强系数 C_p 定义为

$$C_p = \frac{p-p_1}{\frac{1}{2}\rho_1 V_1^2} = \frac{p-p_1}{\frac{1}{2}kp_1M_1^2} = \frac{2}{kM_1^2}(p/p_1-1) \tag{8.17}$$

其中下标 1 代表自由流值. 因此,从式(8.16)和(8.17)可得

$$C_p = \frac{2\theta}{\sqrt{M_1^2-1}} \tag{8.18}$$

对于攻角为 α 的平板,如图 8-12(b)所示,其下表面 C_p 可简化成 $C_{pB} = +2\alpha/\sqrt{M_1^2-1}$,而

上表面则为 $C_{pT}=-2\alpha/\sqrt{M_1^2-1}$. 那么,升力系数和阻力系数分别为

$$C_L=\frac{\text{单位长度升力}}{\frac{1}{2}\rho_1 V_1^2 c}=\frac{(p_B-p_T)c\cos\alpha}{\frac{1}{2}\rho_1 V_1^2 c}=(C_{pB}-C_{pT})\cos\alpha$$

$$C_D=\frac{\text{单位长度阻力}}{\frac{1}{2}\rho_1 V_1^2 c}=\frac{(p_B-p_T)c\sin\alpha}{\frac{1}{2}\rho_1 V_1^2 c}=(C_{pB}-C_{pT})\sin\alpha$$

式中 c 是弦长(翼型宽度). 由于 α 是小量,所以 $\cos\alpha\approx1,\sin\alpha\approx\alpha$,最后,对小攻角($\alpha$)平板有

$$C_L=\frac{4\alpha}{\sqrt{M_1^2-1}},\quad C_D=\frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_1^2-1}} \tag{8.19}$$

一般讲,可以证明薄翼型的压强系数的表达式是

$$C_{pT}=\frac{2}{\sqrt{M_1^2-1}}\left(\frac{\mathrm{d}f_T}{\mathrm{d}x}\right),\quad C_{pB}=\frac{2}{\sqrt{M_1^2-1}}\left(-\frac{\mathrm{d}f_B}{\mathrm{d}x}\right) \tag{8.20}$$

式中 $f_T(x)$ 和 $f_B(x)$ 分别是翼型的上表面方程和下表面方程.(参见图 8-14.)根据式(8.20),可得 C_L 和 C_D 的表达式

$$C_L=\frac{4\bar{\alpha}}{\sqrt{M_1^2-1}},\quad C_D=\frac{4}{\sqrt{M_1^2-1}}\left[\overline{\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right)^2}+(\bar{\alpha})^2+\overline{\alpha_c^2(x)}\right] \tag{8.21}$$

其中 $h(x)$ 是翼型的半厚度,$\bar{\alpha}$ 是平均攻角,而 $\alpha_c(x)$ 是当地攻角,即弯度线与平均攻角线的夹角,平均攻角线倾斜 $\bar{\alpha}$ 角. 详见图 8-14.

根据下一节的扰动理论也可以获得相同的结果.

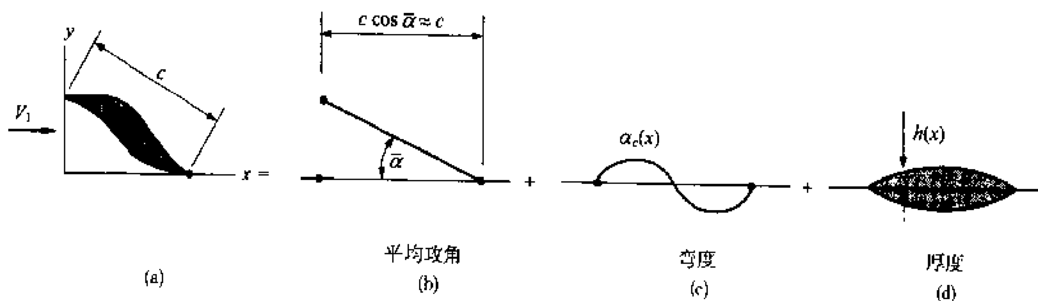


图 8-14　小攻角下的薄翼型. 在(a)情形的翼型可以分解成(b)、(c)和(d)

塞喷管

第七章已讨论过收缩—扩张喷管. 随后的 8.4 节中还将讨论这种二维喷管的形状.

在超声速喷气发动机设计中有广泛应用的另一种型式的喷管是塞喷管. 在这种喷管中,流动是外流,并通过普朗特-迈耶膨胀扇完成膨胀. 图 8-15 显示了一个二维塞喷管剖面的一半. 中心体产生连续的膨胀(如果反向流动则为压缩). 通过适当的设计,特征线(马赫线)可以聚焦于一点. 沿每条马赫线,速度矢是平行的,并且所有的特性是常数. 根据普朗特-迈耶函数的特性和连续性条件可以容易地求出这种中心体表面的形状.

超声速喷气发动机进气道

喷管通常用来产生超声速流动,如火箭喷管,相反地,也可用来滞止超声速流动,使之成为压强较高的亚声速流动. 后者的应用对于超声速喷气发动机进气道的设计具有特殊的意义. 空气在进入发动机的压气机之前,在进气道中被滞止到尽可能高的压强. 一个普通的收缩-扩张喷管可以倒过来使用,流动从喷管的出口进入,反向流过喉部,然后进入发动机的压气机,并在理论上接近于流动的等熵滞止压强.

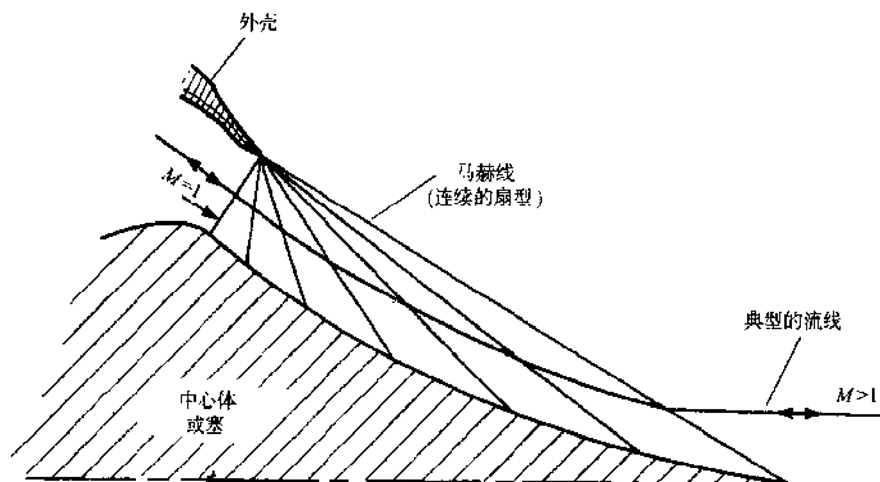


图 8-15　塞喷管．为了加速或扩散流动而精心设计的可双向流动的等熵喷管．这里显示的是横截面(上半部)．类似的设计对旋成体(轴对称流动)也是有效的

使用普通收缩-扩张喷管的缺点是当飞机加速到发动机前方出现弓形激波时,会产生很大的阻力,同时会减小激波波后的驻点压强．最终激波可以被发动机喷管所吞没,从而达到无激波运行状态．并且有最佳的恢复压强．然而,为了吞没激波,飞机必须先超过巡航速度"过速"飞行,然后再回到巡航速度．这种操作是很麻烦的,而且燃料效率低．另外,任何给定的喷管只能在很窄的马赫数范围内有效地运行．

一种既能滞止进气道空气,而驻点压强又无明显损失的更为有效的方法是采用上节所讨论的塞喷管．这种类型的喷管具有不必过速的优点,并可以更平滑的在一个宽的马赫数范围内运行．

SR-71"黑鸟"侦察机需要在很高高度上持续飞行,该飞机使用了一种圆柱型塞喷管．对于一架必须在宽速度范围内运行的飞机而言,采用(飞行时)可变喷管是更可取的．在实践中,只有二维形状可以实现变喷管,即矩形管道的一边是可调节的,用两块或三块可控制的短铰接板或斜坡道来近似塞喷管的弯曲形状．这样,连续等熵压缩被一组不连续的弱激波所代替．就恢复滞止压强而言,虽然这些弱激波不如光滑曲面有效,但比一道正激波有显著改善．图 8-16 显示了这种进气道的剖面图．

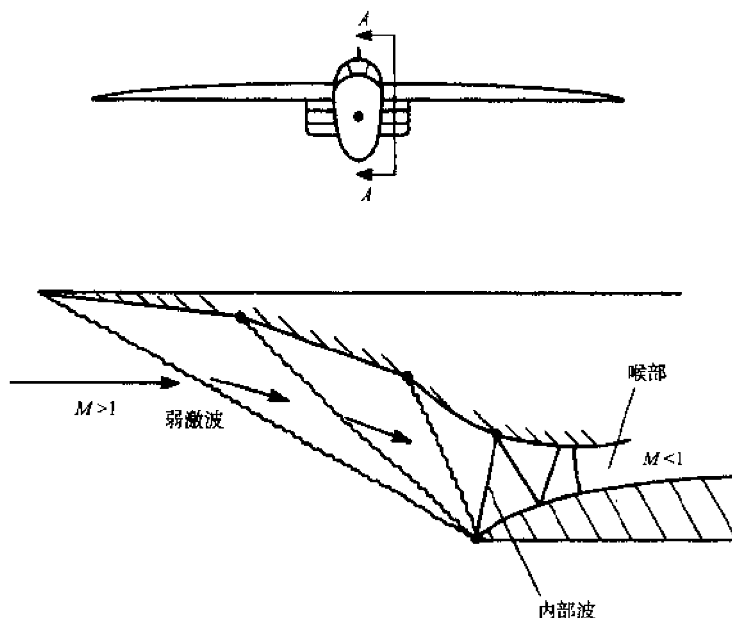


图 8-16　现代喷气式飞机超声速可调斜面进气道．显示的是 A-A 剖面

8.3 小扰动理论和线化理论

扰动理论

若考虑均熵流动(处处都等熵),那么,流动是无旋的和无摩擦的,h_0 处处相等,这样,可以利用方程(8.6)作为基本的控制方程. 由于不允许有激波,因此,必须只限于弱激波,实质上是等熵激波和膨胀波. 在物理上,这意味着被绕流物体必须是二维薄翼型或细圆柱体,这种物体限制了激波强度. 在数学上,这种条件可以用速度为例表述为:任何地方的速度都接近于自由流速度 $\boldsymbol{V}_0$ 或 $\boldsymbol{V}_1$,正如上一节所要求的. 参看图 8-17,流动中任一点的速度表示为自由流速度 $\boldsymbol{V}_0$ 加小扰动速度 $\boldsymbol{V}'$,因此

$$
\begin{aligned}
u &= V_0 + u', \quad u'/V_0 \ll 1 \\
v &= v', \quad v'/V_0 \ll 1 \\
w &= w', \quad w'/V_0 \ll 1
\end{aligned}
\tag{8.22}
$$

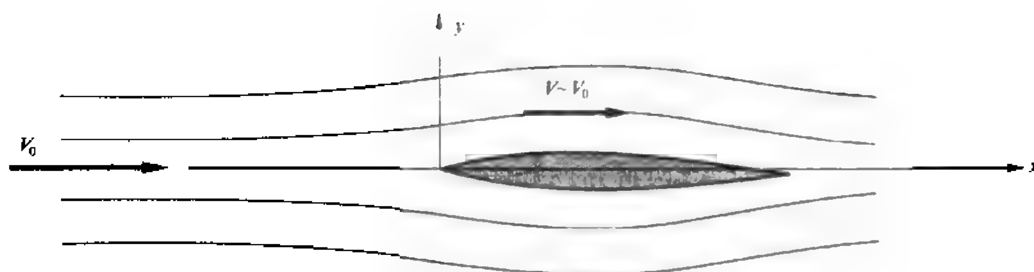


图 8-17　薄物体扰动均匀流,V_0

将其代入三维形式的方程(8.5),并利用如下形式的完全气体能量方程

$$
\frac{(V_0 + u')^2 + v'^2 + w'^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{V_0^2}{2} + \frac{a_0^2}{k-1} \tag{8.23}
$$

然后消去 a^2,可获得扰动速度方程,该方程为

$$
\begin{aligned}
(1 - M_0^2)\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= M_0^2\left[(k+1)\frac{u'}{V_0} + \frac{k+1}{2}\frac{u'^2}{V_0^2} + \frac{k-1}{2}\frac{v'^2 + w'^2}{V_0^2}\right]\frac{\partial u'}{\partial x} \\
&+ M_0^2\left[(k-1)\frac{u'}{V_0} + \frac{k+1}{2}\frac{v'^2}{V_0^2} + \frac{k-1}{2}\frac{w'^2 + u'^2}{V_0^2}\right]\frac{\partial v'}{\partial y} \\
&+ M_0^2\left[(k-1)\frac{u'}{V_0} + \frac{k+1}{2}\frac{w'^2}{V_0^2} + \frac{k-1}{2}\frac{u'^2 + v'^2}{V_0^2}\right]\frac{\partial w'}{\partial z} \\
&+ M_0^2\left[\frac{v'}{V_0}\left(1 + \frac{u'}{V_0}\right)\left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\right) + \frac{w'}{V_0}\left(1 + \frac{u'}{V_0}\right)\left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}\right)\right. \\
&\left. + \frac{v'w'}{V_0^2}\left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{8.24}
$$

这是精确方程. 如果假设 u',v'和 $w' \ll V_0$,那么,可得到简化的二阶方程

$$
\begin{aligned}
(1 - M_0^2)\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= M_0^2(k+1)\frac{u'}{V_0}\frac{\partial u'}{\partial x} + M_0^2(k-1)\frac{u'}{V_0}\left(\frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}\right) \\
&+ M_0^2\frac{v'}{V_0}\left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\right) + M_0^2\frac{w'}{V_0}\left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}\right)
\end{aligned}
\tag{8.25}
$$

该方程适用于从亚声速通过跨声速到超声速和高超声速流动的全部马赫数范围. 然而,如果仅保留一阶项可获得更简单的线化形式,即

$$(1-M_0^2)\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0 \tag{8.26}$$

该方程适用于亚声速和超声速流动,但是,不适用于 $M\approx1$ 的跨声速流动,也不适用于 $M>6$ 的高超声速流动. 对跨声速流动,方程(8.25)可以简化成

$$(1-M_0^2)\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=M_0^2(k+1)\frac{u'}{V_0}\frac{\partial u'}{\partial x} \tag{8.27}$$

实际上对亚声速和超声速流动而言,该方程也是适用的,而且比(8.26)更好,但该方程是非线性的. 常常用扰动速度势来表达这些扰动方程则更为方便,扰动速度势的定义是 $v'=-\nabla\phi$. 这样,方程(8.26)变成

$$(1-M_0^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \tag{8.28}$$

而方程(8.27)变成

$$(1-M_0^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\frac{M_0^2(k+1)}{V_0}\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \tag{8.29}$$

方程(8.28)是线性的,在亚声速和超声速范围内,该方程可以容易地对薄翼型求解. 对低马赫数,$(1-M_0^2)\approx1$,则有$\nabla^2\phi=0$,这正是第六章所使用的方程,在那里假设流动是不可压缩的(即 $M\ll1$). 现在可用方程(8.28)讨论可压缩亚声速流动. 方程(8.28)的型式从 $M<1$ 时的亚声速流动的椭圆型(在这场合整个流场都会感受到物体的影响)变成 $M>1$ 时的超声速流动的双曲型(在这场合物体不能影响上游,解是沿特征线传播的波状扰动).

线化理论中的压强系数

压强系数用方程(8.17)定义,再用速度 V 改写压强 p(同时利用能量方程),由此可得

$$C_p=\frac{2}{kM_1^2}\left\{\left[1+\frac{1}{2}(k-1)M_1^2(1-V^2/V_0^2)\right]^{k/(k-1)}-1\right\} \tag{8.30}$$

将扰动速度代入上式,进行展开并保留二阶项,可得

$$C_p=-\left[\frac{2u'}{V_0}+(1-M_0^2)\frac{u'^2}{V_0^2}+\frac{v'^2+w'^2}{V_0^2}\right] \tag{8.31}$$

对二维或平面流动,仅保留一阶项就能满足要求,由此可得

$$C_p=-\frac{2u'}{V_0} \tag{8.32}$$

对绕细长圆柱体的流动,必须保留二阶项,因此有

$$C_p=-\frac{2u'}{V_0}-\frac{v'^2+w'^2}{V_0^2} \tag{8.33}$$

边界条件

在物理上,边界条件就是在物面上的速度矢量必须与物体相切. 如果物面可用方程表示为

$$f(x,y,z)=0$$

那么,边界条件是

$$\mathbf{V} \cdot \nabla f = 0 \tag{8.34}$$

显然,对 xy 平面上的二维流动(其中 y 向为小量),用 u',v'和 w'写出方程(8.34),并精确到相同的量级,由此导出的条件是

$$v'(x, y = 0) = V_0(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)_{\text{物体}} \tag{8.35}$$

对“平面”流动(对薄的,基本上像机翼那样的平的三维物体),这种流动是准二维的,表面上的边界条件变成

$$v'(x, 0, z) = V_0(\partial y/\partial x)_{\text{物体}} \tag{8.36}$$

其中物体位于 xz 平面上,而在 xy 平面中物体几乎是二维的.

对于绕细圆柱体的流动,情况要稍复杂些. 这里将不作讨论. 读者可阅读参考文献.

值得注意的是,速度 $v'(x)$是在 $y=0$ 处计算的,而不是从实际物体表面上计算的. 这种近似与薄物体假设是一致的.

超声速薄翼型理论

刚刚讨论的扰动理论可以应用于二维薄翼型. 其结果与前面 8.2 节中讨论的弱激波解是相同的.

8.4　特征线方法

在复杂流动中,无论是简单的激波-膨胀波理论还是线化理论均不能适用,这时必须用数值技术求解原始的非线性方程. 在超声速范围特征线方法能够简化这些方程,从而提供了一种适合于数值分析的非常确定的数学技术.

椭圆型和双曲型方程

描述亚声速流动的方程是椭圆形的,描述超声速流动的方程是双曲型的,对这两种流动必须使用完全不同的数值分析方法. 在亚声速流动中,整个流场都能感受到任何扰动,因此求解椭圆型方程必须使用逐次近似法. 这里,必须对包围求解域的整个边界规定边界条件,而且必须同时考察全流场. 然而,在超声速流动中(用双曲型方程),扰动和信息只能向下游传播,因此只需要对位于上游的曲线规定边界条件. 然后,用这种方法向下游“推进”计算出数值,没有必要像亚声速流动那样,为了考虑下游条件需要在流场中进行反向迭代.

双曲型方程可导出特征线,这里并不给出严格的数学定义. 有关椭圆型和双曲型微分方程之间的某些区别列于下表,表中 ϕ 是因变量.

椭圆型方程	双曲型方程
(1)必须在封闭边界上规定 ϕ 或$\partial\phi/\partial n$,以避免奇异性.	(1)可在开口边界上规定 ϕ 或$\partial\phi/\partial n$. 如果在封闭边界上规定边界条件可能引起奇异性.
(2)边界条件改变会影响全部流动区域.	(2)边界条件改变仅影响有限的流动区域.
(3)解必定是解析的.	(3)解不需要是解析的(激波是奇异的).

特征线

这里不讨论特征线和双曲型微分方程的一般数学理论. 只是给出在二维气体动力学中有关特征线的简单的物理上的讨论,并简要地概述数值计算方法.

我们从研究定常二维均熵流动开始. 因为激波包含不可逆过程,所以不能用这种流动的

方程组描述激波结构．然而，由于在双曲型系统中激波与解的奇异性相对应，因此激波又是可以容许的解（如果边界条件具有某种类型）．那么，在无激波的区域中或者以激波为边界的区域中流动是均熵的．如果出现激波，其位置可能需要用试凑法计算．例如在临界状态下运行的收缩-扩张喷管，若入口压强和出口压强都是规定的，而且在喉部下游可能出现激波．从喉部至激波，这一段中的流动是超声速的，并且可以用特征线方法绘制该流动．然而，如果简单地用此方法向下游推进至出口处，由此得到的压强可能不是原先规定的压强．只有通过在喷管中允许有激波的方法，才能使得出口处的压强等于规定的值．因此，在双曲型系统中，无论什么时候只要边界条件有多余的规定，都可能引起奇异性（激波）．（当然，该多余的规定可能是物理上多余，而不仅仅是数学上多余．）通常，在不出现激波的地方特征线方法是最有用的，并且只要规定一条上游曲线上的边界条件，就可以简单地向下游"推进"，用该方法进行计算，不用任何迭代或试凑．

用 ϕ 表示的方程(8.28)，为

$$(1-M_0^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$$

如果 $M_0<1$，方程是椭圆型的；如果 $M_0>1$，方程是双曲型的．然而，对这种简单的线性方程应用特征线方法往往兴趣不大．关心的却是完整的非线性方程．考虑一般方程(8.5)，可写为

$$(u^2-a^2)\frac{\partial u}{\partial x}+(v^2-a^2)\frac{\partial v}{\partial y}+uv\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0 \tag{8.5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

现在的问题是：在什么条件下这些方程能够简化成为一维变量的形式（在空间任一点处）？也就是说，变化仅垂直于特征线，而沿特征线是不变化的．要寻找某个条件，以至于可以合并上述方程成如下形式：

$$A\frac{\partial u}{\partial \alpha}+B\frac{\partial v}{\partial \alpha}=0 \tag{8.37}$$

式中 $\frac{\partial}{\partial\alpha}=\cos\chi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\chi\frac{\partial}{\partial y}$．令 $\tan\chi=\zeta$．用 λ_1 乘以方程组(8.5)的第一个方程，用 λ_2 乘以第二个方程，再相加．如果 λ_1 和 λ_2 满足某些条件，就能够获得(8.37)的形式．这些条件是

$$\frac{\lambda_2-\lambda_1 uv}{\lambda_1(a^2-u^2)}=\zeta,\quad \frac{\lambda_1(v^2-a^2)}{(\lambda_2-\lambda_1 uv)}=\zeta$$

消去 λ_1 和 λ_2，可得

$$(a^2-u^2)\zeta^2-2uv\zeta+(a^2-v^2)=0 \tag{8.38}$$

用 ζ 来定义方向 α，ζ 只有当

$$(u^2+v^2)>a^2,\quad M>1$$

时才存在．也就是说，流动是超声速的，$M>1$．方向 α 由方程(8.38)的两个根来确定，这两个根是+和−特征线，这里分别用 ζ_+ 和 ζ_- 来表示．可以证明

$$\zeta_+\zeta_-=(a^2-v^2)/(a^2-u^2)$$

那么，通过求解 λ_1 和 λ_2，可清楚地表明：如果取 $dy=\zeta_+dx$，则有 $du=-\zeta_-dv$；如果取 $dy=-\zeta_-dx$，则有 $du=-\zeta_+dv$．因此，得到的这些关系将等效于原微分方程(8.5)，即

$$在\ dy=\zeta_+dx\ 上：du=-\zeta_-dv$$

$$在\ dy=-\zeta_-dx\ 上：du=-\zeta_+dv \tag{8.39}$$

然而，采用极坐标系运算起来更为方便．取 $u = V\cos\theta$ 和 $v = V\sin\theta$，见图 8-18，则有

$$du = \cos\theta dV - V\sin\theta d\theta \text{ 和 } dv = \sin\theta dV + V\cos\theta d\theta$$

将其代入式(8.39)可分别得到(+)和(−)特征线

$$\frac{\cot\mu}{V}dV = +d\theta,\quad \frac{\cot\mu}{V}dV = -d\theta \tag{8.40}$$

并且 $\zeta_+ = \tan(\theta+\mu)$，$\zeta_- = \tan(\theta-\mu)$．那么，利用 **V** 表达的能量方程，再用 M 表示 **V**，以及

$$\pm d\theta = \frac{\sqrt{M^2-1}dM}{M[1+\frac{1}{2}(k-1)M^2]} = d\nu(M)$$

积分上式可给出 $\nu(M)$．由于 $\pm d\theta - d\nu = 0$，因此，$(\nu-\theta)$在(+)特征线上是常数，$(\nu+\theta)$在(−)特征线上是常数．那么，如果在 $L-M$ 线上 ν 和 θ 都是确定的，则可以构筑出一个网格用以计算下游各交点上的 ν 和 θ 值．交点的 ν 和 θ 已知后，该点的马赫数、流动方向和速度都可求出．参看图 8-19(a)，令线段 $L-M$ 上的 ν 和 θ 是已知的．那么，$L-M$ 线段上一组任意点 $A_1,\cdots,A_n$ 上的特征线方向是确

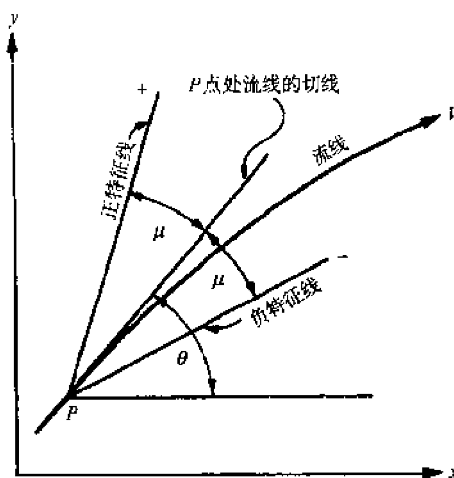
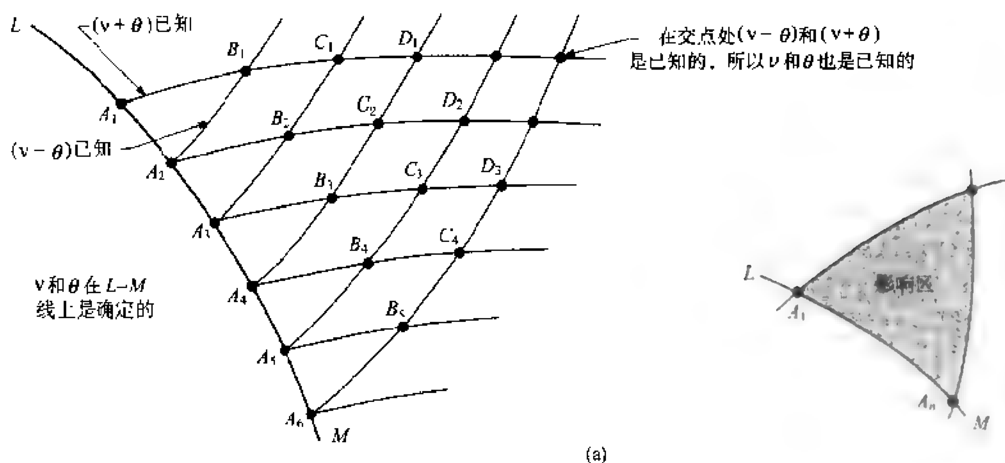
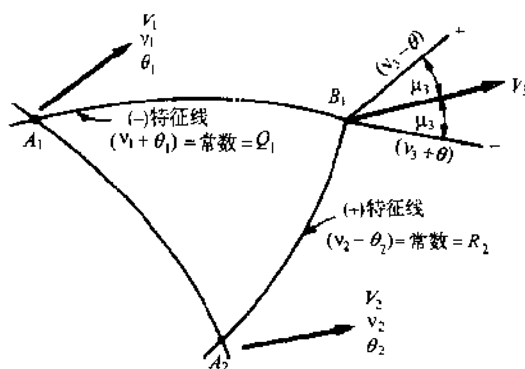


图 8-18　极坐标系和特征线



(a)



(b)

图 8-19　(a)极坐标系中的特征线结构；(b)计算方法的细节

定的. 从 A 点画出的(+)和(-)特征线的第一组交点是 $B_1,\cdots,B_{n-1}$,在每个交点上,$(\nu-\theta)$ 和 $(\nu+\theta)$ 是已知的,因此可以明确地求得 ν 和 θ 值,以及 μ、M 和 V 值,随之可以用新的方向画出±特征线. 这些新特征线的一组交点是 $C_1,\cdots,C_{n-2}$. 在整个影响区中继续此过程,该影响区指通过 A_1 和 A_n 的特征线所围成的区域. 一般而言,在非简单波流动区域中,特征线将是弯曲的,但是,交点之间的线段可画成直线. 网格越细,解越精确.

为了作出更详细的说明,考察一个放大图,参看图 8-19(b),该图是图 8-19(a)中的一部分. 在点 B_1 处,有

$$\nu_3=\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)+\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)$$

和

$$\theta_3=\frac{1}{2}(\nu_1-\nu_2)+\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$$

在网格点之间,假定特征线是直线.

对于可压缩流动更完整的特征线理论已超出了这里的讨论范围. 有兴趣的读者可参阅参考文献.

弱波法或分区法

在二维流动中,可以利用一个简单的计算方法来等效于特征线方法,从物理观点讲,这种简单的计算方法不仅是更简单,而且更易于理解. 在超声速流动中任一点处都可以画出特征线,而且流动中会存在连续的特征线. 另一方面,弱波方法的基础是实际的膨胀波或压缩波. 对于固壁或表面上的流动,可以从壁面任一点画出特征线. 然而,在由直线段形成的顶尖处,这种不连续点能产生有限波. 如果壁面是外凸的,并且可以用一系列的直线段来近似,在每一个顶尖处形成膨胀扇. 如果壁面是内凹的(角度很小),在每一个内拐角处形成弱激波(参看图 8-20).

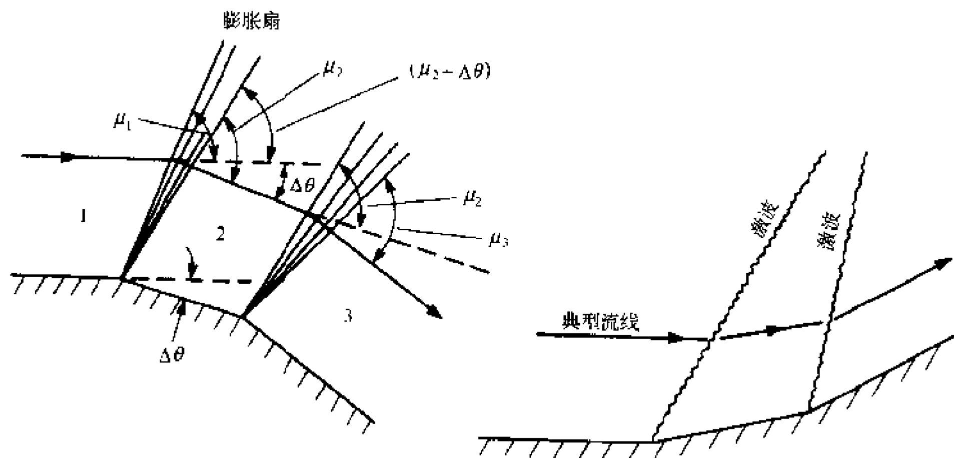


图 8-20　在折角处膨胀波和弱激波的形成

在弱波方法中,用一道等熵波代替膨胀扇或弱激波,该等熵波得到的速度矢变化和特性变化与使用膨胀扇或弱激波的结果相同.

对二维流动的计算方法如下. 参看图 8-21.

1. 弯曲表面(a)用许多直线段(b)代替.
2. (b)的实际膨胀扇或激波用一道单波(c)代替.
3. 单波"平分"膨胀扇,该膨胀扇用马赫线描绘,而马赫线与速度矢的夹角是 μ.

4. 越过波流动方向变化 $\Delta\theta$ 与越过该波的普朗特-迈耶函数的变化有关，即有

$$\Delta\nu = \pm|\Delta\theta|$$

对于膨胀使用正号，对于压缩使用负号. $\Delta\theta$ 定义为流动方向的变化，即

$$\Delta\nu = \nu(\text{下游}) - \nu(\text{上游})$$

从凸拐角发出的波总是膨胀波，从凹拐角发出的波总是压缩波.

5. 沿着一道已知的波，其强度 $\Delta\theta$ 是不变的，甚至当它与另一道波相交或跨越另一道波的时候. 然而波可能改变方向(它的方位)，但沿着波 $\Delta\theta$ 或 $\Delta\nu$ 却保持不变. 当然，跨越交点后波两侧实际的 ν 值可能改变，不过沿着波 $\Delta\nu$ 或 $\Delta\theta$ 是定值.

6. 一道波从壁面反射仍保持为膨胀波或压缩波(并且具有相同的强度). 所以，入射角 α_i 必定等于反射角 α_r，参看图 8-21(d). 类似有 $\beta_i = \beta_r$.

7. 一道波从接触面或滑流面反射，膨胀波变成压缩波，反之亦然. 然而，强度仍然保持不变，并且入射角必定等于反射角.

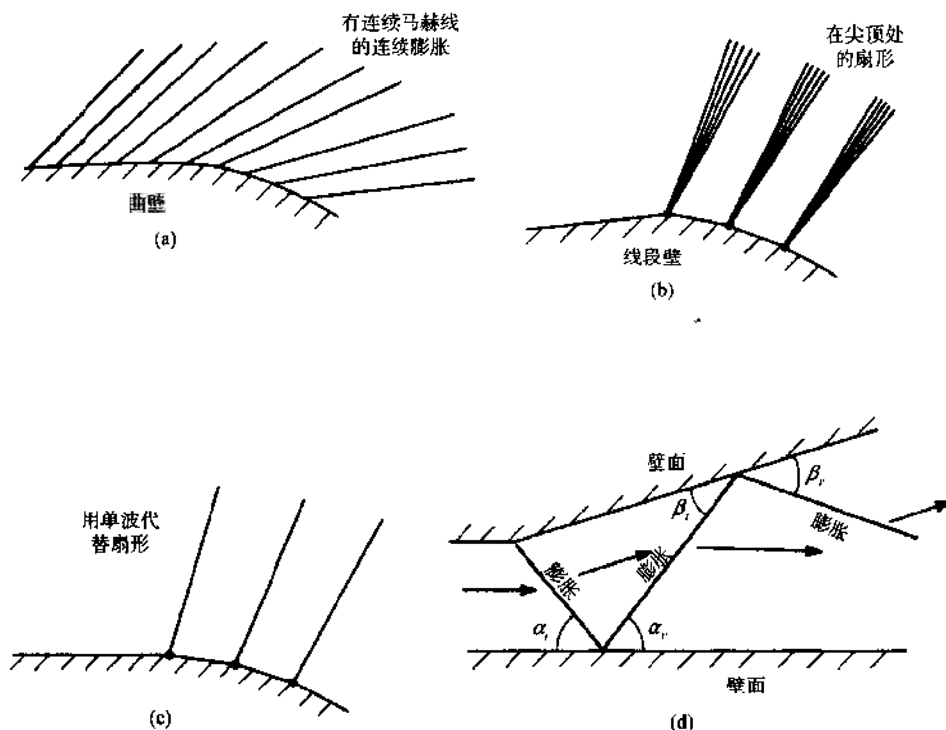


图 8-21　对弯曲表面的弱波近似

如果壁面上波的入射点是顶尖，该顶尖调节流动偏转 $\Delta\theta$，在这种情况下，若调节后的流动已经与壁面相平行，那么反射波将消失，或为无反射(参看图 8-8(d)).

为了阐明这种方法，下面将设计一个简单的二维超声速喷管. 在第七章已讨论过喷管流动，但是涉及的重要物理参数仅是面积比，没有考虑长度. 现在将看出为了在喷管出口提供平滑均匀流动，喷管的实际形状是决定性的，事实上，这样的喷管必须在二维情况下进行设计. 这里仅限于讨论两个平行曲面之间的二维流动，而不是轴对称的二维流动. 在圆形喷管中的流动可以用相似的方法处理，但是这些已超出了本书的范围. 二维形状的喷管设计是重要的，如为了最大推力的火箭喷管设计和为了平滑流动的风洞设计等.

一般而言，设计的喷管应该有光滑的弯曲壁面，也可用许多短直线段来近似这种曲壁. 另外，喷管既不能太长，以避免边界层增长得太厚；壁面又不能扩散得太快，以避免引起边界层分离. 因此，对于给定的出口马赫数 M_e 和相应的出口面积与喉部面积之比(A_e/A^*)，就各种喷

管长度而言存在一个可以接受的设计范围. 使用的直线段愈多(每一步的 $\Delta\theta$ 愈小),其方法就愈精确.

最简单的喷管是一道直线扩张壁,见图 8-22. 这种情况只需要一组相交的(膨胀)波. 例如,当 $M_e=1.435$ 时,可知 $\nu_e=10°$,在入口处 $\nu_1=0°$. 由于越过每一道波的 $\Delta\theta$ 是相同的,而流体一共越过两道波. 所以越过每一道波的 $|\Delta\theta|$ 是 $5°$, $\mu_1=90°$, $\nu_2=5°$, $M_2=1.256$, $\mu_2=52.738°$, $\nu_3=10°$, $M_3=1.435$, $\mu_3=51.642°$. 观察图 8-22,利用图解法或者简单的分析计算,用一个小的几何结构就提供了完全确定的喷管. 用这种方法可以求得 A_e/A^* 的比值,并可以将其与根据超声速数表查得的 0.881 作比较. $\Delta\theta$ 角愈小,结果愈准确.

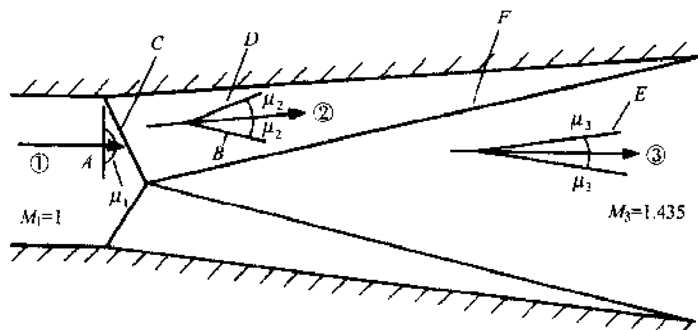


图 8-22　说明弱波方法的简单二维喷管. C 的方向位于 A 和 B 的中间. F 的方向位于 D 和 E 的中间

当马赫数较大时,更好的设计必须使用任意数目的直线段,如图 8-23 所示. 设计一个出口马赫数为 M_e 的喷管,与 M_e 相对应的是总 $\Delta\theta$. 而 $\Delta\theta=\nu_e-\nu_1$(因为 $M_1=1$, 所以 $\nu_1=0$). 图示的例子表明有一个初始膨胀区,该区由长度是任意选择的两条短线段 A 和 B 构成,然后越过相反的波族继续膨胀. 注意,在此例中选择了两条线段 A 和 B,这样有 6 条膨胀波,每条波的强度是 $\Delta\theta/6$,并且最终的流动应该与来流相平行. 值得注意的是一旦 A, B 和 $\Delta\theta$ 选定之后,线段 C, D 和 E 的长度和它们的位置就不是任意的,而是确定的. 通过线段 C, D 和 E 的合适位置,使每一线段相对于前一线段转动 $\Delta\theta/6$ 以消除反射波.

一般而言,对于一个给定的出口马赫数 M_e 对应有一个总 $\Delta\theta$ 角, $\Delta\theta$ 可以通过 n 道膨胀波来实现,如果所有的波都要通过壁而消除掉,则还必须有对等数量的波. 因此,选择的初始壁面线段数是 $(n/2-1)$,而每一线段的有效偏转角为 $\Delta\theta/n$. 它们的长度是任意的,但是必须足

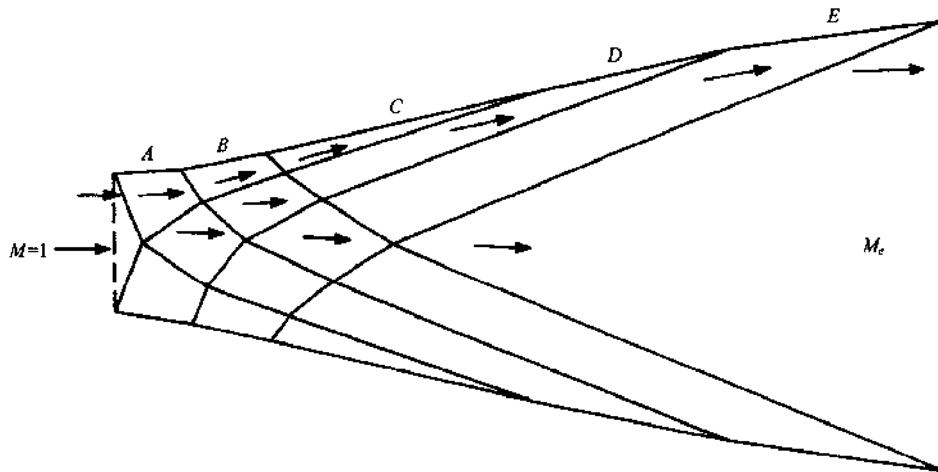
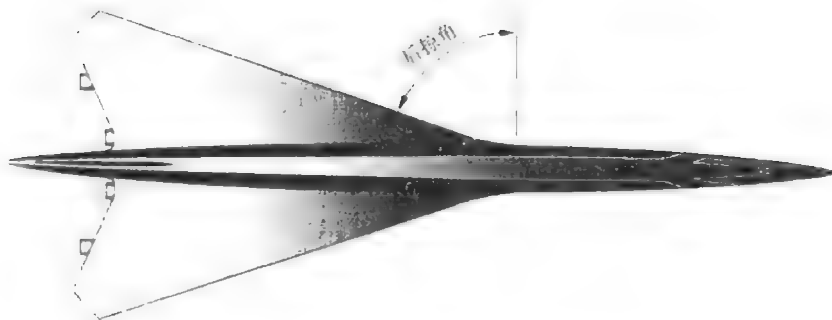


图 8-23　利用弱波方法作喷管设计


后掠角

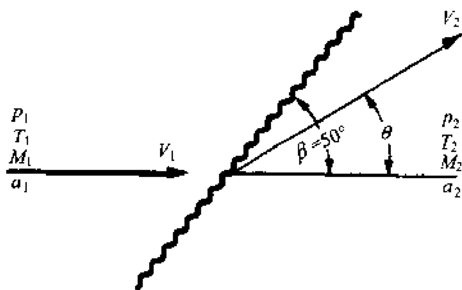


图 8-25

求下游状态和流动的转角.

解 ☞　根据图 8-3 查得 θ 近似是 18°. 由方程(8.7),可以用(在 1 点处的)上游状态求得(在 2 点处的)下游状态. 另一方面,也可以利用正激波数表,查表时用 $M_1\sin\beta$ 值代替表中的 M_1 值,而查得的 M_2 实际上应是 $M_2\sin(\beta-\theta)$. 这样,最后求得

$$p_2/p_1 = 2.57, \quad p_2 = 37.8\text{psi}$$

$$T_2/T_1 = 1.34, \quad T_2 = 697°\text{R}$$

$$M_2\sin(\beta-\theta) = 0.69, \quad M_2 = 1.3$$

8.2　一薄平板翼型,如图 8-26 所示,攻角为 10°. 已知 $M_1=3$,自由流空气的 $T_1=500°\text{R}$,和 $p_1=15\text{psi}$. 求流动中各区的流体特性.

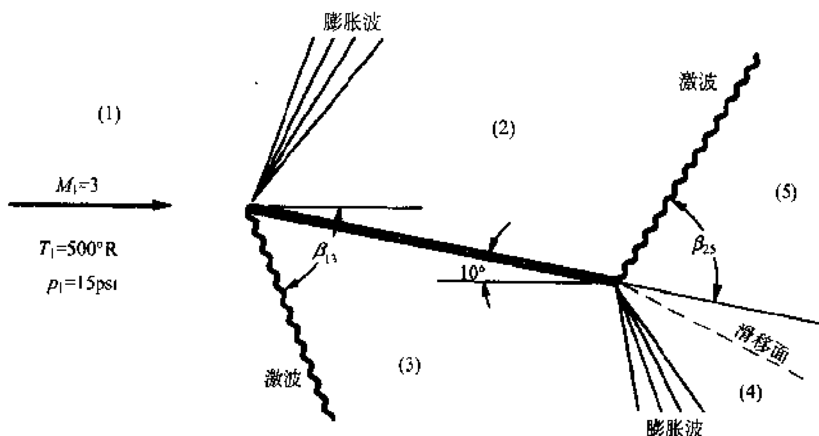


图 8-26

解 ☞　利用方程(8.7)和图 8-3,可以获得 3 区的特性. 查得 $\beta_{13}=27.5°$. 对于空气有 $k=c_p/c_v=1.4$,可得

$$p_3/p_1 = 2.07, \quad p_3 = 31.0\text{psi}; \quad M_3 = 2.49, \quad T_3 = 1.25T_1 = 625°\text{R}$$

下面计算 4 区的特性,利用

$$\nu_4 = \nu_3 + |\theta_4 - \theta_3| = \nu_3 + 10° = 39.1° + 10° = 49.1°$$

由表 8.1 查得 $M_4=2.97$. 因为膨胀是等熵的,则有

$$p_4/p_3 = \left[\frac{2+(k-1)M_3^2}{2+(k-1)M_4^2}\right]^{k/(k-1)}$$

由该式求得 $p_4/p_3=0.48$ 和 $p_4=14.9\text{psi}$. T_4 可用下式求得:

$$T_4/T_3 = (p_4/p_3)^{(k-1)/k}$$

因此

$$T_4 = 0.81(T_3) = 0.81(1.25T_1) = 1.01T_1$$

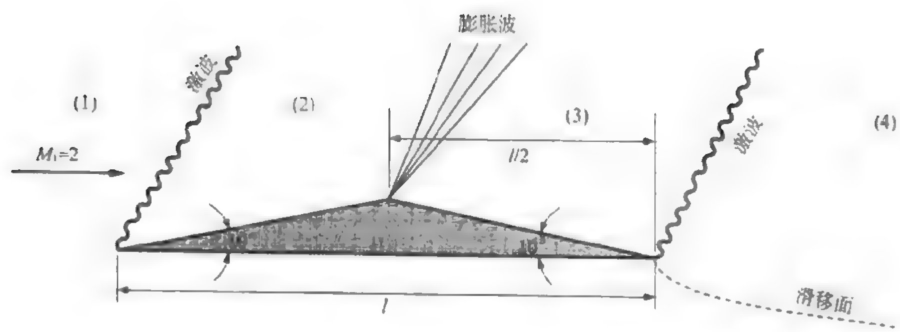
现在沿平板上表面进行计算. 2 区状态为

$$\nu = \nu_1 + 10° = 49.8° + 10° = 59.8°$$

因此 $M_2=3.57$. 利用等熵关系可得

$$p_2 = 0.44p_1 = 6.60\text{psi}, \quad T_2 = 0.79T_1$$

然后通过激波到 5 区,得到


膨胀波
激波
激波
(1)
(2)
(3)
(4)
$M_1=2$
$l/2$
l
10°
滑移面

$$p_4/p_3 = 1.88,\ T_4/T_3 = 1.21,\ M_4 = 1.90$$

显然，$p_4 = 1.03p_1$，因为 p_4 与 p_1 并不相同，所以流动在离开翼型时不能平行于自由流. 因此，从3区到4区的激波必须产生稍小于10°的偏转角，而下表面的流动应通过激波稍稍压缩. 确定接触面确切的角度要用迭代法计算，直到 $p_4 = p_1$ 为止. 其细节留给读者作为练习.

8.5 激波撞在壁面上将发生反射，如图8-28所示，流动最终应与壁面平行. 计算如图所示的反射激波.

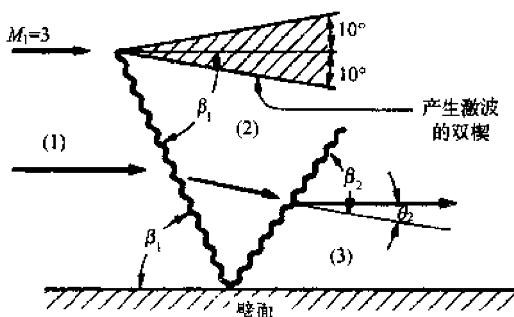


图 8-28

解 ☞ 由 $\theta = 10°$ 和 $M_1 = 3$，根据式(8.7)或合适的数表可得 $\beta_1 = 28°$ 和 $M_2 = 2.5$. 随后，由 $\theta_2 = 10°$ 和 $M_2 = 2.5$，求得 $\beta_2 = 32°$. 要记住，如果使用正激波数表，在表中要用 $M_1\sin\beta_1$ 和 $M_2\sin(\beta_1 - \theta)$ 分别代替 M_1 和 M_2.

8.6 一个精心设计的二维喷管，出口马赫数 $M_e = 2$，出口背压强 $p_b = p_e = 0.1278p_0$（由超声速数表查得），喷管达到平滑无激波流动. p_0 为驻点压强，是喷管前容器中的压强，出口压强 p_e 等于背压强 p_b. 但是，如果背压强低于 p_e，则喷管出口之外会出现膨胀波. 当背压强为 $0.0550p_0$ 时，请画出这些膨胀波的图形，并说明其转折角.

解 ☞ 参看图8-29，流动离开喷管时，通过膨胀扇折转以适应背压强 p_b. 把膨胀扇表示成一道单波，并利用弱波法. 膨胀波从滑流面（或接触面）反射变为压缩波，反之亦然. 流动通过膨胀波压强降为 p_b（1区），通过另一道膨胀波调整流动，膨胀后压强小于 p_b（2区），再通过压缩波使压强回升到 p_b（3区），然后，通过另一道压缩波调整流动，再次压缩后的压强为 p_e（4区）. 这种完整的图像被重复，以至于喷管下游建立了一个像钻石一样的图像. 这种连续的重复图像一直到由于摩擦造成的波扩散并最终耗散为止，不过，这种耗散只有经过许多次重复以后才会出现.

用弱波法得到的转折角示于图上. 在出口处 ν_e 值是26.5°. 当膨胀至 $0.0550p_0$ 时，1区的马赫数是2.54. 对于 $M_1 = 2.54$，相应的 $\nu_1 = 40°$. 因此，流动在出口拐角处的转角是(40° − 26.5°) = 13.5°. 在2区，需要另一个13.5°的膨胀转角，由此给出 $\nu_2 = 53.5°$ 和 $M_2 = 3.202$，由等熵数表得 $p_2/p_0 = 0.02$.

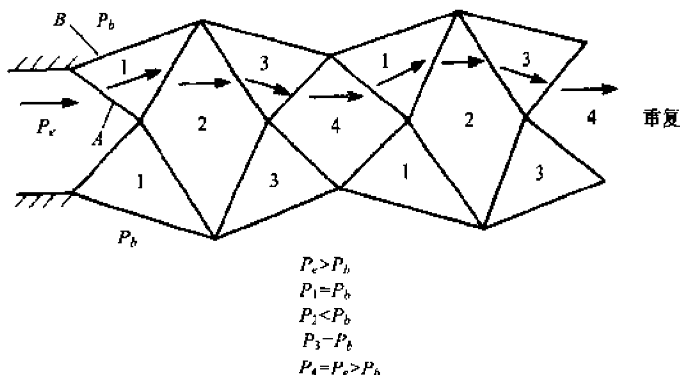


图 8-29

随后,从2区到3区出现13.5°的压缩,由此可得 $\nu_3=40°$ 和 $M_3=M_1=2.54$. 另一道压缩波完成到4区的转动,并有 $\nu_4=26.5°$ 和 $M_4=M_e=2$,以及 $p_4=p_e=0.1278p_0$.

这种完整的循环不断重复,直到波被扩大、变弱、扩散和耗散. 根据马赫角普朗特-迈耶数表可以容易地查得所有的马赫角,并利用均分规则,就能求得每一道波的实际方向,由此获得完整的结构图像. 例如,在出口区 $M_e=2$ 和 $\mu=29.9°$. 在1区,$M_1=2.54$ 和 $\mu_1=23.2°$. 在 e 区和1区之间的波(线条 A)利用均分膨胀扇角的方法其方位如图8-29所示.(注意,马赫角是马赫线与速度矢量之间的夹角.)1区的外边界(线条 B,是滑流接触面)简单地与1区的速度相平行.

8.7 考虑8.6题的二维喷管. 设计马赫数是2,设计背压强是 $p_e=0.1278p_0$. 现在,令实际背压强稍高于设计值(但是不能太高,以至于引起激波进入喷管). 这种情况的图像类似于8.6题的图像,除了从出口拐角处发出的第一道波是压缩波之外. 如果将背压强设定为 $0.20p_0$,利用弱波理论,试求喷管之外的波图和转折角,以及流动特性?

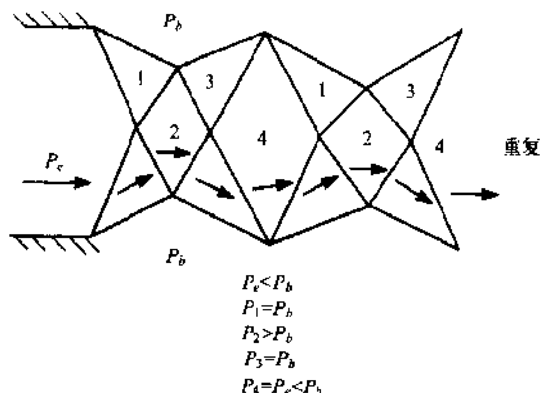


图 8-30

解 参看图8-30,初始波将出口状态($p_e=0.1278p_0$ 和 $\nu_e=26.5°$)压缩成1区状态,$p_1=p_B=0.20p_0$,$M_1=1.74$,和 $\nu_1=19°$. 流动的转角是$(26.5°-19°)=7.5°$. 在2区,发生另一次转角为7.5°的压缩,给出 $M_2=1.49$,$\nu_2=11.5°$,$p_2=0.276p_0$. 随后发生转角为7.5°到3区的膨胀,给出 $\nu_3=19°$,$M_3=1.74$ 和 $p_3=0.20p_0$. 最后,再一次发生7.5°的膨胀到4区,该区又与出口状态相同,$M_4=M_e=2.0$,$\nu_4=\nu_e=26.5°$ 和 $p_4=p_e=0.1278p_0$. 类似于8.6题,这样的图像将一再地重复.

补 充 习 题

8.8 空气流经一折角,如图8-31所示. 求下游空气的特性和马赫数. 画出膨胀扇. 当 θ 角变得越来越大时会发生什么?

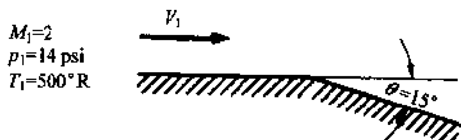


图 8-31

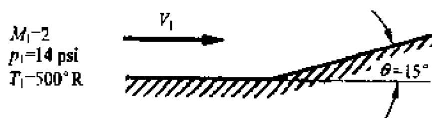


图 8-32

8.9 空气流经如图8-32所示的拐角. 求下游空气的特性和马赫数. 当 θ 角变得越来越大时会发生什么?

8.10 求标准空气以马赫数5流经图8-33所示楔的激波图像?

8.11 对于如图8-34所示的流动,求下游特性. 绘出马赫角 μ 随 θ 变化的图像.

8.12 图8-35显示的是通过弯道的二维流动. 要求下游弯道不出现激被反射,宽度 D_2 应为多少?

8.13 与8-12题类似,但发生的却是如图8-36所示的膨胀折转. 特殊的上壁形状使膨胀波不发生反射.(提

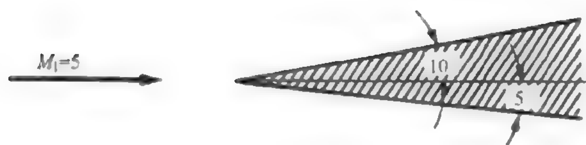


图 8-33

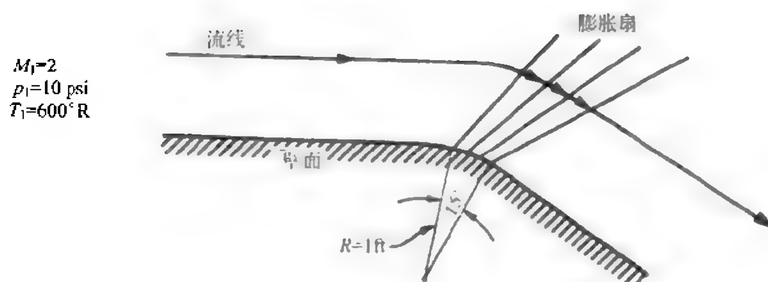


图 8-34

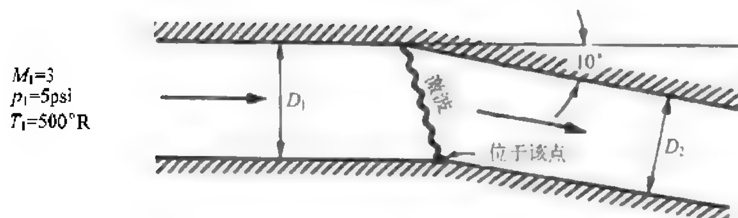


图 8-35

示:上壁形状是一条转弯的流线．)用相关参数表示的 D_2 为多少?

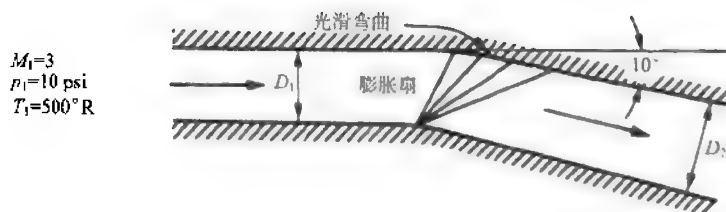


图 8-36

8.14 在 8.5 题中,当第一道激波角 β_1 变得越来越大时,反射激波会发生什么变化?能否通过一次简单反射使流动与壁面相平行,或者会发生某些奇特的现象?

8.15 图 8-37 所示的是发生于三角形表面上的流动．若 $M_1>1$(并假设 $\varepsilon \ll \lambda$),试用小扰动线化理论求壁面上的流动图像．

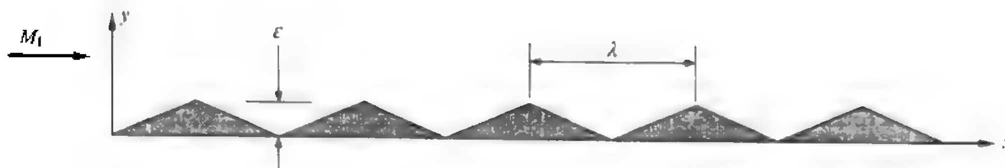


图 8-37

8.16 一规则的菱形翼型(见图 8-38)以 10°攻角置于马赫数为 2 的超声速流动中，翼型楔角是 20°，所以翼型的上、下表面是水平的.

试用激波-膨胀波理论计算翼型的升力，并作出激波与膨胀波的简图. 波阻为多少?

试用薄翼型线化理论计算升力，并与用较精确的理论获得的结果进行比较.

用线化理论作出的流动图像是怎样的?

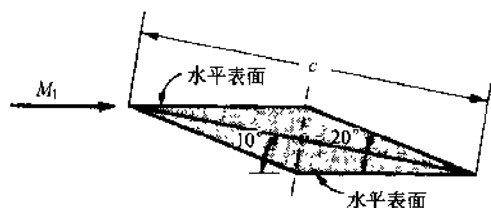


图 8-38

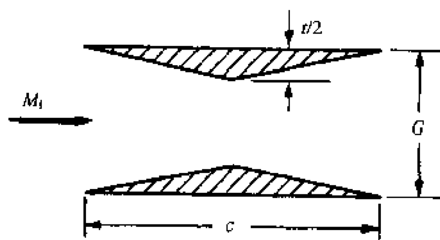


图 8-39

8.17 图 8-39 所示的布塞曼双翼机是由两个平行翼型组成的，如图所示其中每一个翼型是半菱形. 在零攻角下，对给定的马赫数 M_1 可以通过恰当的翼型间距使波阻有效地减小为零. 采用二维线化理论($t \ll c$)，求零攻角下阻力消失时的最大间距 G(作为 M_1 的函数). (在最大临界间距 G 的某种约数下，也可以实现阻力消失.)

在零攻角下有升力吗?

如果 M_1 和 G 保持为常数而改变攻角，波阻会消失吗?

8.18 对 8.4 题的半菱形翼型，求升力和阻力系数. 讨论在薄翼型理论中接触面的特征.

8.19 利用薄翼型理论，求横截面如图 8-40 所示的二维翼型的流动图像和升力与阻力系数.

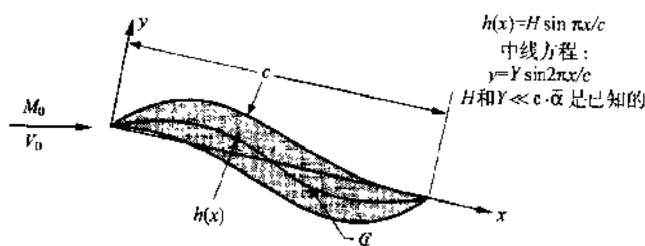


图 8-40

8.20 对攻角为 5°的二维薄平板翼型，利用薄翼型理论作 C_L 和 C_D 随 M 的变化曲线.

8.21 与 8.20 题类似，假定 $M=2$，作 C_L 和 C_D 随攻角 α 的变化曲线.

8.22 如图 8-41 所示的绕尖拐角的膨胀流动，求滑流面的位置.

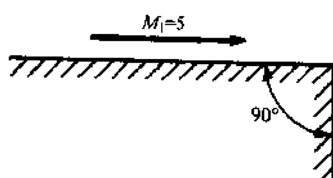


图 8-41

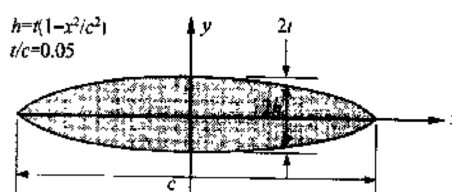


图 8-42

8.23 对形状如图 8-42 所示的薄翼型，作 C_L 随 C_D 变化的曲线图. (取 $\bar{\alpha}$ 作为独立变量，M 为定值.) t 是最大半厚度，而翼型上下表面是对称的.

8.24 如图 8-43 所示，在一端封闭的圆柱管中有一活塞. 该活塞突然以某一不变的速度向管的封闭端运动.

然后将形成一道激波向管端运动，随后在端面反射回头向活塞运动.

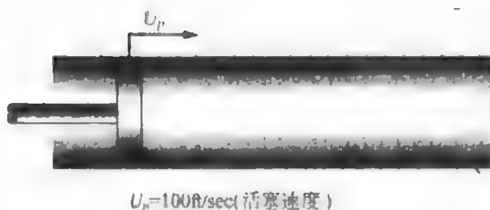


图 8-43

计算激波反射前和反射后的激波速度. 在所有时刻各流动区域中的压强. 定性地简述，激波从活塞表面反射后会发生什么？

圆管中的空气起初是大气压强，温度为 520°R. 活塞以常速度 100ft/sec 运动. 提示：参看第七章.

8.25 在 8.1 题和 8.2 题中，计算各流动区域中空气的速度.

8.26 一精心设计的二维喷管，出口马赫数为 3. 必须的背压强为多少(用驻点压强表示)？如果背压强减小 10%，会发生什么？画出完整的波的图像，并说明每一个流动区域中各有关的特性.

8.27 图 8-44 所示为一出口马赫数为 2.5 的直壁二维喷管. 利用弱波理论，假设如图所示只有一道壁面反射，试求喷管的扩散角和喷管的长度. 将求得的 A^*/A_e 值与数表查得的值进行比较.

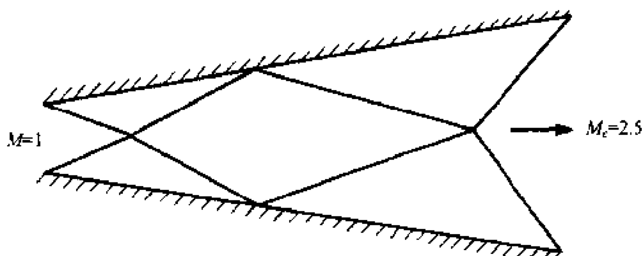


图 8-44

8.28 当出口马赫数 $M_e=1.5$ 时，试完成如图 8-23 所示喷管的详细设计. 利用图示的两根直的初始膨胀壁面线段 A 和 B，给出了三条初始膨胀波(和另外一族的三条波作三次进一步的膨胀). A 和 B 的长度可以相同，也可以任意选取. 试分析 A 和 B 长度不同时对喷管总长度的影响. 对 A^*/A_e 的设计值与 $M_e=1.5$ 的数表值进行比较.

8.29 图 8-45 显示的是超声速喷气发动机的二维塞喷管进气道. 飞行马赫数是 1.5. 求两道斜激波后的压强恢复(即驻点压强). 另外，假设在两道斜激波之后的喷管中有一道正激波. 求空气进入压气机时的驻点压强. 假设正激波的上游马赫数等于第二道斜激波后的流动马赫数，将所得结果与飞行马赫数下一道正激波后的驻点压强比较.

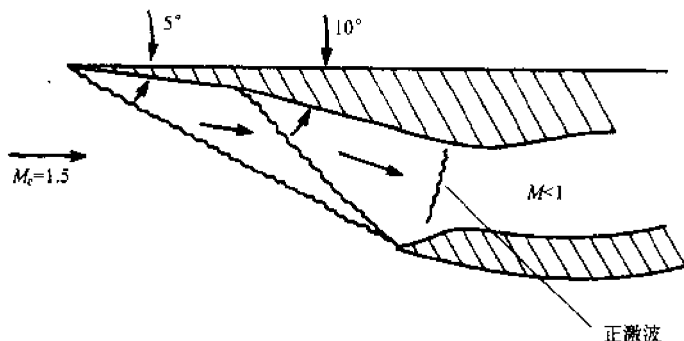


图 8-45

第八章符号表

a＝声速
c＝弦长（翼型宽度）
c_p＝定压比热
c_v＝定容比热
C_D＝阻力系数
C_L＝升力系数
C_p＝压强系数
D＝阻力
h＝比焓
h_0＝总（或驻点）比焓
k＝比热比，c_p/c_v
L＝升力
M＝马赫数
M_0＝自由流马赫数
p＝压强
s＝比熵
u＝x 的速度分量
u'＝x 的扰动速度分量
v＝y 的速度分量
v'＝y 的扰动速度分量
$\mathbf{V}$＝速度矢量
V_0＝自由流速度
w＝z 的速度分量
w'＝z 的扰动速度分量
α＝攻角
β＝激波角
θ＝偏转角
μ＝马赫角
ν＝普朗特-迈耶函数
ρ＝密度
ϕ＝速度势

第九章 不可压缩湍流流动

9.1 引言

在前面的章节中，我们已经讨论过湍流(第五章主要是讨论湍流流动，在第七和第八章中给出的很多结果对湍流流动也同样适用)，在本章中，我们将对湍流流动中的一些重要问题作更深入地讨论。

根据难易程度的不同，流体运动从易到难可以这样排列：位势流动→有黏性的层流流动→湍流流动．从流体力学发展的历史上看，早期的研究主要限于势流和层流流动，对复杂的湍流流动则研究得很少．这是很遗憾的，因为工程中的流动绝大多数都是湍流．近年来，对湍流的研究大大增加了，但问题远未解决，尚需我们作长期的努力．

在展开讨论以前，我们首先要回答两个问题：什么是湍流？在哪儿发生？欣兹[8]将湍流定义为“流动状态的不规则性，流动的各种参数(如速度和压强)随时间和空间作随机的变化，但有明确的统计平均值”．在自然界中的流动绝大多数都属于这类运动，当船舶、汽车、飞机和返回大气层的飞行器通过介质运动时，流动几乎都是湍流．在这类流动中，我们可以把运动分成平均运动和脉动两部分．

当流体通过像风扇，水泵，渠道和管道这类装置运动时，也会产生湍流．正如第五章已经指出的那样，雷诺数的数值是判断流动是否是湍流的一个重要参数．

怎么会产生湍流？是什么原因造成层流向湍流转变？要完整地回答这个问题不是很容易，但从物理上作一些解释也不是很困难．实际上，流场中总会存在一些小的，或无限小的扰动，如由于流体物性微小变化，壁面粗糙度，自由表面影响的变化，以及其他原因引起的微小扰动．在一定的条件下(通常是低雷诺数)，这类扰动逐渐衰减，流动保持为层流状态．当雷诺数增大时，小扰动会趋于增长，我们就说流动是不稳定的．由于方程的非线性，要确定扰动增大以后所导致的最终流动状态，通常是很困难的，最终流动状态与流场结构有很大的关系．对某些流场结构，扰动增大以后仍保持为层流，但稳定在更复杂的流动状态，如产生二次流，或有回流的流动．但对有些流场结构，流动将变成湍流(如雷诺数继续增大时，所有的流场结构最终都变成湍流)，湍流的详细结构与几何结构和雷诺数有关．

流场对扰动响应问题的研究属于稳定性理论，它是流体力学中很重要的一部分内容，我们将在第十三章中进行讨论．

本章我们将讨论(1)湍流的物理特征，和(2)湍流运动的定量描述．前一个问题主要讨论(但不是全部)实验现象，后一个问题主要讨论数学模型．对工程人员来说，两者都很重要．

描述和认识湍流主要有唯象和统计两种不同的方法．在唯象方法中，通过引进经验的交换系数，给出剪应力的计算公式，在统计方法中，我们主要研究时间平均量的方程．

9.2 平均速度的方程

在 5.2 节中，已经给出了湍流流动中平均速度分布的方程．为了讨论方便，我们把它归纳如下，方程中各个符号的意义，读者可以查阅第五章中的定义．

乘方定律

$$u/U=(y/\delta)^{m/(2-m)}=(y/\delta)^{1/n} \tag{5.25}$$

其中 y 是离壁面的距离，δ 是边界层的厚度，U 是自由流的速度，u 是边界层内的速度．乘方定律应用于压力梯度等于零时沿平板的流动，也可用于完全发展的管流．乘方指数随雷诺数稍

有变化.

对数形式的壁面定律

$$u/u_\tau = 2.44\ln(yu_\tau/\nu) + 4.9 \tag{5.28}$$

其中 u_τ 是摩擦速度$\sqrt{\tau_0/\rho}$，τ_0 是壁面上的剪应力. 这个方程对边界层内的大部分地区都有效. 但在离壁面很近的一个很小区域($0 < yu_\tau/\nu < 50$)内和外边界层部分不适用. 压力梯度等于零时这个方程适用，当压力梯度增加时，可应用的区域逐渐减小.

对数形式的速度欠缺定律

$$(U - u)/u_\tau = -2.44\ln(y/\delta) + 2.5 \tag{5.29}$$

当压力梯度等于零到中等大小时，这个方程描述了边界层邻近自由流部分的速度分布. 与第五章相同，在方程(5.25)、(5.28)和(5.29)中，用 u 表示定常湍流中的时间平均速度. 在本章的其余地方，我们将用符号上面加横线表示参数的平均值(如 $\bar{u}$).

9.3 统计的描述方法

湍流速度和平均

讨论管内的湍流流动. 我们在流场中选定一点，并观察该点的速度随时间的变化，我们得到一条如图 9-1 所示的随机变化曲线. 时间平均的速度 $\bar{u}$ 定义为

$$\bar{u} \equiv \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} u\,\mathrm{d}t \tag{9.1}$$

其中的平均时间 T_1 应该足够长，当它继续增大时，定常流动中给出的平均速度 $\bar{u}$ 可以保持不变. 参数上面的横线表示用式(9.1)定义的时间平均值. 瞬时速度 u 可以用平均速度 u 和脉动速度 u' 之和表示($u = \bar{u} + u'$).

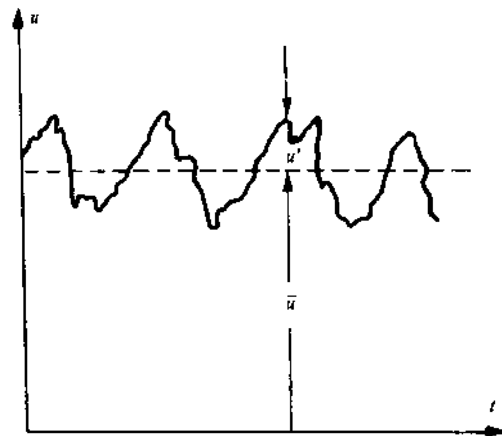


图 9-1 湍流流场中给定点上速度随时间的变化，u'是加到平均速度$\bar{u}$ 上的随机脉动量

下一节，我们需要对各种不同的脉动量进行联合运算，运算时需遵守如下的法则. 若 a 和 b 是脉动量，c 是常数，则我们有如下的雷诺平均规则：

$$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$$

$$\overline{ca} = c\bar{a}$$

$$\overline{ab} = \bar{a}\,\bar{b} + \overline{a'b'}$$

$$\overline{\frac{\partial a}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial x}$$

其中 $a = \bar{a} + a'$，$b = \bar{b} + b'$(脉动值的平均值为零，即$\overline{a'} = \overline{b'} = 0$).

湍流的运动方程

现在我们推导湍流流动的运动方程. 在推导各个方程时所用的方法基本是相同的. 即首先写出瞬时量的方程，然后对方程的两边求时间平均. 并且注意到，如果在某个瞬时等式是成立的，则在一定时间区间内求平均，等式也同样成立. 对方程进行简化，最后可得仅包含时间平均

量的方程.

湍流流动的连续方程

在第三章中,已经推导出微分形式的连续方程(用笛卡儿张量表示)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)=0 \tag{3.30}$$

其中 ρ 是密度,u_i 是第 i 方向的速度分量.这个方程在湍流中也是成立的,只是因变量(ρ 和 u_i)是有脉动的瞬时量.对这个方程求时间平均,我们得

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)}=0$$

瞬时量用平均值加脉动值代入,并根据上一节给出的雷诺平均规则,我们得

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}\bar{u}_i)+\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho' u'_i})=0 \tag{9.2}$$

对不可压流,方程(9.2)变成

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}=0 \tag{9.3}$$

湍流流动的动量方程

第三章已经给出了微分形式的动量方程[方程(3.54)].我们假定流体不可压,黏性系数是常数,用笛卡儿张量符号和取和约定方法表示,方程(3.54)变成

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}+B_i \tag{9.4}$$

其中 B_i 是体积力,μ 是黏性系数.我们假定这个方程在湍流和层流流动中都适用.但是在湍流中,所有因变量都随时间迅速变化,它们不是用皮托管测得的那种平均量.现在我们推导时间平均量的方程.

在方程(9.4)中,代入 $u_i=\bar{u}_i+u'_i$, $p=\bar{p}+p'$,则有

$$\rho\left[\frac{\partial(\bar{u}_i+u'_i)}{\partial t}+(\bar{u}_j+u'_j)\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i+u'_i)\right]=B_i-\frac{\partial(\bar{p}+p')}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2(\bar{u}_i+u'_i)}{\partial x_j \partial x_j}$$

对方程的两边求时间平均,并简化得

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\overline{u'_j\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}+\bar{B}_i \tag{9.5}$$

方程左端的第三项通常写成其他形式.根据不可压流的连续方程,我们有 $\partial u'_j/\partial x_j=0$,因此式

$$u'_i\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}=0 \quad 和 \quad \overline{u'_i\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}}=0$$

成立.方程(9.5)的两端同时加上 $\overline{u'_i\dfrac{\partial u'_j}{\partial x_j}}$(或零),并利用

$$\overline{u'_j\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}+u'_i\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}}=\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u'_i u'_j}$$

则方程(9.5)变成

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}-\rho\overline{u'_i u'_j}\right)+\bar{B}_i \tag{9.6}$$

方程(9.6)是用时间平均量表示的湍流流动的动量方程.和瞬时量的动量方程(9.4)相比,仅多了方程右端第三项的这一项.这一项通常称为雷诺应力或湍流应力.这种形式的湍流运动方

程，除了在层流黏性项上加了一项以外，其他都和层流运动方程相同．严格地说，这一项并不是应力，它是由惯性引起的动量交换项（回忆一下，它是由方程左端对流项产生的）．之所以称为应力，是因为和层流运动方程相比时，它仅引起应力项的修正．

湍流流动的能量方程

在黏性系数和密度均为常数时，动量方程(9.4)的两端同乘以速度 u_i，并经整理得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_iu_i}{2}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_i\left(\frac{p}{\rho}+\frac{u_ju_j}{2}\right)\right]+\nu\frac{\partial}{\partial x_j}\left[u_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]-\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\tag{9.7}$$

方程(9.7)的单位是能量，它是一个能量方程，但和热力学第一定律不同．热力学第一定律是说所有形式的能量之和守恒，但从动量守恒方程推出的湍流能量方程不包含任何形式的热能．

在方程(9.7)中，各瞬时参数都用平均值加脉动值代入，即

$$u_i=\bar{u}_i+u'_i$$

$$p=\bar{p}+p'$$

$$u_iu_i=\bar{u}_i\bar{u}_i+2\bar{u}_iu'_i+u'_iu'_i$$

并对两端求时间平均，然后减去由方程(9.6)乘以 $\bar{u}_i$ 所得的平均动能方程，最终得

$$\overbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{u'_iu'_i}}{2}\right)}^{1}+\overbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\bar{u}_i\frac{\overline{u'_ju'_j}}{2}\right)}^{2}=\overbrace{-\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u'_i\left(\frac{p'}{\rho}+\frac{u'_ju'_j}{2}\right)}}^{3}$$
$$\underbrace{-\overline{u'_iu'_j}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}}_{4}+\underbrace{\nu\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u'_j\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)}}_{5}-\underbrace{\nu\overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}}}_{6}\tag{9.8}$$

方程(9.8)称为湍流能量方程，每一项都表示了一定形式的能量：

1．湍流动能的时间增加速率
2．平均运动引起的湍流动能的对流扩散
3．湍流脉动引起的湍流动能的对流扩散
4．湍流动能的产生项（从平均运动吸收的能量）
5．湍流运动的黏性应力所做的功
6．黏性应力引起的湍流动能的耗散

在本章的稍后，我们还将回来继续讨论这个方程．尤其是为了对湍流机理有比较清晰的认识，我们将在简单的流动中对方程中的各个项进行分析．

9.4　湍流的唯象理论

在上一节中我们已经给出湍流流动的方程．但是从工程应用的观点来看，这些方程的价值是很有限的．因为即使在很简单的流动中，我们也无法求解这些方程．因此，我们必须采用包含模型的方程，这些模型在物理上可能不完全精确，但利用它可以给出工程上感兴趣流动的近似解．

剪应力张量 τ_{ij}（层流应力 τ_{ij_l}　加湍流应力 τ_{ij_T}）为

$$\tau_{ij}=\mu\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right)-\rho\overline{u'_iu'_j}=\tau_{ij_l}+\tau_{ij_T}\tag{9.9}$$

$$\tau_{ij_l}=\mu\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right),\quad \tau_{ij_T}=-\rho\overline{u'_iu'_j},\quad i\neq j$$

我们主要目的不是为了求出雷诺应力，而是希望把雷诺应力用某种方法和平均速度联系起来．这类方法在描述诸如射流和尾流等自由剪切流中是成功的，但模型仅适用于二维流动．

涡旋黏性或湍流黏性模型

如果剪应力用层流黏性系数加上表征湍流宏尺度运动影响的量表示出来，则对二维流动有

$$\tau_{ij} = (\mu + \rho\varepsilon)\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \tag{9.10}$$

其中 ε 是涡旋黏性系数，和雷诺应力的关系为

$$\varepsilon = \frac{-1}{\partial \bar{u}_i/\partial x_j}\overline{u'_i u'_j}$$

用方程(9.10)定义一个涡旋黏性系数的好处是，若能给出参数 ε 的数值(或用平均速度表示出来)，将这种形式的剪应力代入动量方程中，可以使方程中的因变量数目减小，因此问题得到很大的简化．但是困难在于，对不同的流场，ε 值是不同的，在同一个流场中，ε 值也随空间位置的变化而改变．在本章的稍后部分，我们将讨论实际流场中涡旋黏性系数的大小和变化情况．

普朗特动量混合长度模型

普朗特在讨论速度不同的两层流体之间的动量输运时，提出了一个长度的概念．假定图 9-2 所示的输运过程可以用方程(9.11)描述

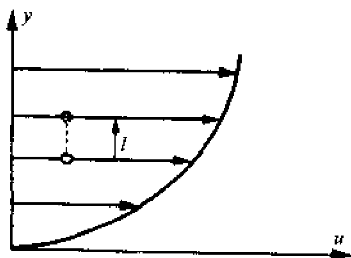


图 9-2　普朗特动量混合长度的示意图

$$\tau = \rho l^2\left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \tag{9.11}$$

其中的长度尺度 l 表征了在给定速度梯度的流场中，产生给定大小的湍流剪应力，流体颗粒必须走过的距离．湍流的动量混合长度模型和分子运动的动力学理论很相似．动力学理论指出，分子黏性系数等于分子运动的平均速度乘以长度(分子运动的平均自由程)．但将动力学理论与湍流的输运进行比较时，要注意两者是很不相同的．在湍流流动中，由于有耗散，每一个流体微团都是不断发生变化的．混合长度模型可以应用于如管流，沿平板流动，自由射流和尾流等二维流动．

和涡旋黏性系数模型一样，混合长度模型在很多流动中也遇到了困难(也就是流动条件变化时，混合长度要跟着变，同一个流场中，混合长度随空间位置变化而变化)．另外，在推导混合长度的方程时，我们假定了它很小，但测量表明，在许多流场中，混合长度都相当大．

其他的唯象理论

除前面所述的两个模型以外，湍流还有其他的模型．其中之一是泰勒的涡量输运理论，该理论假定流体颗粒在运动时其涡量保持不变，给出的涡量混合长度和普朗特模型中的动量混合长度类似．

9.5　湍流关联

这里我们暂且不去讨论动量方程的求解问题，先提出这么一个问题：为了完整地描述湍流流场，我们都需要一些什么信息？流场中任一点上的瞬时速度［如 $u_i(x, y, z, t)$］包含了很多信息，但正如前面已经指出的那样，u_i 是时间的随机函数，在实际中用途不大．除此之外

u_i　描述了平均速度场

$\overline{u'_i}$　因为等于零,对描述湍流没有帮助

$\overline{u'^2_i}$　给出了脉动强度的信息

$\overline{u'_i u'_j}$　给出了流场中任一点上的更多信息(它的9个分量中包含了$\overline{u'^2_i}$的三个分量).在运动方程中包含了这些量,称为两个速度分量的单点关联.

即使所有这些参数都知道,流场仍未能得到完整地描述.这也就是说,即使求解了动量方程,我们仍不能完整地给定流场.其原因是单点的速度关联不包含任何有关湍流涡旋大小的信息,因此也无法描述能量在不同大小涡旋之间的传递问题.

两点速度关联可以给出湍流涡旋大小的信息.这里我们想建立 A 点上速度$(u'_i)_A$ 和另一点上速度$(u'_j)_B$ 之间的依存关系,即

$$\overline{(u'_i)_A(u'_j)_B}$$

如果没有关联,即一点上的速度和另一点上的速度没有依存关系,这个量等于零.

9.6　各向同性湍流

各向同性湍流要求各种不同的湍流量不随坐标系旋转而变化(也就是说,在测量时无论方向如何选取,给定点上测出的值都不变).各向同性要求流场是均匀的(即任一点上的参数都相等).

各向同性湍流是一个理想化的流场,是对实际流场的一种近似.网格后平均速度均匀的流场是近似为各向同性湍流的一个例子.凡是平均速度变化的流场都不是各向同性湍流.绝大多数的实际流动都和各向同性湍流相差甚远,我们之所以要讨论各向同性湍流,是因为它数学上比较简单,对它进行研究有助于对复杂的非各向同性湍流加深理解.当前对各向同性湍流研究的很多,文献[3]和[8]对这个问题有深入的讨论.

9.7　壁面湍流

壁面湍流可以看作是受固体壁面影响的湍流流动.固体壁面使流动减速,因此在固体壁面和自由流之间,平均速度是变化的.平均速度的变化导致流场是各向异性的.

壁面湍流可以分成(1)外流(边界层)和(2)内流(管内和渠道内的流动)两类.在本章中,对每类流动我们都讨论一个简单的例子.我们首先讨论压力梯度等于零的沿平板的流动,然后再讨论完全发展的管流.虽然绝大多数流动都比这两个例子复杂得多,但它们有许多基本特性是相同的,简单例子的讨论有助于对复杂边界层和槽道内流动的物理过程加深理解.

沿平板的边界层流动

湍流边界层的分区　在第五章中,我们已经讨论了平均速度分布的描述方法,壁面定律特别适用于平板边界层问题.比如,图5-10给出的结果表明,边界层可以分成三个不同的区域,它们分别是

1. 邻近壁面的黏性次层

   这个区域很小($0<yu_\tau/\nu<5$),且邻近壁面,黏性应力比湍流应力大很多.该区域中的速度是离壁面距离的线性函数 $u/u_\tau=yu_\tau/\nu$.

2. 壁面湍流或过渡区

   该区域位于边界层的中间部分($5<yu_\tau/\nu<30$),其中黏性应力和湍流应力的数量级相同.

3. 自由湍流区

   三区中该区最大($yu_\tau/\nu>30$).湍流应力比黏性应力大很多,除边界层的最外一部

分之外，该区域的平均速度分布都可以用对数壁面定律描述.

边界层中湍流量的测量

用热线风速仪对湍流脉动速度进行了测量，其结果如图 9-3 所示. 脉动速度的数值从壁面上的零迅速增大到极大值，取极大值处离壁面仍相当近. 图 9-3 的结果还表明，从边界层的外边缘向壁面靠近时，各向异性的程度不断增加，与壁面垂直方向的湍流速度分量 v' 最小. 这是因为壁面对这个方向的运动制约较大造成的.

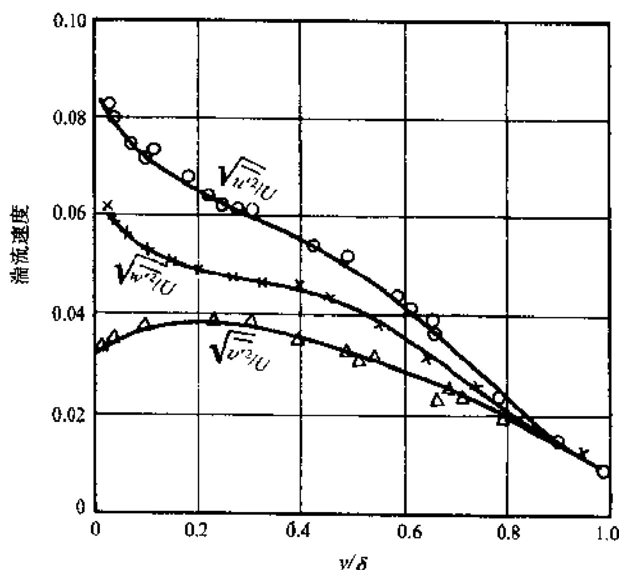


图 9-3　零压力梯度条件下沿壁面流动中湍流速度的分布
(取自参考文献 9)

图 9-4 示出雷诺应力在边界层中的分布. 我们注意到，在邻近壁面有一个区域雷诺应力基本上是常数. 在边界层中只有 2% 的区域，黏性应力是重要的.

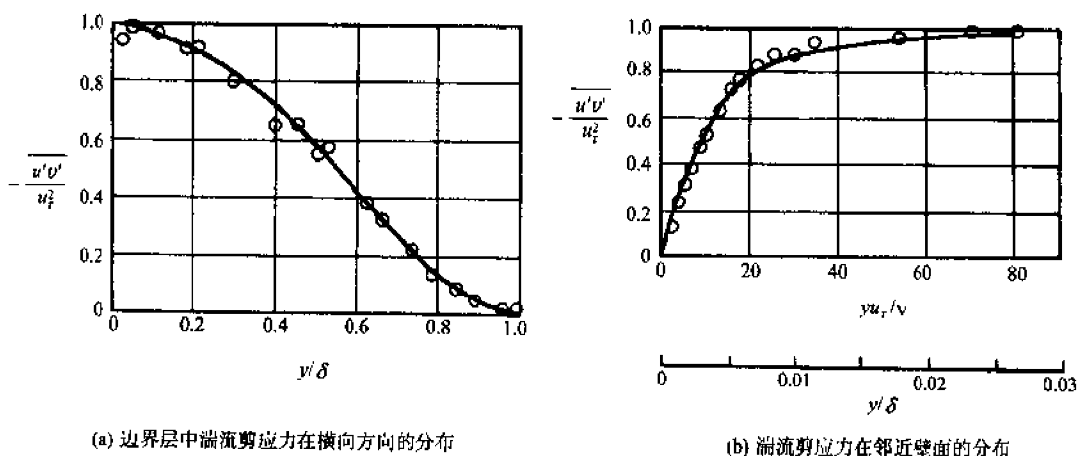


图 9-4　零压力梯度条件下沿平板流动中湍流应力的分布(取自参考文献 9)

沿平板的流动中，其能量方程(不包括邻近壁面，黏性应力起较大作用的区域)为

$$\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\overline{q^2}}{2}\right)+\bar{v}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\overline{q^2}}{2}\right)+\overline{u'v'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\overline{v'\left(\frac{p'}{\rho}+\frac{q^2}{2}\right)}\right]-\nu\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\overline{q^2}}{2}\right)-\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}}\right]=0 \tag{9.12}$$

其中 q^2 是湍流动能 $\overline{u_i'u_i'}$ 的2倍. 图9-5给出方程(9.12)中各个项大小的实验结果. 在边界层的绝大部分区域中,产生项和耗散项都很重要,在邻近壁面的区域,这两项的数值最大.

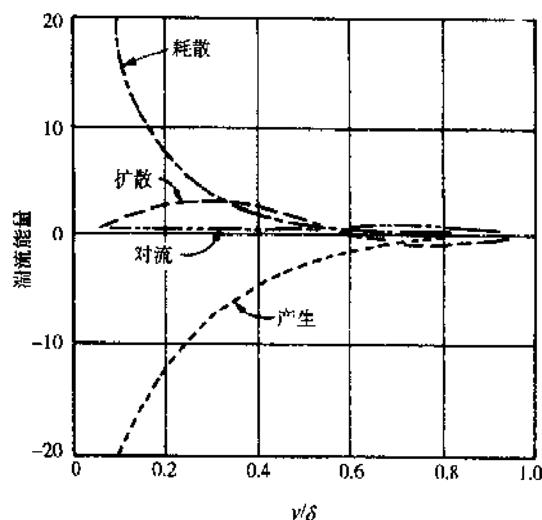


图9-5 边界层中湍流能量的分布(取自参考文献8)

上面给出的是时间平均量的实验结果. 根据热线风速仪测得的瞬时值,我们可以想像边界层内的流场结构如图9-6所示. 在湍流区和非湍流区之间有一个变化很陡峭的不规则交界面. 图中给出的是某一瞬时的交界面结构,实际的交界面在 $0.4<y/\delta<1.2$ 之间作不规则的运动. 因此,在湍流边界层中有三个不同的区:靠近壁面的完全的湍流区($y/\delta<0.4$);湍流和非湍流交替出现的间歇区($0.4<y/\delta<1.2$)和非湍流区($y/\delta>1.2$).

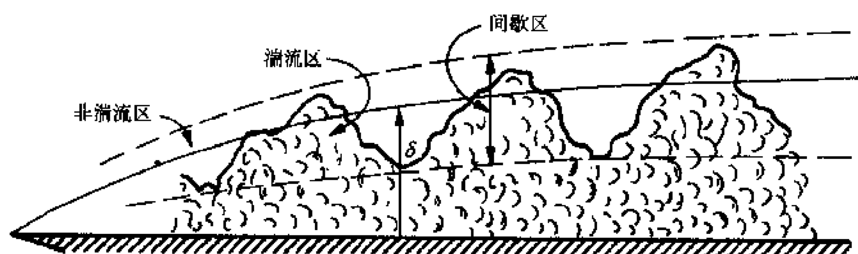


图9-6 湍流边界层的瞬时结构图,显示出在湍流区和非湍流区之间有明显的分界面并呈间歇性

完全发展的管内湍流流动

在第五章中已经讨论了管内流动达到完全发展所需的长度及其影响因素. 因为达到完全发展以后,除了压力梯度以外,方程中所有以$\partial/\partial x$ 形式出现的项都等于零,因此方程很简单. 平均速度达到完全发展所需的进口段长度大约在直径的20~100倍之间,其具体数值与进口条件、雷诺数、壁面粗糙度及进口湍流状态有关. 用湍流量表征的流动达到完全发展,所需的进口段长度更长.

完全发展的管流在某些方面和沿平板的流动很相似,比如两者都是二维流动,两者在离壁面相同的距离(y/δ)范围内,都存在三个不同的区域(黏性区,壁面湍流和自由湍流区).

和边界层比较,完全发展管流的主要不同点有:(1)没有横向(径向)的平均速度分量,$\bar{v}$,(2)主要流动方向的平均速度,$\bar{u}$,与该方向的坐标位置无关,(3)没有自由流,也没有间歇性的问题,(4)剪切力在壁面垂直方向上呈线性变化. 完全发展管流是最简单的湍流流动之一,因此

对它进行了广泛地研究.

如果用 u，v 和 w 分别表示流动在轴向 x，径向 r 和周向 θ 的速度分量，则在柱坐标上管流的动量方程为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\overline{u'v'})-\nu\left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)=0 \tag{9.13}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\overline{v'^2})-\frac{\overline{w'^2}}{r}=0 \tag{9.14}$$

其中 r 是从对称轴算起的半径方向的坐标.

能量方程为

$$\overline{u'v'}\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\overline{\left[rv'\left(\frac{p'}{\rho}+\frac{q^2}{2}\right)\right]}-\frac{\nu}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\overline{q^2}}{2}\right)\right]+\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}=0 \tag{9.15}$$

其中 $q^2=u'u'+v'v'+w'w'$ 是湍流动能的 2 倍.

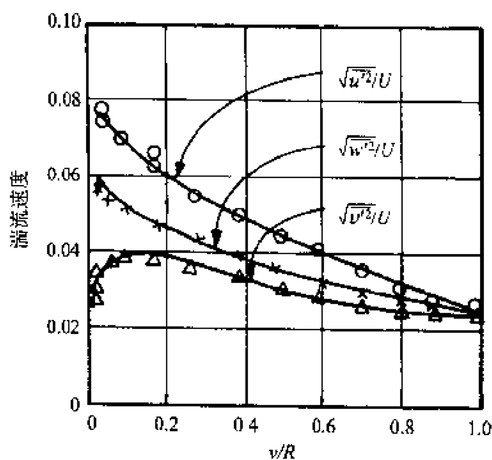


图 9-7　完全发展管流中湍流速度的分布. R 是管子半径，y 是离壁面的距离，v 是中心线上平均速
（取自参考文献 10）

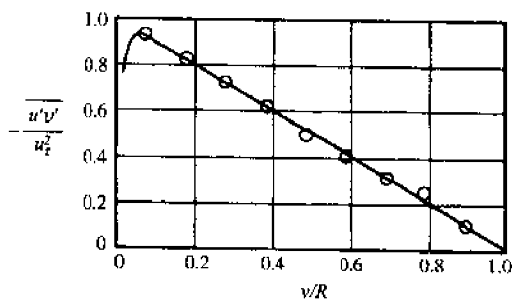


图 9-8　完全发展管流中湍流剪应力的分布
（取自参考文献 10）

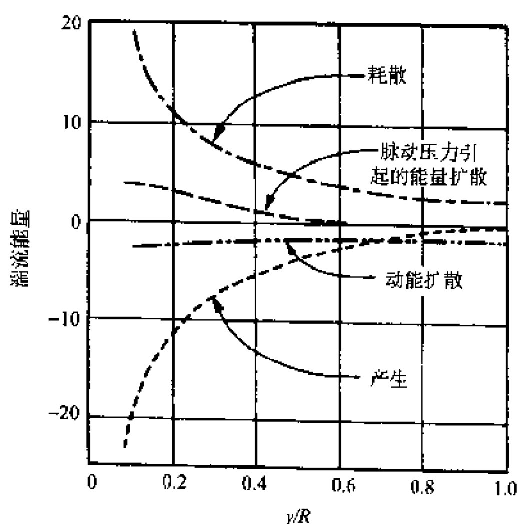


图 9-9　完全发展管流中湍流能量的分布
（取自参考文献 10）

图 9-7 和图 9-8 分别给出管子半径为 R 的完全发展管流中，湍流速度和雷诺剪应力在半径方向的分布. 图 9-9 为湍流动能的分布. 其中 y 是离壁面的距离，U 是中心线上的平均速度.

根据上述结果我们可以建立起湍流管流的计算公式. 很多公式与计算边界层的公式相同. 但由于离壁面比较远时，边界层流动有间歇性的问题，两个流动的相似程度逐渐减弱.

图 9-10 给出了湍流管流的一些重要特性，在边界层的绝大部分区域内，产生项和耗散项都是最大的项. 在壁面湍流区或过渡区内，湍流动能，产生率和耗散率都有很窄的极大值.

湍流动能沿着梯度的反方向向管子的中心线传递. 在中心线上湍流动能取极小值，传递进来的能量和中心线上的耗散率平衡.

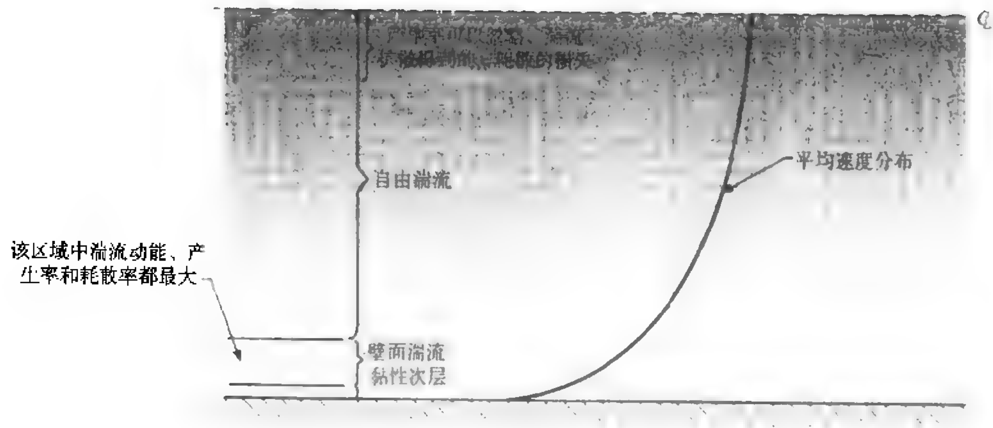


图 9-10　完全发展湍流管流的表征

9.8　自由湍流

不受固体边界直接影响的湍流流动叫做**自由湍流**. 运动物体后面的尾流流动和从喷管进入静止或运动速度比较慢的流体中的射流都是自由湍流的例子.

在工程上,我们对这类流动在流动方向上的扩展速率,平均速度分布,以及在和周围流体混合过程中的动量和能量输运很感兴趣.

自由湍流的一个重要特征是,分子黏性对平均运动不起控制作用,平均运动完全取决于湍流涡旋. 从这个意义上说,射流和尾流与湍流边界层中最外的一部分流动相似. 在自由湍流中,黏性仅在湍流动能在小尺度涡旋的耗散中起作用.

尾流流动

讨论如图 9-11 所示的直径为 d 的圆柱体后尾迹中的湍流流动. 我们的问题是,在给定圆

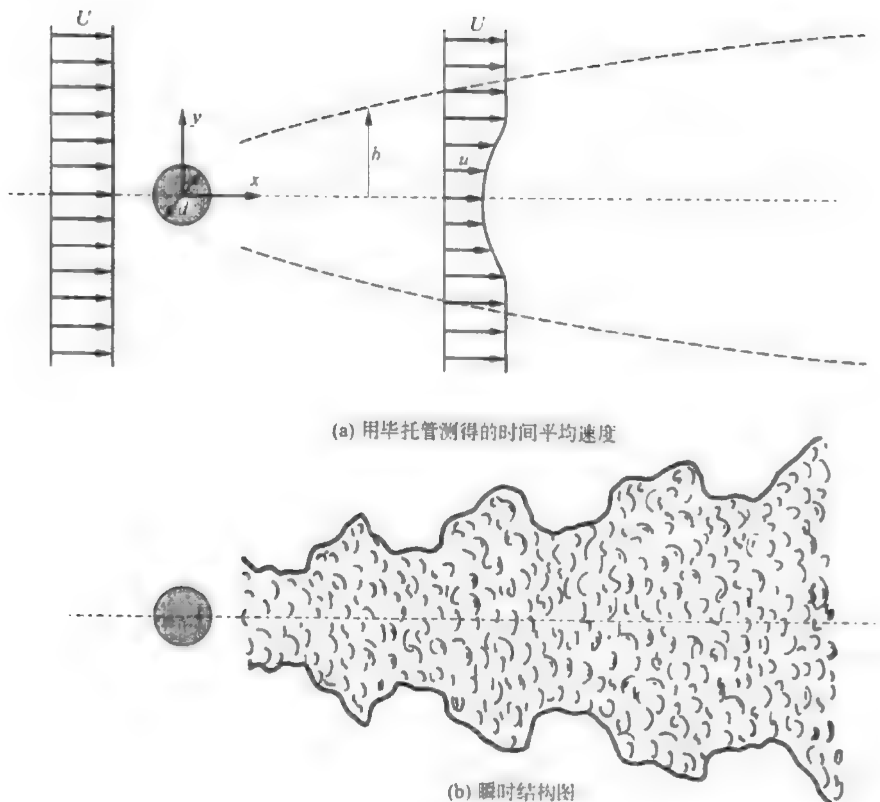


图 9-11　圆柱体后的湍流尾流

柱体直径，流体物性和流动速度时，如何确定速度 $u=u(x,\ y)$ 的分布、尾流的半宽 $b=b(x)$ 和湍流量的分布.我们无法给出完全的解析解，但根据实验结果可以整理出一些通用的关系式.

离圆柱体较远时，动量方程为

$$U\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'}) \tag{9.16}$$

$$0=\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}+\rho\frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'^2}) \tag{9.17}$$

其中我们已经假定了 $\tau_T \gg \tau_l$，$\bar{u}\gg\bar{v}$，$\frac{\partial}{\partial x}\ll\frac{\partial}{\partial y}$，$\nabla\bar{p}=0$，其中，$\tau_T$ 是用方程(9.9)定义的湍流剪应力，τ_l 是层流剪应力.

和原来的方程相比，方程(9.16)和(9.17)已经很简化了，但我们仍无法得出解析解.因此，求解射流和尾流的通用方法是，假定速度分布满足自相似性条件，同时方程中的雷诺应力项用涡旋黏性系数或普朗特混合长度等唯象理论代入.

速度分布自相似意味着速度分布满足

$$\bar{u}/U=f(y/b) \tag{9.18}$$

施里希廷(见参考文献14)运用普朗特动量混合长度理论，对尾流进行了相似性分析.假定混合长度和尾流的宽度成正比，对尾流的微分方程进行了求解，并用动量积分方程得出

$$b=\sqrt{10}\beta(xC_Dd)^{1/2} \tag{9.19}$$

$$\frac{U-\bar{u}}{U}=\frac{\sqrt{10}}{18\beta}[x/C_Dd]^{-1/2}[1-(y/b)^{3/2}]^2 \tag{9.20}$$

其中 $\beta=0.18$ 是根据实验数据确定的常数，C_D 是阻力系数.

当 $x/d>10$ 时，方程(9.19)和实验数据符合得很好，$x/d>50$ 时，方程(9.20)和实验数据很符合.

射流流动

现在我们讨论如图9-12所示的圆形湍流射流.根据特性的不同，整个射流可以分成三个区域：区域Ⅰ由平均速度为 U_P 的均匀中心势流和它周围的剪切层组成，剪切层又被平均速度为 U_S 的周围介质包围.该区域从喷管出口开始，向下游延伸大约4～5倍喷管直径的长度.区域Ⅱ的特征是，中心没有势流区，平均速度分布也不满足自相似性的条件.区域Ⅱ的下游紧接着的是第Ⅲ区，大约从8倍的喷管直径处开始，其特征是速度分布满足自相似性条件.

湍流射流由于工程上很重要，又比其他湍流流动简单，过去对它作过很多研究，甚至还出版了主要讨论湍流射流的专著(文献1和12).

欣兹(文献8)利用涡旋黏性系数假定和自相似性分析方法，给出了射流中平均速度的分布.利用微分形式的动量方程和动量积分方程，发现当 $(U_P-\bar{u})/U_S\gg1.0$ 时，b 和 $(x+a)$ 成正比，并且

$$\frac{U_P-\bar{u}}{U_P-\bar{u}_c}=\left[1+\frac{(U_P-\bar{u}_c)r^2}{8\varepsilon(x+a)}\right]^{-2}$$

当 $(U_P-\bar{u})/U_S\ll1.0$ 时，b 和 $(x+a)^{1/2}$ 成正比.其中 ε 是一个假定的常数，a 是实验常数.U_P 和 U_S 的意义示于图9-12，$\bar{u}_c$ 是中心线上的平均速度.

尾流和射流的扩展速率以及中心线上的速度列于表9.1.

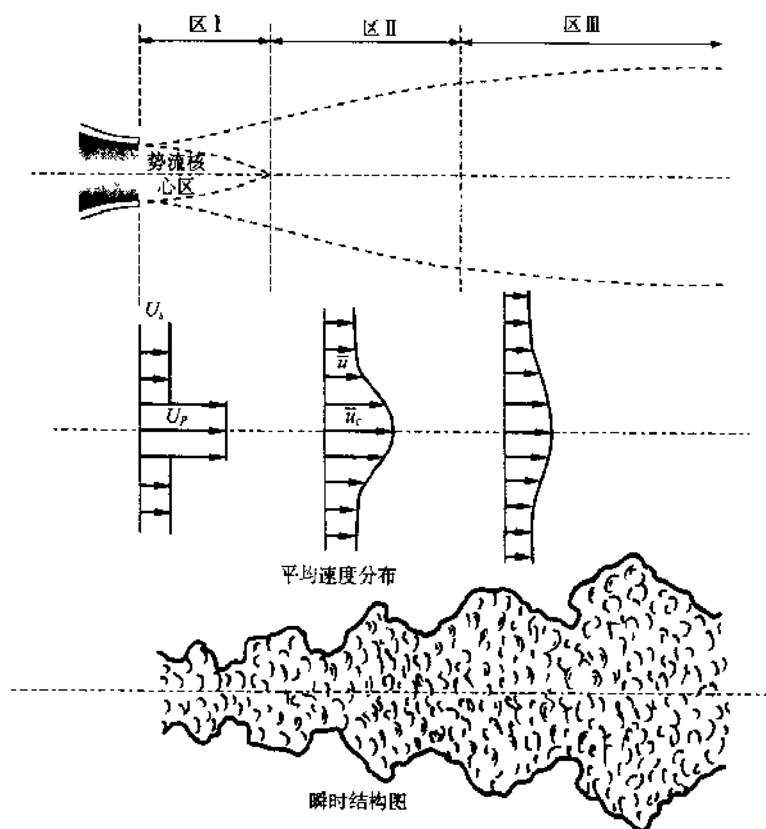


图 9-12　湍流射流的分区和速度分布

表 9.1　流场宽度和中心线上的速度

	宽度,正比于	中心线上速度欠缺, $(\bar{u}_c - U_S)$,正比于
二维平面射流	x	$x^{-1/2}$
圆形射流	x	x^{-1}
二维平面尾流	$x^{1/2}$	$x^{-1/2}$
圆形尾流	$x^{1/3}$	$x^{-1/3}$

需要指出的是,表中的结果对近尾流和喷管出口附近的射流不适用.

9.9　最新的发展

湍流的完全理论描述是现代物理学中尚未解决的少数几个问题之一.已经试用过很多方法,而且这些方法在对湍流机理的理解方面起过很大的作用,但是它们离完全的数学描述都仍差得很远.其中特别有价值的方法有,从高能物理学中借用过来的重整化群方法,和以大量振荡系统相互作用作为基础的"混沌"理论.

用"混沌"系统的观点来观察湍流,就可以理解为什么湍流的理论描述会这么困难.考虑一个具有两个自由度的简单线性振荡系统.任意一个自由度的运动都和初始条件有关,同时由于两个自由度的运动要互相叠加,它们的运动状态将比一个自由度系统的运动复杂得多.当自由度的数目增加时,任一自由度的运动都将变得越来越复杂,只有经过很长时间以后,才有可能发生重复.同时,任一自由度在某一瞬时所处的位置(或坐标)对初始条件很敏感,而且时间越长越敏感.

如果系统的自由度数目很大(实际上是不可数的),则过了很长时间以后,任一自由度在某

一瞬时的位置对初始条件精度的要求是很苛刻的，实际上，初始条件无论如何精确，要预计这类复杂系统的运动特性都是不可能的. 比如在一个自由度数目很大，但仍然可数的非线性系统中，如果在初始条件的第16位数上有一个差别，可以使稍后系统的状态完全改变. 即使采用最先进的计算机，也不可能跟上系统状态的变化. 因此虽然系统满足牛顿力学的确定性规律，由于它无法预计，系统的特性仍是混沌的."混沌"理论已经用于湍流流动的描述，而且对湍流机理产生了一些新的认识.

最近发展起来的唯象理论特别适用于对其进行计算机分析. 尤其是 k-ε 模型，在描述应变率不是很大的湍流流动中取得了很大的成功.

详细情况和湍流理论中的最新思想，读者可以查看文献和有关杂志.

9.10 小结

我们已经用"各向同性湍流"和"剪切湍流"作为例子讨论了不可压流体的湍流流动问题. **各向同性湍流**是一个平均速度没有变化的高度理想化的流动. 虽然各向同性湍流很难代表工程中实际的流动，只是因为它数学上比较容易处理，同时也是为了能更好地了解非各向同性湍流，人们对它进行了广泛地研究.

剪切湍流又可以细分为**壁面湍流**(如边界层流动)和**自由湍流**(如尾流和射流). 问题是要确定平均速度，剪应力和湍流量的分布. 解决这些问题有两个方法：(1)唯象的方法，定义一个交换系数(如涡旋黏性系数或混合长度)，把湍流应力和平均速度场联系起来，(2)统计的方法，写出时间平均量的微分方程. 从工程观点来看，两种方法都很有用.

参考文献

1. Abramovich, G. N., *The Theory of Turbulent Jets* (USSR), MIT Press, 1963.
2. Anderson, D. A., Tannehill, J. C., and Pletcher, R. H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corp., 1984.
3. Batchelor, G. K., *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge University Press, 1956.
4. Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford, 1961.
5. Drazin, P. G., and Reid, W. H., *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, 1981.
6. Essers, J. A., *Computational Methods for Turbulent, Transonic, and Viscous Flows*, Hemisphere Publishing Corp., 1983.
7. Frisch, U., *Turbulence*, Cambridge University Press, 1995.
8. Hinze, J. O., *Turbulence*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1975.
9. Klebanoff, P. S., "Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient," NACA TN 3178, 1954.
10. Laufer, J., "The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow," NACA R. 1174, 1954.
11. Moon, F. C., *Chaotic Vibrations*, John Wiley, 1987.
12. Pai, S. I., *Fluid Dynamics of Jets*, Van Nostrand, 1954.
13. Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, 1980.
14. Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, 7th ed., McGraw-Hill, 1986.
15. Schubauer, G. B., and Tchen, C. M., *Turbulent Flow*, Princeton University Press, 1961.
16. Tennekes, H., and Lumley, J. L., *A First Course in Turbulence*, MIT Press, 1972.
17. Townsend, A. A., *The Structure of Turbulent Shear Flow*, Cambridge University Press, 1956.

For recent and current developments the reader is referred to journals; in particular the following are recommended: *Journal of Fluid Mechanics* and *Physics of Fluids*.

例　题

9.1 假定密度和黏性系数为常数，推导同心环形通道内流体沿轴向流动时，完全发展的湍流流动的运动方程.

9.2　证明瞬时的脉动值满足不可压流的连续方程.

9.3　考虑两块平行平板之间的二维完全发展的流动.其中一块板静止,另一块板在它自己所在的平面内以速度 U 作匀速运动.假定 $\partial\bar{p}/\partial x=0$,其中 x 是流动方向的坐标.

(a) 给出平均速度分布曲线的一般形状;

(b) 给出剪应力的分布;

(c) 给出涡旋黏性系数 ϵ 和混合长度 l 的近似分布;

(d) 给出压力的近似分布式.

9.4　考虑空气沿平板的流动,自由流速度为 50ft/sec,压力 $p=14.7$psi, $T=59°$F, $\rho=0.00238$slug/ft^3, $\mu=0.0373\times10^{-5}$ slug/ft-sec, $\nu=1.57\times10^{-4}$ ft^2/sec.在某一截面上,边界层厚度 $\delta=2.8$in, 壁面剪应力 $\tau_0=0.00813$lb/ft^2.假定在 $20<yu_\tau/\nu<1000$ 范围内,速度分布为

$$\bar{u}/u_\tau = 2.44\ln yu_\tau/\nu + 4.9$$

同时切应力为常数,试求解(a)普朗特混合长度,(b) $y=0.05$in 和 $y=0.10$in 处的 ϵ/ν 比值.

第九章符号表

a = 常数

b = 尾流或射流的半宽

B_i = 单位体积的体积力

C_D = 阻力系数

d = 圆柱体的直径

f = 函数的符号

l = 普朗特动量混合长度

m = 速度分布乘方定律中的指数

n = 速度分布乘方定律中的指数

p = 压强

q^2 = 湍流动能的两倍, $\overline{u_i'u_i'}$

r = 半径方向的坐标

R = 管子的半径

t = 时间

T_l = 求平均的时间区间

U = 自由流速度,管子中心线上的平均速度

U_P = 射流速度

U_S = 二次流的速度

$\bar{u}_c$ = 中心线上的平均速度

$u_i = u_1, u_2, u_3 = u, v, w$ 速度分量

u_τ = 摩擦速度, $\sqrt{\tau_0/\rho}$

x_i = 笛卡儿坐标 $x_1, x_2, x_3 = x, y, z$

y = 离壁面的距离

$\overline{u_i'u_j'}$ = 单点两个速度的关联

$\overline{(u_i')_A(u_j')_B}$ = 两点两个速度的关联

δ = 边界层厚度

ϵ = 涡旋黏性系数

μ = 黏性系数

ν = 运动黏性系数, μ/ρ

ρ = 密度

τ_{ij} = 剪应力张量

τ_{ij_T} = 湍流剪应力张量 = $-\rho\overline{u_i'u_j'}$

τ_{ij_l} = 层流剪应力张量 = $\mu\partial\bar{u}_i/\partial x_j$

τ = 某一特殊问题中剪应力的一个分量

τ_0 = 壁面上的剪应力

$\overline{(\ \ )}$ = 平均值

$(\ \ )'$ = 脉动分量

第十章　高超声速边界层流动

10.1　引言

由于对导弹和航天飞机的关注，高超声速流动已变得非常重要．当物体以非常高的马赫数进入地球大气层或在地球大气中飞行时，物体周围的气体会因高温而发生分子离解．因此，高超声速流动定义为一种高速流动，在这种流动中马赫数是如此之高，以至于出现离解（对地球大气是 $M>6$）．

先考察一个例子作为研究高超声速流动的开始，如图 10-1 所示，一飞行体以极高的速度进入地球大气，该飞行体周围会出现不同的流动区域．在物体的前面形成**弓形激波**，该激波环绕物体．弓形激波前面的流动是未受扰动的．在对称轴上激波最强，因为在该处激波与流动相垂直．激波波后，存在一个离解区．另外，激波后的区域黏性效应并不重要，但是，贴近物体表面的区域是边界层，边界层中黏性效应是重要的，至于边界层内的流动可以是层流，也可能是湍流．当流体流经物体尾部时，流体通过普朗特-迈耶膨胀有向着对称轴转动的趋势，随后流动又向相反的方向转动（变直），其结果是流体从相反的方向一齐会合．这种变直的流动会引起斜激波，又称之为**尾激波**．尾激波之后的流动是尾迹流，尾迹流包括一湍流核心，其周围是非湍流区域．在尾迹流中速度要减小（在对称轴上速度最小），物体之后随着距离增加，最后速度几乎是均匀的，并且等于自由流速度．然而，湍流核心将在物体后保持很长的距离（物体直径的几千倍）．

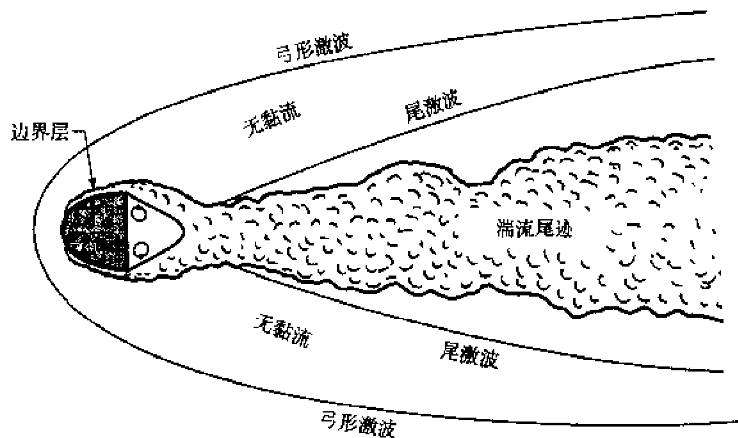


图 10-1　高超声速流动区域

本章要考虑边界层流动和尾迹流动，不讨论激波形状的解法，也不讨论无黏流动区，因为这些问题为了解方程（通常）包含有数值方法．在第八章已经讲述了超声速流动的基本概念，这些概念使人们对计算这些问题所必须使用的方法有所了解．

湍流高超声速边界层问题是流体力学中最复杂的课题之一．这种问题不仅有不可压缩湍流所具有的全部困难（正如在第九章所表明的诸多困难），而且还有许多其他的复杂性，诸如很大的密度变化、很大的温度变化、分子的离解和复合，以及扩散等．

这里将通过以下几种方法来研究这个问题，如写出重要的方程组、利用较简单流动结果的研究方法和简要讨论求解方程的方法等．

10.2　边界层方程

除了现在必须包括化学反应效应和扩散效应之外，边界层方程组与第五章中写出的方程是相同的．对于各种种类粒子的浓度不是各向同性的流体而言，第五章的简单方程是不能满足要求的．对高超声速流动，存在很大的温度梯度和很大的扩散梯度，因此将发生由扩散造成的质量输运，动量输运和能量输运．

如前所述，推导流体力学方程有两种方法．第一种是最常用的连续方法．例如，通过假设流体是连续介质的方法推导动量和能量方程．然后，用唯象学方法，建立剪力与应变率、热通量与温度梯度、质量扩散与浓度梯度相关联的唯象方程．对 x 向的速度为 u 的二维平面(xy)流动，这些一阶的唯象关系式是

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{斯托克斯定律} \tag{10.1}$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \qquad \text{傅里叶定律} \tag{10.2}$$

$$V_{iy} = -D_{ij} \frac{\partial C_i}{\partial y} \qquad \text{菲克定律} \tag{10.3}$$

其中 μ 是黏度系数，k 是热传导系数，D_{ij}是二元扩散系数(是 i 组元扩散进入 i 和 j 组元的混合物)．这些系数称之为输运系数．另外，

τ_{yx} = 剪切应力

q_y = y 向的热通量

V_{iy} = i 组元在 y 方向扩散进入 i 和 j 组元混合物的扩散速度[参看方程(10.4)]

C_i = i 组元质量比数 = 单位体积 i 组元的质量与总密度之比

第二种方法是根据质点观点．该法必须涉及到碰撞粒子的动力学．这种方法在查普曼等人的著作(见参考文献 2)和赫希菲尔德等人的编著(见参考文献 6)中有详细叙述，这里不研究这种方法，只给出由该法产生的组元守恒方程(见参考文献 1)：

$$\rho \frac{DC_i}{Dt} = \dot{w}_i - \nabla \cdot (\rho C_i \boldsymbol{V}_i) \tag{10.4}$$

其中 $\boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}$ = i 组元的扩散速度．

$\boldsymbol{v}_i$ = i 组元的平均速度．

$\boldsymbol{V}$ = 全部组元的质量平均速度 = $\dfrac{\sum_i \rho C_i \boldsymbol{v}_i}{\sum_i \rho C_i} = \dfrac{\sum_i \rho_i \boldsymbol{v}_i}{\sum_i \rho_i}$，其中 ρ_i 是 i 组元的质量密度，$\boldsymbol{V}$ 有分量 u 和 v．

$\dot{w}_i$ = 单位体积由化学反应引起的 i 组元的质量生成率．

ρ = 总密度 = $\sum_i \rho_i$．

考虑平面二维定常边界层流动，忽略 x 方向的扩散项，并利用菲克定律，这样**组元守恒方程**变成

$$\rho\left[u \frac{\partial C_i}{\partial x} + v \frac{\partial C_i}{\partial y}\right] = \dot{w}_i + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D_{12} \frac{\partial C_i}{\partial y}\right) \tag{10.5}$$

式中 u 和 v 是质量平均速度 $\boldsymbol{V}$ 的 x 和 y 向分量，另外，二元扩散系数已用 D_{12}代替了 D_{ij}．可以证明 $D_{12} = D_{21}$，对大多数感兴趣的气体系统而言，二元系数是满足要求的．通常有两类组元，重组元和轻组元．例如，在空气中重组元有 O_2 和 N_2，而轻组元是 O 和 N．D_{12}足以描述 O 或 N 通过 O_2 和 N_2 的扩散．总连续方程是

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0 \tag{10.6}$$

对全部流体的动量方程是

$$\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right]=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{10.7}$$

对全部流体的总能量方程是(其中动能贡献与 $u^2/2$ 相比 $v^2/2$ 被忽略)

$$\begin{aligned}&\rho\left[u\frac{\partial}{\partial x}(h+u^2/2)+v\frac{\partial}{\partial y}(h+u^2/2)\right]\\&=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu}{Pr}\frac{\partial}{\partial y}(h+u^2/2)+\mu\left(1-\frac{1}{Pr}\right)\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial y}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{1}{L}-1\right)\rho D_{12}\sum_i h_i\frac{\partial C_i}{\partial y}\right]\end{aligned} \tag{10.8}$$

式中 $h=\sum_i C_i h_i$

$h_i=\int_0^T c_{pi}\mathrm{d}T+h_i^0$

$h_i^0=i$ 组元的生成热

$Pr=\frac{\mu c_{pf}}{\kappa}$，普朗特数

$L=\frac{\rho D_{12}c_{pf}}{\kappa}$，刘易斯数

$c_{pf}=\sum_i C_i c_{pi}$，定压冻结比热

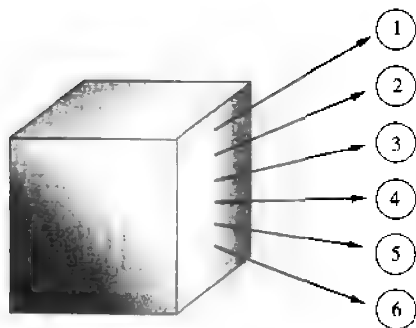


图 10-2　关于能量方程的无限小控制体

对于能量方程的推导和讨论读者可以参阅参考文献 4. 由于在高超声速流动中能量方程的重要性，这里将作简略推导.

如图 10-2 所示，在流场任一点处考察一个无限小控制体，对该控制体写出能量方程. 考虑下列通量.

1. 流出控制体的净内能通量和动能通量：

$$\nabla\cdot\left[(\rho\boldsymbol{V})\left(\sum_i C_i e_i+u^2/2\right)\right]$$

其中 $e_i=\int_0^T c_{vi}\mathrm{d}T$ 是假设为完全气体时第 i 个组元的比内能.

2. 因温度梯度流出的净的分子的能量交换：

$$-\nabla\cdot(\kappa\nabla T)$$

3. 单位体积流体压力所做的功率：

$$\nabla\cdot(p\boldsymbol{V})$$

4. 单位体积流体黏性力所做的功率：

$$\nabla\cdot[\tau\cdot\boldsymbol{V}]=\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij}u_j)$$

5. 由 i 组元质量扩散带走的能量：

$$\nabla \cdot \left(\sum_i \rho \boldsymbol{V}_i C_i h_i \right)$$

其中

$$\boldsymbol{V}_i = -\frac{D_{12}}{C_i} \nabla C_i$$

6．由组元生成所放出的能量：

$$-\sum_i \dot{w}_i h_i^0$$

其中对分子 $h_i^0=0$;对原子 $h_i^0=$正值.

将以上6项效应相加,能量方程变成

$$\rho \boldsymbol{V} \cdot \nabla \left(\sum_i C_i e_i + u^2/2 \right) + \left(\sum_i C_i e_i + u^2/2 \right) \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) - \nabla \cdot (\kappa \nabla T)$$

$$+ \nabla \cdot (p \boldsymbol{V}) + \nabla \cdot (\tau \cdot \boldsymbol{V}) + \nabla \cdot \left(\sum_i \rho \boldsymbol{V}_i C_i h_i \right) + \sum_i \dot{w}_i h_i = 0 \tag{10.9}$$

除方程(10.9)之外,在推导中使用的另一个方程是物态方程

$$p_i = \rho_i R_i T \tag{10.10}$$

其中假设所有组元有相同的温度,而 $p = \sum_i p_i = \rho \bar{R} T$, $\bar{R} = \sum_i C_i R_i$,

$$h_i = e_i + R_i T \tag{10.11}$$

另外,连续方程是

$$\nabla \cdot \rho \boldsymbol{V} = 0 \tag{10.12}$$

利用方程(10.4)和(10.9)至(10.12),并假定 $h_i = f(T)$,就可获得如方程(10.8)形式的能量方程.

用温度表示的边界层流动的总能量方程变为

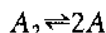
$$c_{pf}\left[\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \sum_i \dot{w}_i h_i^0 + \sum_i c_{pi} \left(D_{ij} \rho \frac{\partial C_i}{\partial y} \right) \tag{10.13}$$

方程(10.4)至(10.8)是高超声速(层流)边界层流动的基本方程组.

10.3 高超声速层流边界层

虽然在物面某位置处很可能会发生转捩,使边界层流动从层流过渡为湍流,但是在本节仅考虑层流,而湍流将留待下一节讨论.

考察一理想离解气体.分子 A_2 离解成原子 A



$$A_2 \rightleftharpoons 2A$$

能量方程的另一种形式是

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D_{12} \sum_i h_i \frac{\partial C_i}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \tag{10.14}$$

那么,对于理想离解气体则有

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho D_{12} h_A \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \rho D_{12} h_M \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right] + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \tag{10.15}$$

其中 $\rho_A/\rho=\alpha$,原子的质量比数

$\rho_M/\rho=(1-\alpha)$,分子的质量比数.

这里下标 A 和 M 分别代表原子和分子.

组元守恒方程变成

$$\rho u\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\rho v\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D_{12}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)+\dot{w}_A \tag{10.16}$$

如果给定详细的边界条件,那么由组元守恒方程(10.16)、连续方程(10.6)、动量方程(10.7)和能量方程(10.15),再加上特性关系就可确定高超声速层流边界层问题.另外还需要决定合适的输运系数值.

求解这些方程有巨大的困难.因此,这里只考虑困难较小的相关问题.考察平板上有零压力梯度和常特性、无反应气体的流动(参阅史里希廷,参考文献 8).在这种情况下,方程组变为

$$\rho u\frac{\partial h}{\partial x}+\rho v\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

边界条件是

$$y=0,\qquad u=v=0,\quad T=T_w$$

$$y=\infty,\qquad u=U_\infty,\qquad T=T_\infty$$

壁面热交换的结果是

$$q=-\kappa\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{C_f}{2}(Pr)^{-2/3}\rho_\infty U_\infty\left[h_\infty+(Pr)^{1/2}\frac{U_\infty^2}{2}-h_w\right]$$

其中 $C_f=1.328\sqrt{\nu/U_\infty x}$, $Pr=\mu C_p/\kappa$.

由于变特性,离解和扩散所附加的复杂性使问题变得更加困难.不过,虽然我们不能获得解,但是却能确定出高超声速流动的某些物理上的特征.

无离解气体的热通量是 $q=-\kappa\partial T/\partial y$.有离解气体的总热通量是[参看方程(10.15)]

$$q=-\kappa\frac{\partial T}{\partial y}-\rho D_{12}(h_A-h_M)\frac{\partial\alpha}{\partial y} \tag{10.17}$$

但是

$$h_A-h_M=h_A^0+\int_0^T(c_{pA}-c_{pM})\mathrm{d}T$$

该式近似等于 h_A^0,因此

$$q=-\kappa\frac{\partial T}{\partial y}-\rho D_{12}h_A^0\frac{\partial\alpha}{\partial y}$$

现在考虑绝热壁,即 $q=0$,则有

$$\frac{\partial T}{\partial y}=-\frac{\rho D_{12}h_A^0}{\kappa}\frac{\partial\alpha}{\partial y}$$

这样,如图 10-3 所示,当热通量为零时,壁面处的温度梯度必定不为零.

多兰斯(参考文献 3)表明离解气体在平板上的壁面热交换是

$$q=-\frac{C_f}{2}\rho_\infty U_\infty Pr^{-2/3}\left(h_\infty-h_w+Pr^{1/2}\frac{U_\infty^2}{2}\right)\left[1+\frac{(L-1)(\alpha_\infty-\alpha_w)h_A^0}{h_\infty-h_w+Pr^{1/2}U_\infty^2/2}\right]^{2/3} \tag{10.18}$$

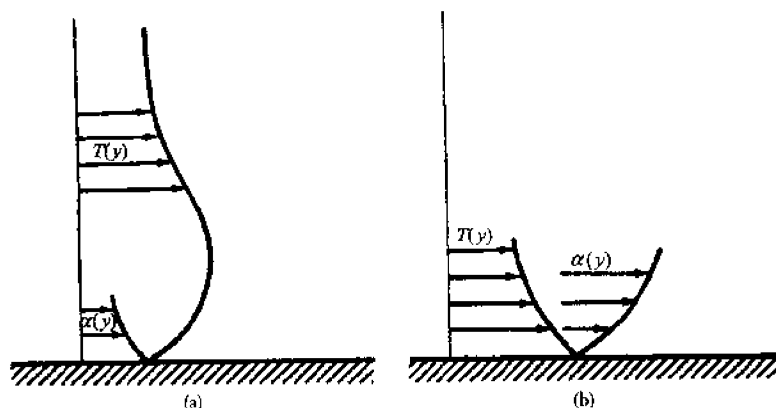


图 10-3　绝热壁的温度和浓度分布
(a)冷壁,(b) 热壁

我们注意到在式(10.18)中,如果 $L=1.0$ 或者 $\alpha_\infty=\alpha_w$,那么该式与无离解的壁面热流表达式是相同的.其中下标∞和 w 分别代表自由流条件和壁面条件.L 是刘易斯数.

以上讨论的是平板上的流动.然而,兴趣更大的还是关于钝头体绕流的热交换,特别是钝头体驻点区有很大的热通量.这些问题已经由多兰斯、利斯、费和雷德尔、以及其他学者(参看参考文献 1,7 和 4)作了详细研究.这里将不深究这个问题.

求解边界层问题常用的方法是进行坐标变换,其结果把涉及偏微分方程的问题变成涉及常微分方程的问题,然后用数值方法对下列两种流动求解变换后的常微分方程.(1)冻结流(即原子的复合率充分小,以至于原子的浓度完全由扩散流来确定).(2)平衡流(即复合率充分大,以至于整个流动的浓度由温度来确定).当刘易斯数、普朗特数和壁面温度为指定值时的结果示于图 10-4.

当壁面温度和自由流温度相同时,在曲线中部(见图 10-4)平衡流的温度远大子冻结流的温度.这是当原于运动至较低温度区域时由原子复合放热引起的.

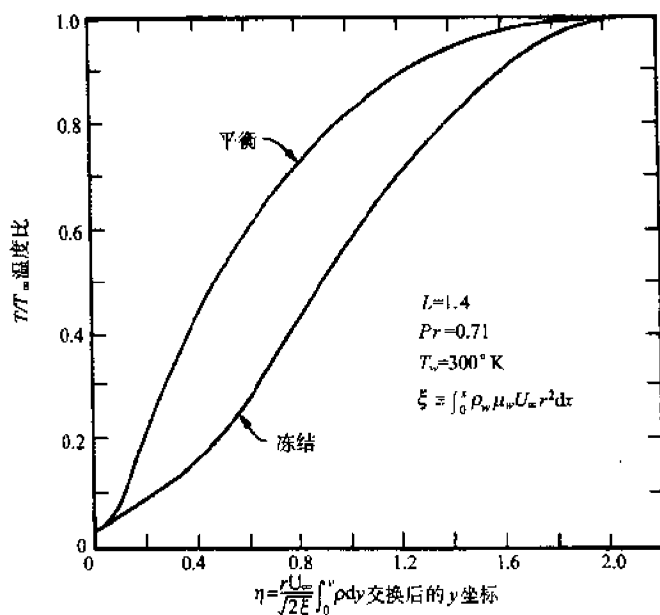


图 10-4　高超声速流动边界层中的温度分布(根据参考文献 4).假定是出现于绕圆柱形钝头体的流动,r 是圆柱的半径,y 是离开表面或壁面的距离

10.4 高超声速湍流边界层

当飞行体进入地球大气层时，飞行体周围的流场要经历几个阶段.再入的开始阶段流场是由低密度介质构成的，其中连续假设是无效的.随后是较密的介质，在此阶段流动行为像连续的一样，并且流动是层流.当穿越大气层的进程继续进行时，会出现随机的速度脉动，并在下游尾迹中形成湍流.随着密度进一步增大，导致层流与湍流之间的转捩点向前移动，最后大部分边界层都是湍流.当发生这种情况时，流动就像图 10-1 所示的那样.

我们将不考虑转捩问题.而是假定湍流边界层已存在，然后着手描述这种流动.这里的方法与第九章论述湍流的方法是十分类似的.

考虑上一节所述的连续方程、组元方程、动量方程和能量方程.如果将连续方程(10.6)乘以 C_i，并与组元方程(10.5)相加，可获得

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u C_i)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v C_i)=-\frac{\partial}{\partial y}(\rho C_i V_{iy})+\dot{w}_i \tag{10.19}$$

将连续方程与动量方程(10.7)相合并，给出

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v u)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{10.20}$$

将连续方程乘以总焓 $I=(h+u^2/2)$，并与能量方程相加，给出

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u I)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v I)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu}{Pr}\frac{\partial I}{\partial y}+\mu\left(1-\frac{1}{Pr}\right)\frac{1}{2}\frac{\partial(u^2)}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{1}{L}-1\right)\sum_i V_{iy}h_i\right] \tag{10.21}$$

方程(10.19)至(10.21)对层流是有效的.但是，只要把方程中的因变量视为瞬时量，就可以假设这些方程对湍流也是有效的.

然而就上述形式的方程而言，即使对简单流动，要求解作为空间和时间函数的这些方程好像没有多少希望.为此，我们将利用第九章的方法以获得涉及时间平均量的关联方程.

用时间平均量和脉动量表示瞬时量可写出如下表达式：

$$u=\bar{u}+u',\qquad C_i=\bar{C}_i+C'_i$$

$$\rho u=\overline{\rho u}+(\rho u)',\ h_i=\bar{h}_i+h'_i$$

$$\rho v=\overline{\rho v}+(\rho v)',\qquad \rho V_{iy}=\overline{\rho V_{iy}}+(\rho V_{iy})'$$

$$h=\bar{h}+h'$$

其中一杠表示时间平均量，一撇表示脉动量.现在，将以上表达式代入连续方程和方程(10.19)、(10.20)以及(10.21)，并对每一项取时间平均，由此可得

总连续方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho u})+\frac{\partial}{\partial y}(\overline{\rho v})=0 \tag{10.22}$$

组元连续方程：

$$\overline{\rho u}\frac{\partial\bar{C}_i}{\partial x}+\overline{\rho v}\frac{\partial\bar{C}_i}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\bar{\rho}D_{12}\frac{\partial\bar{C}_i}{\partial y}-\overline{(\rho v)'C'_i}\right]+\dot{w}_i \tag{10.23}$$

其中假设

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\overline{(\rho u)'C'_i}\right]\ll\frac{\partial}{\partial y}\left[\overline{(\rho v)'C'_i}\right] \text{和} \left[\overline{(\rho V_{iy})'C'_i}\right]\ll\left[\overline{\rho V_{iy}}\bar{C}_i\right]$$

动量方程:

$$\overline{\rho u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\overline{\rho v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}-\overline{(\rho v)'u'}\right] \tag{10.24}$$

其中假设

$$\frac{\partial}{\partial x}[(\rho u)'u']\ll\frac{\partial}{\partial y}[\overline{(\rho v)'u'}]$$

能量方程:

$$\overline{\rho u}\frac{\partial \bar{h}}{\partial x}+\overline{\rho v}\frac{\partial \bar{h}}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2-\overline{(\rho v)'u'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\kappa\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}-\sum_i\bar{h}_i\overline{\rho_i V_{iy}}-\sum_i\bar{C}_i\overline{h'_i(\rho v)'}-\sum_i\overline{(\rho v)'C'_i}\bar{h}_i\right] \tag{10.25}$$

值得注意的是,在方程中出现了一些由湍流脉动引起的附加项.这些项有确定的物理解释.例如

$-\overline{(\rho v)'C'_i}$是湍流质量交换

$-\overline{(\rho v)'u'}$是湍流动量交换

$-\overline{(\rho v)'h'_i}$是湍流能量交换

通过一些代数变换,并定义一些新术语,诸如

$$\varepsilon=-\frac{\overline{(\rho v)'u'}}{\partial\bar{u}/\partial y},\quad \varepsilon_T=-\frac{\overline{(\rho v)'h'_i}}{\partial\bar{T}/\partial y},\quad \bar{\rho}D_T=\frac{\overline{(\rho v)'C'_i}}{\partial\bar{C}_i/\partial y}$$

$$Pr_T=\frac{c_{pf}\varepsilon}{\varepsilon_T},\quad L_T=\frac{c_{pf}\bar{\rho}D_T}{\varepsilon_T}$$

由此可得

组元连续方程:

$$\overline{\rho u}\frac{\partial \bar{C}_i}{\partial x}+\overline{\rho v}\frac{\partial \bar{C}_i}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[(\rho D_{12}+\rho D_T)\frac{\partial \bar{C}_i}{\partial y}\right]+\dot{w}_i \tag{10.26}$$

动量方程:

$$\overline{\rho u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\overline{\rho v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu+\varepsilon)\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right] \tag{10.27}$$

能量方程:

$$\overline{\rho u}\frac{\partial \bar{h}}{\partial x}+\overline{\rho v}\frac{\partial \bar{h}}{\partial y}=(\mu+\varepsilon)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu}{Pr}+\frac{\varepsilon}{PrT}\right)\frac{\partial h}{\partial y}\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\frac{\kappa}{c_{pf}}(L-1)+\frac{\varepsilon_T}{c_{pf}}(L_T-1)\right]\sum_i h_i\frac{\partial \bar{C}_i}{\partial y}\right\} \tag{10.28}$$

这些是用微观和宏观输运系数表示的方程.参考文献3中研究了这些方程的解.一般的求解过程是先考虑简单情况,即令

$$Pr=Pr_T=L=L_T=1.0$$

然后将所得到的结果推广到较一般的情形.

10.5 空气动力加热

本章的最后将简要地讨论空气动力加热问题，在载人航天计划蓬勃发展的今天，可以预期这个问题有极大的重要性. 飞行器以非常高的速度通过大气层运动时，由于黏性摩擦飞行器会变热，其表面温度，实际上是绝热壁面温度可能上升得非常高——超过人类能承受的程度.

在超声速情况下，比如说马赫数为 1 到 2，由绝热壁温 T_a 可给出飞机定常飞行时其表面温度的有关概念. 例如 $M=2$，有 $T_a/T_0\approx1.8$(若空气温度为 0℉，则 T_a 约为 370℉). 这一高温产生了这样一个问题，即在商用超声速喷气式飞机中，飞机内部应保持合理温度的问题会被较高的飞机表面温度所恶化，尽管外部空气可能是十分冷的. 因此，这种飞机必须有很好的隔热和空调.

再人飞行器可能以马赫数 10 到 30 的高超声速进入大气层的上部. 在这样的速度下，边界层内的温度非常高，以至于空气分子出现离解，甚至电离. 所以这种边界层的完整描述必须计及空气的化学反应和原子反应.

然而，我们可以应用本章关于高超声速加热问题的一些结果，获得若干定性而有兴趣的关于再入飞行器应该怎样设计的信息，以防止飞行器在通过大气层降落的过程中被烧毁. 这里得到的结论与航空飞机的设计要求是完全不同的. 对于航空飞机，阻力必须最小，并保持合理的恒定温度. 然而，对再人飞行器而言，气动加热基本上是非定常问题，由于再人飞行器类似于自由落体，因此阻力必须适应于最小气动加热的需要，而不是适应最小动力的需要.

作为量级研究，再入飞行器的牛顿运动定律可以表示为

$$M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-D=-C_D\left(\frac{1}{2}\rho V^2A\right)$$

或

$$M\frac{\mathrm{d}(V^2/2)}{\mathrm{d}t}=-DV$$

其中 M 是飞行器的质量，V 是速度，D 是与运动方向相反的阻力，A 是特征表面积.(这里假定重力相对于阻力是小量.)

在某一容积温度 T_W 下，对飞行器的总热交换率 $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ 可以用绝热壁温 T_a 和 T_w 来表示，其表达式近似为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\approx\bar{h}A(T_a-T_w)\approx\frac{\bar{h}AV_\infty^2}{2c_p}$$

对于空气，$T_a\approx T_\infty+(rV_\infty^2/2c_p)$，这里 T_∞ 和 V_∞ 是自由流数值，r 是“恢复因子”，而 $\bar{h}$ 是平均薄膜系数. 假定 $r\approx1$，再由守恒原理假设 $T_w\approx T_\infty$. 再进一步利用

$$\bar{h}\propto\frac{1}{2}\rho c_pC_{Df}V_\infty$$

另外，由摩擦造成的阻力 D_f 是

$$D_f=C_{Df}\frac{\rho V_\infty^2}{2}A$$

其中 C_{Df} 定义为摩阻系数. 则总阻力 D 可以写为

$$D=C_D\frac{\rho V_\infty^2}{2}A$$

$$C_D=C_{Df}+C_{Dp}$$

式中 C_{Dp} 是压差阻力系数或型阻系数.合并这些关系式,可得

$$\frac{dQ}{dt} \approx -\frac{1}{2}\frac{C_{Df}}{C_D}M\frac{d(V_\infty^2/2)}{dt}$$

由此可见,再入飞行器在减速期间对物体的总换热量 Q,是对上式的积分,用初始速度 $V_{\infty i}$ 来表示,其结果可表达为

$$Q \approx \frac{1}{2}\frac{C_{Df}}{C_D}\left(\frac{MV_{\infty i}^2}{2}\right) \tag{10.29}$$

式中忽略了末速度.可以看出为了使传入再入体或航天飞机的热量为最小,C_{Df}/C_D 值应该很小.换句话说,再入体应该是钝头体,在物体的总阻力中型阻应起主要作用.另外,再入飞行器的表面通常要使用烧蚀材料,以帮助吸收热量,并防止物体内部温度升得太高.在俄罗斯,典型的再入飞行器是球状的,而美国飞行器通常是钝锥状的.在再入飞行期间,球状有较小的 C_{Df}/C_D 值,但是,钝锥状有较好的方向稳定性.

10.6　小结和讨论

湍流化学反应边界层是流体力学中最复杂的问题之一,在我们进入航天时代时,这个问题有可能受到相当大的关注.

在湍流边界层方程组中有两种输运系数.其中输运系数 μ、k 和 D_{12} 是由于微观效应造成的,是流体的特性.这些系数不依赖于流动条件;然而,输运系数 ε、ε_T 和 D_T 是由宏观效应造成的,它们不是流体的特性,这些系数依赖于流动条件,在方程中它们像速度、熵等一样是未知量.确定这些(微观的和宏观的)输运系数依然是湍流高超声速边界层流动的主要课题之一.

高超声速空气动力学和再入问题的分析已顺理成章地成为流体力学中众所周知的分支.高超声速流动理论和化学反应边界层流动是航天飞机空气动力学设计的基础.事实上,航天飞机已具有非常好的空气动力学性能,证明流体力学在该领域已成熟.当前,大量的工作正致力于高超声速运输计划,该计划是为了研制一种高速、高空、喷气发动机推动的运输机.

参考文献

1. Anderson, J. D., *Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics*, McGraw-Hill, 1989. (A useful bibliography of journal articles is provided.)
2. Chapman, S., and Cowling, T. G., *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge University Press, 1958.
3. Dorrance, W. H., *Viscous Hypersonic Flow*, McGraw-Hill, 1962.
4. Fay, J. A., and Riddell, F. R., "Theory of Stagnation Point Heat Transfer in Dissociated Air", *J. Aero. Sci.*, 25, No. 2, pp. 73-85, 1958.
5. Hall, J. G., Editor, *Fundamental Phenomena in Hypersonic Flow*, Cornell University Press, 1996.
6. Hirschfelder, J. O., Curtiss, C. F., and Bird, R. B., *Molecular Theory of Gases and Liquids*, John wiley, 1954.
7. Lees, L., "Laminar Heat Transfer over Blunt Nosed Bodies at Hypersonic Flight Speeds," *Jet Propulsion*, April 1956.
8. Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, 7th ed., McGraw-Hill, 1986.
9. Vincenti, W. G., and Kruger, C. H., Jr., *Introduction to Physical Gas Dynamics*, John Wiley, 1965. (Reprinted by Krieger Publishing Co.)

期望进一步学习高超声速流动的读者将发现参考文献 1 和参考文献 3 对该问题提供了极好的介绍和讨论.这两本书引用了许多有关高超声速流动的重要出版物.

对高超声速流动的最新研究感兴趣的读者,下列杂志是特别有用的:Physics of Fluids 和 Transactions of the A. I. A. A.

第十章符号表

C_f = 表面摩擦因数

C_i = i 组元质量比数

c_p = 定压比热

c_{pi} = i 组元定压比热

c_{pA} = 原子的定压比热

c_{pf} = 冻结定压比热，$\sum_i C_i c_{pi}$

c_{pM} = 分子的定压比热

c_{vi} = i 组元定容比热

D_{12} = 二元扩散系数

D_T = 湍流扩散系数

e_i = i 组元比内能

h = 比焓，薄膜系数

h_i = i 组元比焓

h_i^0 = i 组元的生成焓

h_w = 壁面比焓

h_∞ = 自由流比焓

$I = u^2/2 + h$，驻点比焓

L = 刘易斯数

L_T = 湍流刘易斯数

M = 马赫数

p = 压强

p_i = i 组元分压强

Pr = 普朗特数 = $\mu c_{pf}/\kappa$

P_T = 湍流普朗特数

q = y 方向热通量

$\bar{R}$ = 混合气体的气体常数 = $\sum_i C_i R_i$

R_i = i 组元气体常数

t = 时间

T = 温度

T_∞ = 自由流温度

u = x 向质量平均速度

U_∞ = 自由流速度

v = y 向质量平均速度

$\boldsymbol{V}$ = 质量平均速度 = $\dfrac{\sum_i C_i \rho_i \boldsymbol{v}_i}{\sum_i C_i \rho_i}$

V_{iy} = y 向 i 组元扩散速度

$\boldsymbol{V}_i$ = i 组元扩散速度

$\boldsymbol{v}_i$ = i 组元平均速度

w = z 向质量平均速度

$\dot{w}_i$ = 单位体积 i 组元质量生成率，由化学反应引起

x，y，z = 坐标系

α = 原子质量比数

α_∞ = 自由流原子质量比数

α_w = 壁面原子质量比数

ϵ = 湍流黏性系数

ϵ_T = 湍流能量交换系数

κ = 热传导系数

μ = 黏性系数

ρ = 密度

ρ_A = 原子密度

ρ_M = 分子密度

τ_{yx} = 剪切应力

$(\ )_A$ = 原子特性

$(\ )_M$ = 分子特性

$(\ )_w$ = 壁面特性

$(\ )_\infty$ = 自由流特性

第十一章 磁流体动力学

11.1 引言

磁流体动力学(MHD)研究导电流体与电磁场之间的相互作用,是流体动力学一个较新的重要分支.当导电流体流过磁场时,诱导出电场,因而产生电流;随后,这一电流与磁场相互作用产生出作用在流体上的体力.

这一相互作用在自然界经常发生,并且人类利用这一原理发明创造出新的仪器设备.我们将叙述发生在太阳中,地球内部,电离层中,以及恒星和它们的大气层中若干电磁流体动力学流动的例子.在实验室中,已经制造出许多直接利用磁流体动力学相互作用的新装置,例如推进器和发电装置;或利用流体与电磁场相互作用的新装置,例如电子束力学装置,波导管,放电器等等.

处理这类问题,有两种基本方法:称为磁流体动力学的宏观流体连续介质模型的方法,及称为等离子体动力学的微观统计模型的方法.这里,我们仅研究磁流体动力学,也就是研究对象只限于导电液体和相当稠密的电离气体.

11.2 运动介质的电动力学

在开始研究磁流体动力学以前,对经典电磁场理论有全面的了解是必要的.虽然我们认为读者对麦克斯韦尔方程组已比较熟悉,但是还在这里作简要回顾.

电磁学理论的基本定律可以用数学形式表示,称为麦克斯韦尔方程组.这些方程联系数个基本场量,并揭示了这些场量是如何产生的.除麦克斯韦尔方程组外,为了完整地描述一个电磁系统,我们把处于相对运动中的观察者所测量到的场联系起来.这些定律都包括在狭义相对论中,但是我们在这里只限于非相对论问题,也就是说,我们将始终假定所有速度远小于光速 c(数学上表示为 $V^2/c^2 \ll 1$).本章中,我们都采用国际单位制.

麦克斯韦尔方程组

以下是麦克斯韦尔方程组的四个基本方程.电位移场 $\boldsymbol{D}$ 由源方程:

$$\int_{\mathscr{V}} \rho_e \mathrm{d}\mathscr{V} = \int_A \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{11.1a}$$

确定.它表明整个电位移场 $\boldsymbol{D}$ 完全由空间净电荷密度 ρ_e 产生.$\boldsymbol{D}$ 的电力线始终终止于电荷,不能在空间任何地方终止.其微分形式为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_e \tag{11.1b}$$

磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的源方程称为安培定律,为

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_A \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} + \int_A \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{11.2a}$$

式中 $\boldsymbol{J}$ 为净电流密度,$\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ 为位移电流.微分形式为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{11.2b}$$

法拉第定律为

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_A \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{11.3a}$$

或

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{11.3b}$$

最后,磁感应场 $\boldsymbol{B}$

$$\int_A \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0 \tag{11.4a}$$

它表明所有感应磁场的磁力线必定是闭合回路.微分形式为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{11.4b}$$

这些麦克斯韦尔方程组对任何观察者都成立,只要所有场量是在他自己的参考系中测量的,不管他是否处于运动之中.对所有观察者(不管他们之间的相对运动)这些方程具有相同形式,我们说它们是协变的.由不同观察者测量得到的场量要用洛伦兹变换进行关联.此外;由处于相对运动中的不同观察者测量得的质量,长度和时间等物理量以及它们的导数之间也必须用洛伦兹变换进行换算.对(与光速相比)低速运动,伽利略变换给出了距离相同(因此时间和质量相同),即使如此,电磁场的场量必须遵循洛伦兹变换.洛伦兹变换可以用狭义相对论原理导出,即以光速不变假设和自然界定律的协变性原理导出.但这里,我们不进行推导.

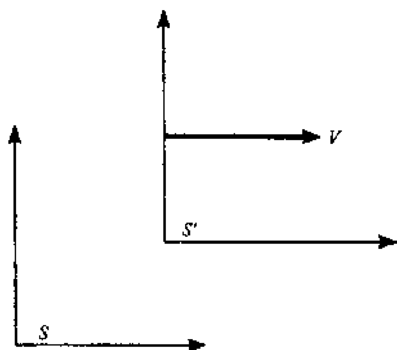


图 11-1　观察者处于相对运动中.参考系 S' 以速度 V 相对于参考系 S 运动

考虑图 11-1 所示的两个参考系 S 和 S'.参考系 S' 以速度 $\boldsymbol{V}$ 相对于参考系 S 运动.本章中,我们将用 S' 表示相对于介质的静止参考系,这样,在 S' 中的观察者将随当地介质(磁流体动力学中的流体)运动.在静止参考系中(并且一般只在静止参考系中)才能写出必要的本构方程.这些方程关联 $\boldsymbol{D}'$ 与 $\boldsymbol{E}'$,$\boldsymbol{B}'$ 与 $\boldsymbol{H}'$,并且通常还考虑包括联系 $\boldsymbol{J}'$ 和 $\boldsymbol{E}'$ 的欧姆定律.以后我们将用带上标一撇的量表示在静止参考系中测量得的量.因此,我们可以写出

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}' &= \varepsilon \boldsymbol{E}' = \varepsilon_0 \kappa \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{P}' + \varepsilon_0 \boldsymbol{E}' \\ \boldsymbol{B}' &= \mu \boldsymbol{H}' = \mu_0 \kappa_m \boldsymbol{H}' = \mu_0 (\boldsymbol{H}' + \boldsymbol{M}') \\ \boldsymbol{J}' &= \sigma \boldsymbol{E}' \end{aligned} \tag{11.5}$$

式中 ε 为介电常数,ε_0 为真空中的介电常数,κ 为相对介电常数.类似地,μ 为磁导率①,μ_0 为真空中的磁导率,以及 κ_m 为相对磁导率.σ 为标量电导率.$\boldsymbol{P}$ 为极化强度矢量和 $\boldsymbol{M}$ 为磁化强度矢量.方程组(11.5)的前两个方程普遍适用,对于线性介质,ε 和 μ 只是温度和压强的函数,对于非线性介质,还是场的函数.欧姆定律是一个由实验得到的唯象的方程,并不普遍适用.这里给出的标量 σ 的形式对液体和稠密气体是适用的,但在稀薄气体中,电导率是一个张量.

在任何参考系中,我们可以写出

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \boldsymbol{P} + \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} &= \mu_0 (\boldsymbol{M} + \boldsymbol{H}) \end{aligned} \tag{11.6}$$

① 本章中,黏度以 μ_f 表示以避免与磁导率混淆.

但是方程组(11.5)只在静止参考系中才成立.在真空或 $k=k_m=1$ 的介质中,我们可以看出 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{M}=0$,因而在任何参考系中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D} &= \varepsilon_0\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B} &= \mu_0\boldsymbol{H}\end{aligned}\tag{11.7}$$

在磁流体动力学问题中,我们通常需要所有四个麦克斯韦尔方程以及本构方程.然而,常常不用方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_e$,而用方程

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0\tag{11.8}$$

代替更为方便.(或者在定常或方程中 ρ_e 可以忽略的情况下,$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$,在磁流体动力学中就是这样).方程(11.8)可由麦克斯韦尔方程组直接得到,所以它不是独立的方程.

洛伦兹变换

现在列出洛伦兹变换.$\boldsymbol{V}$ 为静止参考系 S' 相对于参考系 S 的速度,⊥和‖分别表示场量在平行和垂直于矢量 $\boldsymbol{V}$ 方向上的分量.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}'_\perp=\beta(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B})_\perp, &&\boldsymbol{E}'_\parallel=\boldsymbol{E}_\parallel\\
&\boldsymbol{D}'_\perp=\beta(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H}/c^2)_\perp, &&\boldsymbol{D}'_\parallel=\boldsymbol{D}_\parallel\\
&\boldsymbol{H}'_\perp=\beta(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{D})_\perp, &&\boldsymbol{H}'_\parallel=\boldsymbol{H}_\parallel\\
&\boldsymbol{B}'_\perp=\beta(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E}/c^2)_\perp, &&\boldsymbol{B}'_\parallel=\boldsymbol{B}_\parallel\\
&\boldsymbol{J}'_\perp=\boldsymbol{J}_\perp &&\boldsymbol{J}'_\parallel=\beta(\boldsymbol{J}-\rho_e\boldsymbol{V})_\parallel\\
&\rho'_e=\beta(\rho_e-\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{J}/c^2), &&\\
&\boldsymbol{P}'_\perp=\beta(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{M}/c^2)_\perp, &&\boldsymbol{P}'_\parallel=\boldsymbol{P}_\parallel\\
&\boldsymbol{M}'_\perp=\beta(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{P})_\perp, &&\boldsymbol{M}'_\perp=\boldsymbol{M}_\parallel
\end{aligned}\tag{11.9}$$

式中 $\beta=1\sqrt{1-V^2/c^2}$.

在磁流体动力学感兴趣的非相对论极限条件下,变换简化为

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}, &&\boldsymbol{J}'=\boldsymbol{J}-\rho_e\boldsymbol{V}\\
&\boldsymbol{D}'=\boldsymbol{D}+\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H}/c^2, &&\rho'_e=\rho_e-\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{J}/c^2\\
&\boldsymbol{H}'=\boldsymbol{H}-\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{D}, &&\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{P}-\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{M}/c^2\\
&\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E}/c^2, &&\boldsymbol{M}'=\boldsymbol{M}+\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{P}
\end{aligned}\tag{11.10}$$

边界条件

界面上场量的边界条件与静止介质中要满足的边界条件相同.穿过界面时以下条件对任何参考系都成立.我们只要写出包含在任意一个参考系中能测量得的所有场量的条件即可(见图11-2).

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0,\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{J}_S$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\rho_s,\ \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0$$

(11.11)

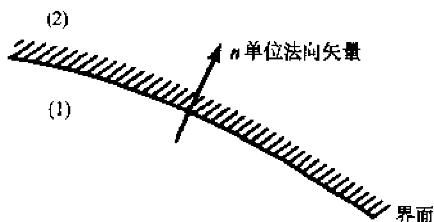


图 11-2　介质 1 和介质 2 之间的界面

式中 ρ_S 为界面上的面电荷密度，$\boldsymbol{J}_S$ 为界面上的面电流密度．因此从物理上讲，$\boldsymbol{E}$ 的切向分量和 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量在通过介面时是连续的．如果存在面电流，$\boldsymbol{H}$ 的切向分量在界面上产生跃变，以及如果存在面电荷，$\boldsymbol{D}$ 的法向分量在界面上产生跃变．

11.3 诱导电动势和端电压

在磁流体动力学问题中，我们通常对两个电极之间的端电势或端电压感兴趣．问题为：对给定的两个电极，如果有导电流体流过它们之间，端电压为多少？

一般，(在实验室参考系中，我们设置有端点)我们定义封闭回路的电动势为

$$\mathrm{emf} = \oint \boldsymbol{E}' \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{11.12}$$

式中 $\boldsymbol{E}'$ 为由随当地流体运动的观察者所测量到的当地电场强度，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 固定在实验室参考系中．应用麦克斯韦尔方程组和非相对论洛伦兹变换，我们得到

$$\mathscr{E} = \oint (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} - \int_A \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{11.13}$$

式中 $\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ 不能移出积分号．$\boldsymbol{V}$ 为导体与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 相重合瞬间的速度．

因此，电极 A 和 B 间的端电势 V_{AB} 等于电动势减去它们之间的电势降 IR：

$$V_{AB} = \mathscr{E} - \int_A^B \boldsymbol{E}' \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{11.14}$$

式中 V_{AB} 为电极 B 相对于电极 A 的电压，线积分通过两电极之间的流体进行．应该指出，(如果在交流电系统中存在涡旋电流)电动势与确定它的积分路径有关，但是端电势始终与积分路径无关．

在定常磁流体动力学问题中，如发电机，泵等，我们得到方程(11.14)的简化形式，它是直接应用 $\partial/\partial t = 0$ 和洛伦兹变换得到的．我们有

$$V_{AB} = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{11.15}$$

注意，在方程(11.5)中，$\boldsymbol{E}$ 是在实验室参考系中测量到的，方程(11.15)是由(因为在定常时 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$) $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ 得到的，因而

$$\phi_{AB} = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

ϕ 为端电势，等同于 V_{AB}．

11.4 电磁体力

电磁体力可以从库仑力定律推导得到，因为基本上它是仅有的相互作用力．

在质点的局部静止坐标系中，作用在点电荷 q 上的电磁力为 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}'$．现在，如果我们将它变换到实验室参考系，因为 $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}$(非相对论)，所以 $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B})$，即为我们熟悉的洛伦兹力定律．$\boldsymbol{V}$ 为点电荷相对于实验室参考系的速度．

流体内的体力

微观上讲，导电流体中整个电磁体力可以从库仑定律或用虚功原理来推导．这里我们只给出结果．在静止参考系中(因为已经应用了本构方程)体力密度 $\boldsymbol{f}_e'$ 为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_e' = \rho_e'\boldsymbol{E}' + \boldsymbol{J}' \times \boldsymbol{B}' - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E'^2 \nabla' \kappa - \frac{1}{2}\mu_0 H'^2 \nabla' \kappa_m \\ + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \nabla' \left(E'^2 \frac{\partial \kappa}{\partial \rho}\rho\right) + \frac{1}{2}\mu_0 \nabla' \left(H'^2 \frac{\partial \kappa_m}{\partial \rho}\rho\right) \end{aligned} \tag{11.16}$$

然而,在磁流体动力学中,只有前两项重要.这两项是协变的并且表达式在任何参考系中都成立.因此,在磁流体动力学中

$$f_e = \rho_e \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \tag{11.17}$$

并且从非相对论讲,$f_e = f'_e$,所以我们可计算 $\rho_e'\boldsymbol{E}' + \boldsymbol{J}' \times \boldsymbol{B}'$ 或 $\rho_e \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$,并得到相同结果.如我们将看到的,与 $\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$ 相比,$\rho_e \boldsymbol{E}$ 通常可以忽略.

应力张量

体力的另一个等效描述是电磁应力张量 T_{ij}.因而体力为 $f_j = \dfrac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} - \dfrac{\partial g_j}{\partial t}$,其中 g_j 为矢量电磁动量通量.T_{ij} 的协变表达式(忽略压缩效应)为

$$T_{ij} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H})\delta_{ij} + D_i E_j + B_i H_j \tag{11.18}$$

对所有实际应用,$\partial g_j / \partial t$ 项可以忽略,因而在磁流体动力学中不予考虑.应力张量的最重要应用是它能对体力作物理解释.如果应力张量对角线化(确定主应力张量)我们得到一个有趣的结果.假如我们作一个在磁流体动力学中成立的假定:应力张量中的电分量可以忽略及 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 共线(因为在磁流体动力学中,对于非相对论速度 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}'$ 和 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}'$,因此在静止或任意参考系中它们都共线),我们得到三个主应力 λ_i 为

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B} \tag{11.19}$$

并确定了主轴的方位,所以 λ_1 是沿磁力线的张力,以及 λ_2 和 λ_3 是正交于磁力线的压缩力.我们可以换句话说,一个数值为 $\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}/2$ 的静力学压缩力与一个数值为 $\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}$ 的(沿磁力线)张力叠加的结果.

基于这些结果,产生了磁压强的概念.然而,应该牢记:这一体力并不是流体中的实际张力或压强,但是像体力一样出现在动量方程中,因而可以产生真实的应力.在静平衡中,压强梯度必须由电磁应力张量的散度(它在物理上是一个体力)来平衡.这一情况类似于静止流体中由于重力场所产生的压强.

得到磁压强概念的另一种方法是将体力 $\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$ 写作为$(\nabla \cdot \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{B}$(其中我们已经应用了麦克斯韦尔方程$(\nabla \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{J} \times \dot{\boldsymbol{D}}$ 并且如我们将表明的忽略了 $\dot{\boldsymbol{D}}$).$(\nabla \cdot \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{B}$ 可以(用 $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$)写作为

$$(\nabla \times \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{B} = -\nabla\left(\frac{B^2}{2\mu}\right) + \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} \tag{11.20}$$

因此,右边第一项是体力的无旋部分,并直接加至运动方程的压强上.第二项是体力有旋部分(对应于沿磁力线的张力),在磁流体动力学中一般不为零.

11.5 磁流体动力学流动的基本概念

现在我们回顾磁流体动力学的基本假定和有关原理与方程.

假定

磁流体动力学通常假定:

1. 所有速度与光速相比很小,因而 $V^2/c^2 \ll 1$.

2. 电场的量级为 $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}$.所涉及的任何电场 $\boldsymbol{E}$ 都是诱导场或为诱导场量级.我们必须始终写成 $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}$ 并区别 $\boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{E}$.

3. 因为

$$B' = B - \frac{V \times E}{c^2} \cong B - 0\left[\frac{V^2}{c^2}B\right]$$

所以 $H \cong H'$ 及 $B \cong B'$. 液态金属和电离气体的磁导率为 μ_0，因此在任何参考系中，我们写成 $B = \mu_0 H$.

4. 位移电流 $\dot{D}$ 相对于 J 可以忽略.

5. 欧姆定律为 $J = \sigma E' = \sigma(E + V \times B)$，并且因为 $\rho_e V$ 与 $\sigma(E + V \times B)$ 相比可以忽略，$J \cong J'$.

6. 空间电荷 ρ_e' 为零，但是 $\rho_e \neq 0$. 我们必须写成 $\nabla \cdot D = \rho_e$，并且不能令 $\nabla \cdot D = 0$. 因为 ρ_e 一般为未知数，$\nabla \cdot D = \rho_e$ 不是一个有用的方程.(甚至在非定常问题中，由于空间电荷输运与 J 相比可以忽略)用 $\nabla \cdot J = 0$ 比较好而且比较方便.

7. 力 $\rho_e E$ 与 $J \times B$ 相比可以忽略. 正比于 $E \cdot D$ 的电应力和电能与 $H \cdot B$ 相比可以忽略.

8. 欧姆定义表明，对于高电导率 $\sigma \to \infty$，对有限 J，$E' = 0$ 以及 $E = -V \times B$. 因此，电流由 $\nabla \times H = J$ 确定，不是由欧姆定律确定.

方程

于是，磁流体动力学的基本方程可以写作为麦克斯韦尔方程组，欧姆定律，连续方程，包含体力 $J \times B$ 的运动方程，和包含焦耳热的能量方程. 此外，我们还必须应用非相对论洛伦兹变换. 在磁流体动力学近似中，还要用到理想气体的物态方程. 我们列这些方程于下：

麦克斯韦尔方程组

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times H &= J \\ \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E &= -\partial B/\partial t \\ \nabla \cdot J &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{11.21}$$

欧姆定律

$$J = \sigma(E + V \times B) \tag{11.22}$$

运动方程

$$\begin{aligned} \rho\left[\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V\right] &= -\nabla p + \nabla \cdot \tau + J \times B - \rho\nabla\psi \\ &= -\nabla(p + B^2/2\mu) + (B \cdot \nabla)B/\mu + \nabla \cdot \tau - \rho\nabla\psi \end{aligned} \tag{11.23}$$

式中 τ 为机械应力张量，ψ 为重力势.

能量方程

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\rho\nabla \cdot V + \kappa_T\nabla^2 T + \Phi + E' \cdot J' \tag{11.24}$$

这里我们用 κ_T 表示热导率以避免与相对磁导率混淆. u 为比内能. 如果流体为线性介质，焦耳热($E' \cdot J' \cong E' \cdot J = J^2/\sigma$)是仅有的相互作用，即 ε 和 μ 与温度无关. 这一方程的详细讨论读者可以参阅参考文献 5.

物态方程

$$p = \rho RT \tag{11.25}$$

参数

如在第四章中所讨论的那样，这些方程可以写成无量纲形式，得到有关的无量纲数. 这里我们不进行推导，只是列出这些无量纲数. 除(第四章中)一般流动的所有无量纲数外，还有另外两个独立的无量纲数. 下面我们列出若干(非独立的)无量纲数.

R_m = 磁雷诺数 = $V_0 L\sigma\mu$，度量磁对流与磁扩散之比. 如果 $R_m \ll 1$，表明诱导磁场小于外

加磁场.

M_m = 磁马赫数 = V_0/A,其中 A 是目前将要讨论的阿尔夫文速度,它定义为$\sqrt{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}/\rho}$.

M = 哈特曼数 = $\sqrt{\sigma B_0^2 L^2/\mu_f} = \sqrt{R_e R_m/M_m}$,度量磁体力与黏性力之比.

p_m = 磁普朗特数度 = $\nu/\eta = R_m/R_e$,度量涡旋耗散与磁耗散之比.

N= 相互作用参数,度量磁体力与惯性力之比.对有限电导率,N 取为 $\sigma B_0^2 L/\rho V_0 = R_m/M_m^2$,对非常高或无限大电导率,$N = M_m^{-2}$.

磁输运

由麦克斯韦尔方程组和欧姆定律可以推导得到一个非常重要的方程$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B})$,并且由对以上方程取旋度并应用$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{B}}$,可以消去 $\boldsymbol{E}$.因此,应用有关矢量恒等式和$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$,我们得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \eta\nabla^2\boldsymbol{B} + \nabla\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}) \tag{11.26}$$

它就是磁场中的输运扩散和对流方程.η 为磁耗散系数,$1/\sigma\mu$.在一些不宜引入电场的问题中,这一方程可以与[含有体力写作为$(\nabla\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{B}$ 的]运动方程一起应用.

借助导入无量纲变量

$$\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{B}/\boldsymbol{B}_0, \quad t^* = tV_0/L, \quad \boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}/L$$

输运方程变成

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{R_m}\nabla^*\times(\nabla^*\times\boldsymbol{B}^*) + \nabla^*\times(\boldsymbol{V}^*\times\boldsymbol{B}^*) \tag{11.27}$$

它表明了 R_m 的意义.右边第一项是耗散项,第二项是对流项.如果没有流动,$\boldsymbol{V} = 0$,方程(11.26)变成一个磁耗散方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \eta\nabla^2\boldsymbol{B} \tag{11.28}$$

式中 η 为磁耗散系数.对实验室尺度,一般耗散是主要的($R_m \ll 1$),但对天文学尺度(例如在太阳系中),对流是主要的($\sigma\to\infty$和 $R_m \gg 1$).实际上,当 $\sigma\to\infty$时,磁场完全由对流所输运,没有磁力线通过导电介质耗散.因此可以说:那时,在流体中的磁力线是"冻结"的,磁力线随流体运动.

这里磁场的输运和一般流体力学中的涡量输运之间存在严格的相似.经典开尔文定理等可以应用于磁场.

我们可以将磁力线想象为具有弹性,流动着的流体拉曳磁力线,直至它们之间达到静力学平衡为止.当磁场被诱导时(然后它就加在原磁场上)就是这样的情况.由于流体对外加磁场磁力线的对流作用使之变形而产生诱导磁场.当 $\sigma\to\infty$时,磁力线就失去了抗御流体拉曳的能力.

阿尔夫文波

如我们在前面所指出的,应力张量表明,体力相当于静力学压强加上沿磁力线的张力 $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}$.如我们将要看到的,这些磁力线的性质像绷紧了的弦,横波将以所谓阿尔夫文速度$\sqrt{\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}/\rho}$沿它们传播.与这一横向场的耦合,扰动必定是一个相位滞后于磁波 90°的横向速度波.如果 $\sigma\to\infty$和黏性可以忽略,这些称为阿尔夫文或磁流体动力学波的波在传播过程中不会耗散或衰减.

伯努利定理和开尔文定理

对无黏流体可以写出运动方程(11.23)并可以沿流线积分得到(对于可压缩流体定常流)

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \psi_2 - \psi_1 + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}(p + B^2/2\mu)}{\rho} = \frac{1}{\mu}\int_1^2 \frac{(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\rho} \tag{11.29}$$

如果$(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}=0$,只要用总压强 $p+B^2/2\mu$(力学的加磁学的)代替压强,则经典伯努利定理成立.

借助环量,可由运动方程得到开尔文定理的磁流体动力学形式,为

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_A (\nabla\times\boldsymbol{V})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_A \nabla\times\left[\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{11.30}$$

力$(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$ 是转动的,甚至在无黏流体中也会产生涡量.

11.6 不可压缩黏性磁流体动力学流动

作为磁流体动力学流动最简单例子之一,我们来讨论在具有横向外加磁场作用下两平行平板之间黏性不可压缩导电流体的定常流,如图 11-3 所示.这一问题的处理为等效电路法,尤其是等效电路的构建,提供了极好的例子.我们假定流动是充分发展的,因而只有在 x 方向才有压强变化.流道在 z 方向的宽度比 y 方向大很多,因而在 z 方向没有任何变化.还假定电极为理想导体,流体的电导率为 σ.外加磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 定常而且均匀.这一问题称为哈特曼(丹麦物理学家)问题.

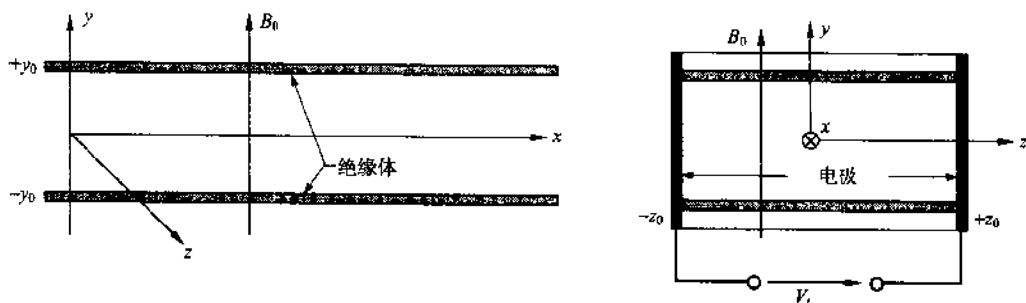


图 11-3 两平行平板之间的流动.哈特曼问题

对于这类问题,就实验室尺度说雷诺数非常小,诱导磁场应该很小,可以设想为它是由流动流体对 $\boldsymbol{B}_0$ 线的轻微拉曳而产生.然而我们将看到,对于这一问题,诱导磁场(它整个地在 x 方向)完全不出现在运动方程中,这一点可以在解决问题的最后阶段看出.在许多(非一维)问题中,诱导磁场可以耦合入基本方程而使求解十分困难.即使在那时,如果 $R_m \ll 1$,常常可以假定诱导磁场与 $\boldsymbol{B}_0$ 相比可以忽略.

我们以写出麦克斯韦尔方程组,欧姆定律和运动方程开始处理哈特曼问题.根据连续方程,$v=w=0$.根据$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$,我们得出结论:$J_z$ 仅取决于 y,并且(根据欧姆定律)等于

$$J_z = \sigma(E_z + uB_0)$$

由$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$,我们得到 E_z 为常数,因为在 x 方向没有电场,我们任意地取它为零.再因为电极有很高的电导率,因而电极内任何地方 $E_y=0$.由此可以得出结论,E_z 只是 y 的函数.

压强梯度$\partial p/\partial x$ 为常数,但由于"收缩效应"还存在$\partial p/\partial y\neq0$.

x 方向的运动方程变成

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_f\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2} - \sigma(E_z + uB_0)B_0 \tag{11.31}$$

它可以用边界条件

$$u = 0,\quad y = \pm y_0$$

直接积分，得到速度廓线为

$$u = \frac{y_0^2}{M^2}\left(\frac{1}{\mu_f}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{M}{y_0}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}E_z\right)\left(\frac{\cosh My/y_0}{\cosh M} - 1\right) \tag{11.32}$$

式中哈特曼数 M 为$\sqrt{B_0^2 y_0^2 \sigma/\mu_f}$.

y 方向的运动方程为

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + J_z B_x$$

一旦诱导磁场 B_x 确定后，就可以得到$\partial p/\partial y$. 由方程(11.32)和欧姆定律，我们求得 J_z 为

$$J_z = \sigma E_z \frac{\cosh My/y_0}{\cosh M} + \frac{y_0}{M}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{\cosh My/y_0}{\cosh M} - 1\right) \tag{11.33}$$

给出(x 方向单位通道长度)的总电流为

$$\mathscr{I} = \int_{-y_0}^{+y_0} J_z \mathrm{d}y = 2\sigma y_0 E_z \frac{\tanh M}{M} + \frac{2y_0^2}{M}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{\tanh M}{M} - 1\right) \tag{11.34}$$

路端电压($+z_0$ 处电极相对于 $-z_0$ 处电极的电压)V_t 定义为

$$V_t = -\int_{-z_0}^{+z_0} E_z \mathrm{d}z = -2z_0 E_z$$

应用方程(11.34)求解以 $\mathscr{I}$表示的 E_z，我们得到

$$V_t = -\frac{z_0 M \mathscr{I}}{\sigma y_0 \tanh M} + \frac{2y_0 z_0}{M\sqrt{\sigma\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}\left(1 - \frac{M}{\tanh M}\right) \tag{11.35}$$

现在，我们来构建装置的等效电路. 等效电路由开路电压 $V_{t_{oc}}$ 和有效内电阻 R_i 串联而成，如图 11-4 所示. 其中有效内电阻定义为开路电压 $V_{t_{oc}}$ 与短路电流 I_{SC}之比. 开路电压是负的，由方程(11.35)中令 $\mathscr{I}=0$ 得出

$$V_{t_{oc}} = \frac{2y_0 z_0}{M\sqrt{\sigma\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}\left(1 - \frac{M}{\tanh M}\right) \tag{11.36}$$

而短路电流 I_{SC} 由方程(11.34)中令 $E_z=0$ 得到

$$\mathscr{I}_{SC} = \frac{2y_0^2}{M}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{\tanh M}{M} - 1\right) \tag{11.37}$$

它是一个负值，表明电流穿过通道从 $+z_0$ 端流向 $-z_0$ 端. 因而对于长度为 L 的装置，则整个装置的短路电流 I_{SC}为 $L\mathscr{I}_{SC}$，因此 R_i 为

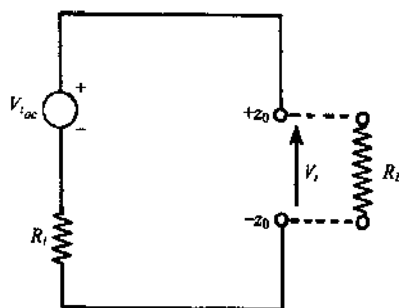


图 11-4　标有惯用符号的磁流体动力学流动装置的等效电路对哈特曼问题，$V_{t_{oc}}$ 为负因而 $V_{t_{oc}}$ 的极性与图示相反

$$R_i = \frac{V_{t_{oc}}}{I_{SC}} = \frac{z_0}{L\sigma y_0}\frac{M}{\tanh M} \tag{11.38}$$

于是根据 Thevenin 定理，等效电路如图 11-4 所示. 可以如图所示在两个端点间接上一个负载电阻 R_L，根据克希霍夫定律，我们得到

$$V_{t_{oc}} + I(R_L + R_i) = 0 \tag{11.39}$$

注意:也可以用一外接发电机代替 R_L. V_t 和 I 的符号决定于在两个端点接入的是负载 R_L,还是外接发电机.

以上等效电路法可以用于分析发电机,泵和任何形状流道内不可压缩或可压缩流动中的流量计,并为磁流体发电机分析奠定了基础.

因为 $\boldsymbol{J}$ 是已知的,现在可以由$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$ 求解诱导磁场H_x.由方程(11.33)

$$\frac{\mathrm{d}H_x}{\mathrm{d}y}=-J_z=-\sigma E_z\frac{\cosh My/y_0}{\cosh M}-\frac{y_0}{M}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{\cosh My/y_0}{\cosh M}-1\right)$$

对其积分可以求得 $H_x(y)$.边界条件决定于回路的几何结构,可以由安培回路定律确定.如果回路对称于 y 轴(如图 11-3 所示的由两个平板组成),$H_x(y=0)$的值为零,并且 H_x 反对称于 y 轴.在绝缘壁面和回路平板之间 H_x 为常数,因此在平板外部它降为零.积分以上方程给出

$$H_x=\frac{y_0^2}{M}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{y}{y_0}-\left(\frac{y_0^2}{M}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{I}{2L}\right)\frac{\sinh My/y_0}{\sinh M}\tag{11.40}$$

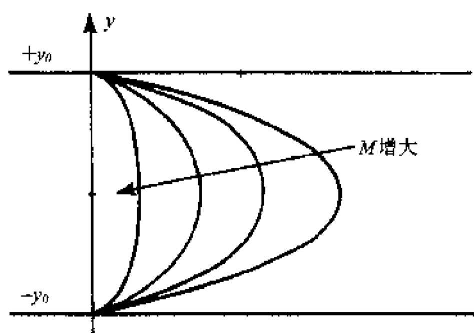


图 11-5　有负载电阻 R_L 和压强梯度为常数的哈特曼问题中的速度廓线

在哈特曼流中,(对于给定的哈特曼数)当外接负载 R_L 增大时,体积流量减小.如果是外接电源,容积流率或者减小得更多(甚至出现逆压梯度),或者增大,这决定于外接电源的极性.对于固定的 R_L 值,当哈特曼数增大时,速度剖面变平,如图 11-5 所示.然而,如果接入的是外接电源,曲线不是变平,而是变得更陡.一般增加哈特曼数意味着相互作用增大.

哈特曼问题的这一分析方法可以用于发电机和泵,在分析中装置所起的作用决定于端部条件和压强梯度.这些方法还可应用于 11.7 节中磁流体发电通道内可压缩流动分析.这里不讨论把它推广到有限截面积管道的情况,对此,读者可以参阅参考文献 5.

11.7　磁流体动力学中的波和激波

前面我们叙述了一种发生在磁流体动力学中的新型波,阿尔夫文波.现在我们将研究一般平面波的运动,并且可以看出阿尔夫文波只是电磁场与流体相互作用引起的若干新现象的一种.这里我们只把注意力限于平面波,因为它们是仅有的可以简单描述的波,面分析得到的结论能足够好地给出在磁流体中传播的波的图谱.

如果我们假定波在 x 方向传播,平面波的特征是变量在 y 和 z 方向不发生变化.从本质上讲,实践中不存在纯粹的平面波;但是至少在空间一个小范围内,波可以显示出平面波的性质.再说,任何复杂的波都可以被想象为是由许多性质上与平面波类似的波叠加而成.

有两种类型的平面波,横波和纵波.横波,如剪切波,横电磁波(TEM),(假定沿 x 方向传播)只涉及波中变量的 y 和 z 分量.横波不伴随压强和密度变化.纵波是波中变量只有 x 分量,或纯标量.常见的例子是声波,它的传播伴随压强和密度的变化.在磁流体动力学中,我们将发现横剪切波与场量的耦合产生一种新的波(阿尔夫文波),而且一般的声波被分成快、中和慢磁声波.

在我们的研究中,假定流体为连续介质,并且欧姆定律成立.在稀薄气体中,必须应用更复杂的流体模型,结果也就不同,尤其是在高频时.研究电离层中无线电波的基础就是这种稀薄离子化气体(或等离子体)的振荡,但是这里我们不能讨论它.我们所作的另一个假定是,位移

电流与传导电流相比可以忽略,它对液体和稠密气体是成立的.也就是说 $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$,其中 ω 为角频率,ε 为介电常数.对于水银,(在 RMKS 单位制中),$\sigma \cong 10^6$,$\varepsilon \cong 10^{-12}$,因此即使进入微波区,这一假定仍然相当好.即使对 $\sigma \cong 1$ 的弱电离气体,在位移电流变得重要以前,频率应该是 10^{12}Hz 量级.

这里所用的方法假定:波由变量的小扰动或小干扰组成.我们给控制方程一个扰动,线性化,并假设相位复矢量解.然后解决本征值问题和推导色散方程.我们可以假定,对于所有 x 方向传播的扰动都可以表达成 $e^{i(\omega t-kx)}$ 的形式.$i=\sqrt{-1}$.

气体中的平面波

忽略位移电流并假定流体初始处于静止状态,我们可以推导得到如下色散方程.参看图 11-6,假定外加磁场在 x 方向传播时具有分量 H_{0x} 和 H_{0y}.不考虑 H_{0z} 不会失去其普遍性,因为我们可以一直围绕 x 轴转动坐标系,始终使 $\boldsymbol{H}_0$ 处于 xy 平面内,因而 H_{0z} 始终为零.

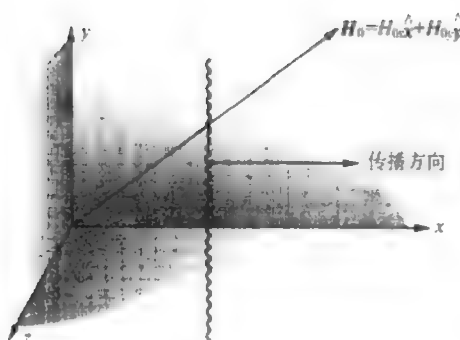


图 11-6　有外加磁场时平面波的传播

平面波,相位复矢量表示和色散方程的详细讨论见第十三章.

有关的方程为:三个运动方程,三个磁输运方程,连续方程,能量方程和物态方程——总共九个方程.我们用小写字母表示扰动磁场强度,扰动压强,扰动密度和扰动温度用上标一撇表示:

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{h}, \qquad \rho = \rho_0 + \rho'$$

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{V}_0 = 0),\ T = T_0 + T'$$

$$p = p_0 + p'$$

$\boldsymbol{V}$ 的分量为 u、v 和 w.

连续方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = 0$$

它变成

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') + \nabla \cdot [(\rho_0 + \rho')\boldsymbol{v}] = 0$$

一阶线性方程为

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

因此,代数形式(假定相位复矢量解 $\rho' = \rho'^* e^{i(\omega t - kx)}$ 和 $u = u^* e^{i(\omega t - kx)}$,其中 ρ'^* 和 u^* 为相位复矢量)为

$$u^* \rho k - \rho'^* \omega - u^* \rho_0 k = 0 \tag{11.41}$$

同样,我们能写出其余八个线性化方程的代数形式. 一阶方程变成

物态方程

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{T'}{T_0} + \frac{\rho'}{\rho_0} \tag{11.42}$$

运动方程

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{a})\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \left(\zeta + \frac{4}{3}\nu\rho_0\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu H_{0y}\frac{\partial h_y}{dx} \\
&(\mathrm{b})\ \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \nu\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu H_{0x}\frac{\partial h_y}{\partial x} \\
&(\mathrm{c})\ \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = \nu\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \mu H_{0x}\frac{\partial h_z}{\partial x}
\end{aligned} \tag{11.43}$$

能量方程(耗散为二阶)

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{\partial p'}{\partial t} + \kappa_T \nabla^2 T' \tag{11.44}$$

磁输运方程

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{a})\ \frac{\partial h_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 h_x}{\partial x^2} \\
&(\mathrm{b})\ \frac{\partial h_y}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 h_y}{\partial x^2} + H_{0x}\frac{\partial v}{\partial x} - H_{0x}\frac{\partial u}{\partial x} \\
&(\mathrm{c})\ \frac{\partial h_z}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} + H_{0x}\frac{\partial w}{\partial x}
\end{aligned} \tag{11.45}$$

现在我们能得到代数形式. 对于九个相位复矢量有九个代数方程. 然而,这些不是线性独立方程,相位复矢量系数行列式必定为零. 行列式为

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
 & h_x^* & h_z^* & w^* & u^* & v^* & h_y^* & p'^* & \rho'^* & T'^* \\
\hline
(12.45\mathrm{a}) & & & & & & & & & \\
(12.43\mathrm{c}) & & & & & & & & & \\
(12.45\mathrm{c}) & & 2\times 2 & & & 0 & & & & \\
(12.41) & & & & & & & & & \\
(12.43\mathrm{a}) & & & & & & & & & \\
(12.43\mathrm{b}) & 0 & & & & 6\times 6 & & & & \\
(12.45\mathrm{b}) & & & & & & & & & \\
(12.42) & & & & & & & & & \\
(12.44) & & & & & & & & &
\end{array} = 0 \tag{11.46}$$

有三个不耦合项. 第一项不重要,仅表示 $h_x = 0$. 2×2 行列表示两个横波,6×6 行列表示一组耦合的纵波和横波. 我们不详细讨论这些一般的波,而是研究一些特殊情况.

横波

2×2 行列可以写作为

$$\nu\eta k^4+[A_x^2+\mathrm{i}(\nu+\eta)\omega]k^2-\omega^2=0 \tag{11.47}$$

因为它是 k^2 的平方,所以表示两个横波.它们是由黏性耗散和磁耗散与阿尔夫文波耦合而形成.($\boldsymbol{A}$ 的 + 或 − 表示波向外或向内传播).A_x 是阿尔夫文速度的 x 分量$\sqrt{B_{0x}H_{0x}/\rho_0}$.如果 $A_x=0$,那末我们得到两个由下式给出的不耦合波:

$$(\eta k^2+\mathrm{i}\omega)(\nu k^2+\mathrm{i}\omega)=0 \tag{11.48}$$

(因为 k^2 是假设的)它表示纯黏性耗散和纯磁耗散.

如果 $\nu=\eta=0$(无耗散),那末我们到 $A_x^2k^2-\omega^2=0$,因此相速度 $\nu_p=\omega/(\mathrm{Re}k)$为阿尔夫文速度,即 $\nu_p=\pm A_x$.所以 k 为实数并且不发生耗散.

对于气体或液体,横波是相同的.

耦合纵波

方程(11.46)中的 6×6 行列以显式写出为

$$\left[\kappa_T\left\{\frac{1}{\rho_0}+\mathrm{i}\frac{\omega}{\rho_0 p_0}\left(\frac{4}{3}\nu\rho_0+\zeta\right)\right\}k^4-\left\{\frac{\omega^2\kappa_T}{p_0}-\mathrm{i}\omega c_p+\frac{\omega^2c_p}{a_0^2\rho_0}\left(\frac{4}{3}\nu\rho_0+\zeta\right)\right\}k^2-\mathrm{i}\frac{\omega^3c_p}{a_0^2}\right]$$
$$\cdot[\nu\eta k^4+\{A_x^2+\mathrm{i}(\nu+\eta)\omega\}k^2-\omega^2]-k^2A_y^2(\mathrm{i}\omega+\nu k^2)\left(\frac{\omega^2c_p}{a_0^2}-\frac{\mathrm{i}\omega\kappa_Tk^2}{p_0}\right)=0 \tag{11.49}$$

式中 $A_x=\sqrt{B_{0x}H_{0x}/\rho_0}$,$A_y=\sqrt{B_{0y}H_{0y}/\rho_0}$, $a_a=\sqrt{kRT_0}$为声速.

我们不讨论一般情况,只讨论一些特别感兴趣的特殊情况.

如果我们令磁场 $\boldsymbol{H}_0=0(A_y=A_y=0)$,那末我们得到黏性导热流体中的寻常声波.如果我们进一步令 $\nu=\zeta=\kappa_T=0$,我们得到普通的简单声波并且方程(11.49)简化为

$$a_0^2k^2-\omega^2=0$$

所以 $\nu_p=\pm a_0$,即寻常声速.

如果 $\nu=\eta=\kappa_T=\zeta=0$,那末没有耗散,我们得到"理想"磁声波.可以对这些波进行详细研究,而且它们在磁流体动力学中极为重要.我们注意到方程(11.49)可简化为两个因子,一个等于上一节中的阿尔夫文波,另一个是 k^2 的平方:

$$[(a_0^2k^2-\omega^2)(A_x^2k^2-\omega^2)-k^2A_y^2\omega^2](A_x^2k^2-\omega^2)=0 \tag{11.50}$$

k^2 的平方表达式的两个极代表两个纵波(磁声波),快波和慢波.相速度为

纵波
$$v_{p_{\text{fast}}}=\pm\left[\frac{1}{2}(A_x^2+A_y^2+a_0^2)+\sqrt{\frac{1}{4}(A_x^2+A_y^2+a_0^2)^2-a_0^2A_x^2}\right]^{1/2}$$
$$v_{p_{\text{slow}}}=\pm\left[\frac{1}{2}(A_x^2+A_y^2+a_0^2)-\sqrt{\frac{1}{4}(A_x^2+A_y^2+a_0^2)^2-a_0^2A_x^2}\right]^{1/2} \tag{11.51}$$

横波
$$v_p=\pm A_x$$

从相速度与相对于磁场传播方向之间的函数关系曲线可以看出这些波的物理特性.在图11-7中,我们给出三维极坐标中的相速度曲线.我们看出,一般情况下有三个波,传播方向垂直于 $\boldsymbol{H}_0$(因此 $H_{0x}=0$)时,仅有一个波,它是一个调制声波.

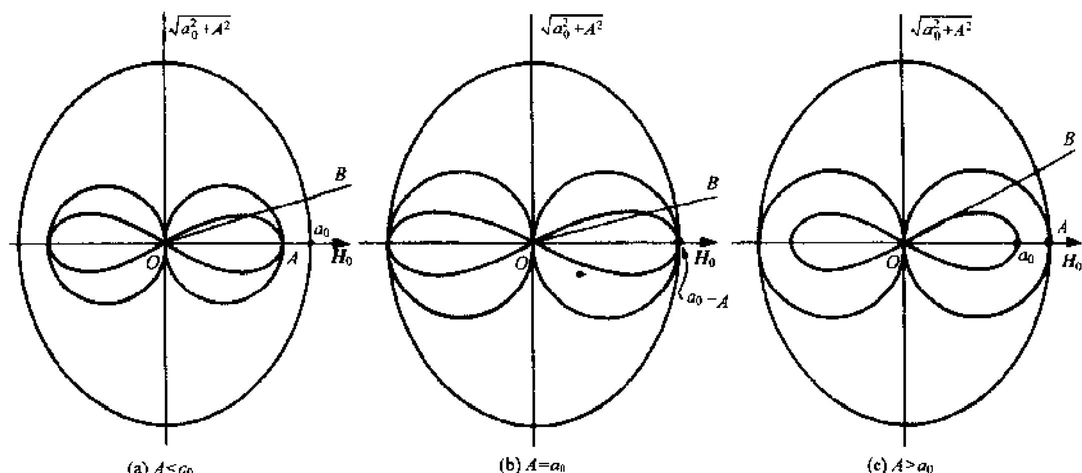


图 11-7　理想磁声波的相速度、径向矢量 OB 代表平面波以其方向相对于外加磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 传播的相速度. 应该想象图绕 $\boldsymbol{H}_0$ 转动以形成三维表面 $A^2=A_x^2+A_y^2$

从实践观点看,在液体金属中 A 一般比 a_0 小很多,在实验室中难以测量对声波性质的影响. 然而,对于天文学和行星尺度,情况就不同,这些波变得非常重要.

另一种感兴趣的图是理想磁声波的法向射线图. 称为弗利德里克图,表示于图 11-8. 这些图是从原点向外传播的平面波的包络面,因此代表单位时间内原点的脉冲在空间的传播. 在普通声学中这样的图是一个半径为 a_0 的球.(马赫锥是从超声速运动的原点发出的声脉冲的传播.)这些图可以根据图 11-7 构筑. 画出从原点开始的射线(如 OB)与相速度轨迹曲线交点的垂直线. 当 OB 以一个角度扫过一周时,我们得到一个垂直面. 当不同角度这样的射线扫过一周时,我们得到一组连续的这样的垂直面. 然后这些垂直面的包络面形成由原点脉冲所造成的声扰动面.

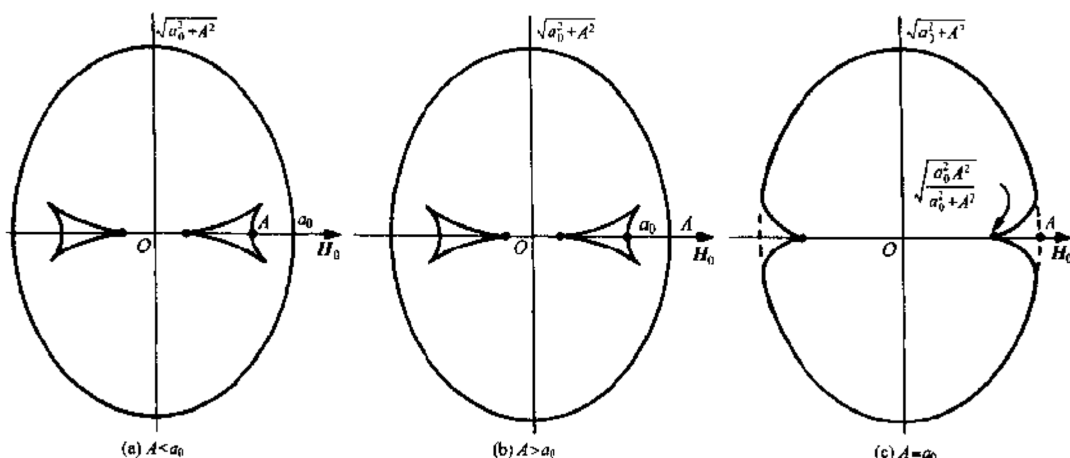


图 11-8　理想磁声波的法向射线或弗利德里克图. 原点的一个声脉冲在单位时间内发展成为这些面,它们应该绕 $\boldsymbol{H}_0$ 转动以形成三维表面

由运动源(如一飞机)产生的扰动面变得相当复杂,有两种(如一般流动中的亚声速和超声速)以上不同情况. 现在,根据运动物体相对于三个波的速度数值及相对于磁场的方位,可以有四个流动区域. 这里我们不讨论磁空气动力学,建议读者参阅有关文献.

磁激波

这里只讨论磁流体动力学激波的一个特殊情况，我们称它为磁流体动力学正激波.我们假定，激波两侧的外加磁场平行于激波前沿，速度可以倾斜于激波前沿.因此，我们只考虑正交于激波前沿的速度分量.磁流体动力学正激波是一般流体力学斜激波的延伸.在这里我们不讨论更为一般的任意磁场的情况.

我们的分析在激波参考系中进行，并假定在所有参考系中 $\boldsymbol{B}$ 都相同.参看图 11-9，我们可以写出以下激波前后的守恒方程.

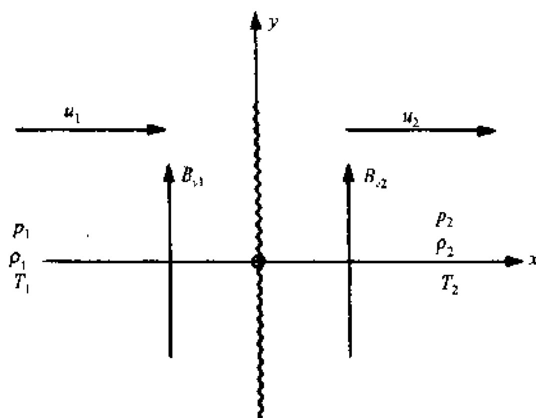


图 11-9　磁流体动力学正激波.我们选取坐标系的方位使 $B_{z1}=0$ 不失去通用性. B_{z2} 必须等于 0 以满足磁输运

连续方程

$$[\rho u]_1^2=0$$

动量方程

$$\left[\rho u^2+p+\frac{1}{2\mu}B_y^2\right]_1^2=0$$

磁输运方程

$$[uB_y]_1^2=0,\quad B_{z1}=B_{z2}=0$$

而且速度的 y 和 z 分量 v, w 必须连续.

能量方程

$$\left[\frac{p}{\rho}\left(\frac{k}{k-1}\right)-\frac{u^2}{2}+\frac{B_y^2}{\rho\mu}\right]_1^2=0$$

符号$[\;]_1^2$ 用以表示变量的跃变条件.即$[A]_1^2=A_2-A_1$，其中 A 为任意量.以上这四个方程可以完全地描述激波，类似于兰金-许贡纽方程.

激波中存在一个影响 B_y 变化的流而.

求解后，我们得到静止空气中的激波速度 a_S(与图 11-9 中的 u_1 相同)，为

$$a_S=\frac{2}{k+1}\cdot\frac{a_1^2+A_1^2[1+(1-k/2)(\rho_2/\rho_1-1)]}{\rho_1/\rho_2-(k-1)/(k+1)}\tag{11.52}$$

式中 a_1 为上游声速，A_1 为上游阿尔夫文速度$\sqrt{B_{y1}^2/\mu\rho_1}$.当 $A_1\to 0$ 时，我们得到一般的气体动力学激波.由于磁场存在，激波速度增加.当强度减小时，$\rho_2\rho_1\to 1$，$a_S^2=a_1^2+A_1^2$，给出了垂直磁场中的磁声速度.

压强跃变$[p]_1^2=p_2-p_1$ 由下式给出：

$$p_2 - p_1 = a_S^2\rho_1(1 - \rho_1/\rho_2) + \frac{B_{y1}^2}{2\mu}(1 - \rho_2^2/\rho_1^2) \tag{11.53}$$

以及磁马赫数 $M_t^2 = a_S^2/(a_1^2 + A_1^2)$ 可以表示为

$$M_t^2 = \frac{2}{k+1} \cdot \frac{1 + [A_1^2/(a_1^2 + A_1^2)](1 - k/2)(\rho_2/\rho_1 - 1)}{\rho_1/\rho_2 - (k-1)/(k+1)} \tag{11.54}$$

当 $\rho_2/\rho_1 \to 1$ 时，$M_{t1} \to 1$. $M_{t1} < 1$ 时，不产生激波；$M_{t1} > 1$ 并且 $a_S^2 > a_1^2$ 时，能产生激波. $a_S^2 < a_1^2$ 时，在任何 A_1 值时都不产生激波. 因此，当场强增加超过某一临界值时，不会产生激波.

对于一般的倾斜磁场，情况更加复杂，会出现激波的多重性和不连续性.

11.8 可压缩流　磁气体动力学管流

这一节，我们要讨论准一维可压缩管流，它对磁流体动力学发电机和推进系统研究十分重要. 如图 11-10 所示，我们假定管道截面积只在 x 方向上发生变化，电极为互相平行的理想导体，并组成管道相对的两侧壁面. 管道的其他壁面为绝缘体. 速度分量 v 和 w 大大小于 u，并且诱导磁场的影响可以忽略.

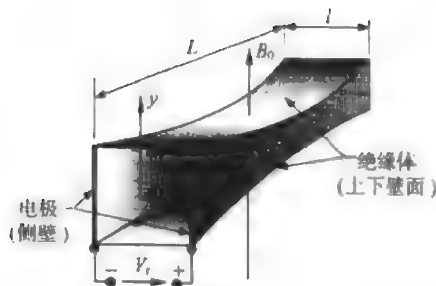


图 11-10　一维可压缩槽道流

端电势 V_t 与电场 E_z（E_y 和 E_x 为零）的关系由

$$E_z = -V_t/l$$

给出，因此 E_z 在整个槽道内为常数，以及 $J_z = \sigma(E_z + uB_0)$ 仅是 x 的函数（因为 u 是 x 的函数）. 我们当然还可以令 l 随 x 变化，因而 E_z 是 x 的函数. 但是在这里我们仅限于讨论平行电极的情况.

在开路条件下，总外电流 I 为零，但是 $\mathscr{I}(x)$（单位长度的电流密度）不必等于零，电流可以在槽道内环流. 不知道函数 $u(x)$，我们不能确定 $V_{t_{oc}}$. 然而，就局部（在给定的 x 值下）而言，局部开路条件（$J_z = 0$）由 $E_z = -uB_0$ 给出. 在局部短路条件下，$E_z = 0$. 于是，如果 $-uB_0 < E_z < 0$，槽道给定的局部作为发电机运行. 在整个槽道作为发电机运行时，在任何 x 值下都必须满足这一条件. 关于 E_z 的符号，我们可以指出，当槽道作泵或流量计用时，E_z 必须为负. 我们仅研究负 E_z 的情况.

基本一维流动

槽道流动的基本方程可以由沿槽道截面平均微分方程得到. 我们假定定常流动，σ 为常数标量，理想气体，在槽道截面上没有变化，以及绝热流动.

连续方程
$$\rho u A = m(\text{常数}) \tag{11.55}$$

运动方程
$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \sigma(E_z + uB_0)B_0 \tag{11.56}$$

能量方程
$$\rho u\left[c_p \frac{dT}{dx} + u\frac{du}{dx}\right] = \sigma(E_z + uB_0)E_z \tag{11.57}$$

物态方程
$$p = \rho RT \tag{11.58}$$

这里 A 为槽道的截面积.

对于一般的截面积变化 $A(x)$ 情况，这些方程不能直接求解，但可以获得有用的一次积分. 以上方程经过适当的归并，我们得到

$$\frac{du}{dx} = \frac{(u/A)(dA/dx) - (\sigma B_0^2/p)(u - u_3)(u - u_1)}{M^2 - 1} \tag{11.59}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{(M^2-1)}\left|\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\frac{M}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} - \left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\frac{\sigma B_0^2}{ap}(u-u_3)(u-u_2)\right| \tag{11.60}$$

式中临界速度 u_1，u_2 和 u_3 定义为

$$u_1 = -\frac{k-1}{k}\cdot\frac{E_z}{B_0} = \frac{k-1}{k}u_3,\quad u_2 = \frac{1+kM^2}{2+(k-1)M^2}u_1,\quad u_3 = -\frac{E_z}{B_0} = \frac{V_t}{B_0 l} \tag{11.61}$$

以及 M 为局部马赫数.

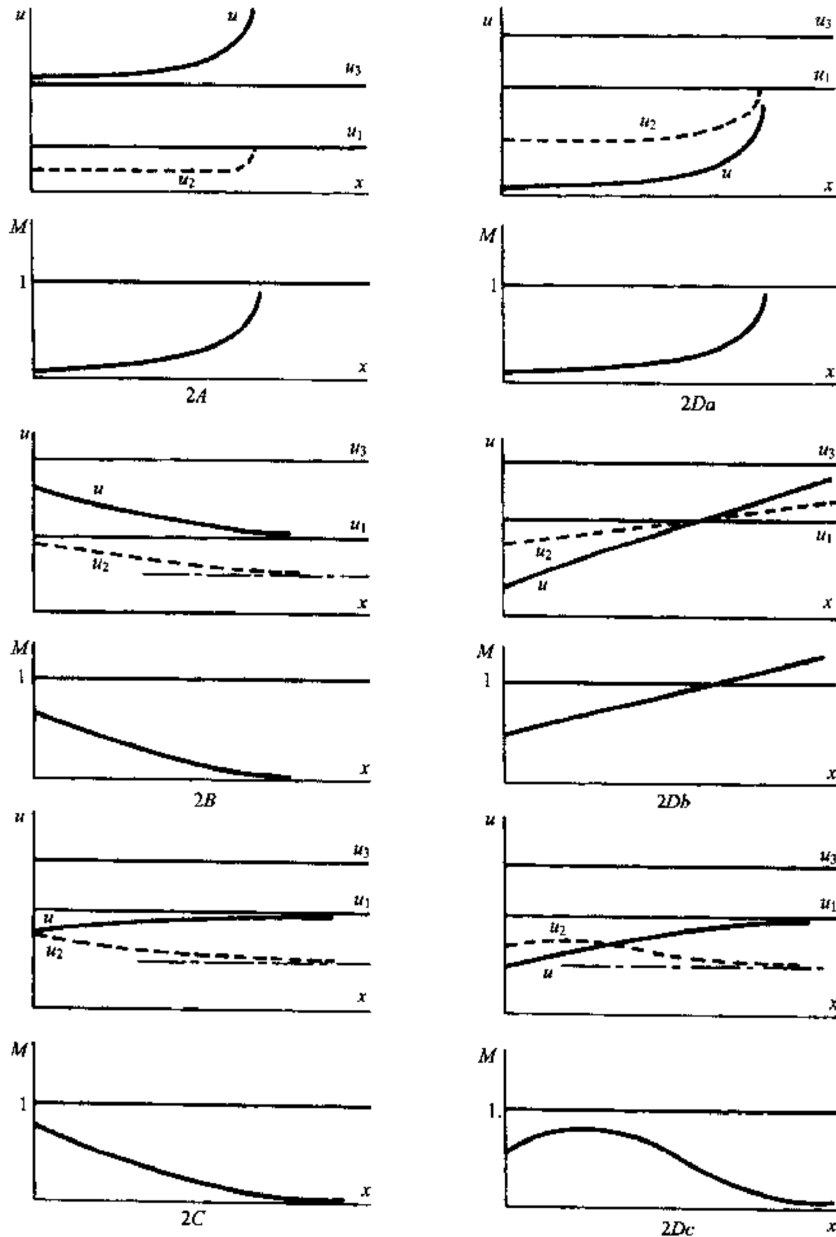


图 11-11　不同亚声速初始条件下沿等截面槽道 u 和 M 的定性曲线。2A：$u_2<u_1<u_3<u_0$　2B：$u_2<u_1<u_0<u_3$．2C：$u_2<u_0<u_1<u_3$．2Da，2Db，2Dc：$u_0<u_2<u_1<u_3$

现在电磁场与流体的相互作用的总效果除力 $J\times B$ 外，还有焦耳热.因此，净作用可以根据方程(11.59)和(11.60)确定.对于 $u<u_3$，仅仅体力使流动加速；对于 $u>u_3$，仅仅体力使流动减速.速度 u_1 是体力和焦耳热恰好互相抵消时的速度.因此，净作用为：如果 $M>1$，u 在 u_3 和 u_1 之间，流动加速；u 在这一范围之外时，流动减速.如果 $M<1$，则情况相反.由方程(11.60)可以看出对 M 的影响.如果 $M>1$，u 在 u_2 和 u_3 之间，M 随 x 而增大；u 在这一范围之外，M 随 x 而减小.如果 $M<1$，则情况相反.

当在 $E_z<0$ 下运行和 u_0($x=0$ 处的进口速度)值不同时，我们可以定量地绘制沿管道 u 和 M 变化的特性曲线.这表示在图 11-11 和 11-12 中.对于作为发电机运行，$u>u_3$，由图我们可以看出，只有在情况 1A 和 2A 中 $u>u_3$.在 2A 中 u 始终大于 u_3，在 1A 中，只有管道长度的一部分范围之内(见 1Ab)有可能作为发电机运行.然而我们必须记住，$u>u_3$ 是对于发电

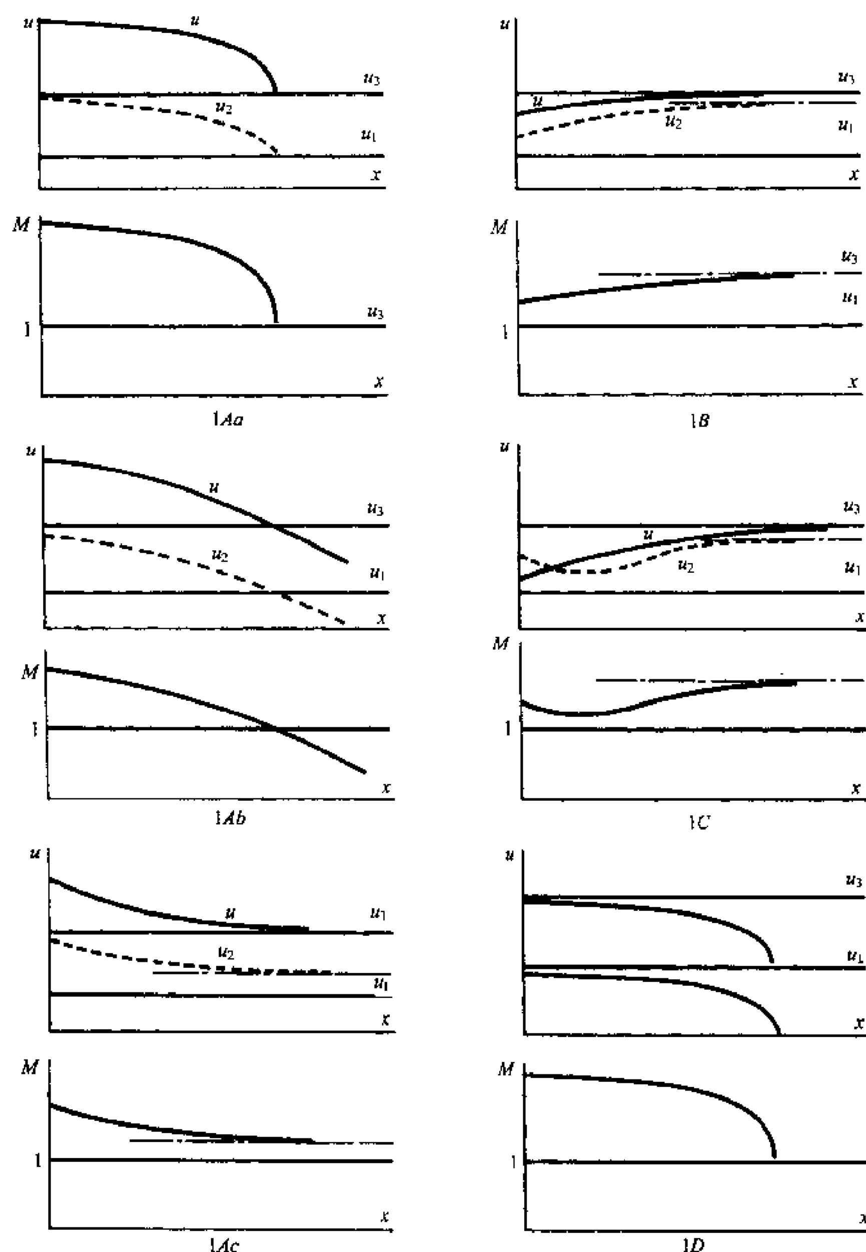


图 11-12 不同超声速初始条件下沿等截面槽道 u 和 M 的定性曲线. 1Aa, 1Ab, 1Ac：当 $u_1<u_2<u_3<u_0$ 时的三种可能性. 1B：$u_1<u_2<u_0<u_3$. 1C：$u_1<u_0<u_2<u_3$. 1D：$u_0<u_1<u_2<u_3$

机运行的局部要求,管道总的特性($V_{t_{oc}}^*$, I_{SC}和R_i)只有在知道了 $u(x)$以后才能计算.

发电机运行

这里我们不准备讨论基本方程的一般解,只讨论一个非常简单而实践中又重要的问题,定速发电机.这时 $A(x)$必须以特殊的方式变化以使 $u(x)$为一常数.

借助在基本方程中强加一个恒定的速度 u_0,我们可以推导得到以下关系式:

$$p_0 - p = xB_0^2\sigma(u_0 - u_3), \quad T/T_0 = (p/p_0)^{(k-1)u_3/ku_0}, \quad A/A_0 = (p_0/p)^{1-(k-1)u_3/ku_0} \tag{11.62}$$

因而总电流 I 为

$$I = \int_0^L \sigma(-V_t + u_0 B_0)\frac{A}{l}\mathrm{d}x \tag{11.63}$$

所以对于给定的 V_t(或 u_3),总输出功率 P 为 IV_t,积分后得到

$$P = \frac{A_0 p_0 k u_0}{k-1}\left[1 - \left\{1 - \frac{B_0\sigma}{p_0}(u_0 - u_3)L\right\}^{(k-1)u_3/ku_0}\right] \tag{11.64}$$

方程(11.62)可以(在固定的 u_0 下)直接对 u_3 最佳化.这里我们不作进一步的探讨,因为在任意边界条件下运动方程的积分相当复杂.

从实践观点看,磁流体动力学发电机分析稍复杂了一点.电导率是一个张量(引起霍尔电流)而且随温度而变化.然而,这里提出的一维槽道流动的原理即使对更复杂的装置也是相同的.

参考文献

1. Chen, F. F., *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, 2nd ed., Vol. I, Plenum Press, 1984.
2. Cowling, T. G., *Magnetohydrodynamics*, Interscience, 1957.
3. Delcroix, J. L., *Plasma Physics*, John Wiley, 1965.
4. Delcroix, J. L., *Plasma Waves*, Interscience Publisher, 1963.
5. Hughes, W. F., and Young, F. J., *The Electromagnetodynamics of Fluids*, John Wiley, 1966. (Reprinted by Krieger Publishing Co., 1989.)
6. Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, 2nd ed., John Wiley, 1975.
7. Jeffrey, A., *Magnetohydrodynamics*, Interscience (John Wiley), Oliver and Boyd, 1966.
8. Kulikovskiy, A. G., and Lyubimov, G. A., *Magnetohydrodynamics* (translated from the Russian), Addison. Wesley, 1965.
9. Landau, L. D., and Lifschitz, E. M., *Electrodynamics of Continuous Media*, Addison-Wesley, 1960.
10. Shercliff, A., *A Text of Magnetohydrodynamics*, Pergamon Press, 1965.
11. Sutton, G. W., and Sherman, A., *Engineering Magnetohydrodynamics*, McGraw-Hill, 1965.

对目前研究读者可参阅以下杂志: *Journals of Fluid Mechanics* and *Physics of Fluids*.

以及下列出版物: *The Proceedings of Engineering Aspects of MHD*, Published annually, jointly by ASME, IEEE, and AIAA. *The Proceedings of the Beer-Sheva International Seminar on MHD Flows and Turbulence*. Published periodically by AIAA in the series *Progress in Astronautics and Aeronautics*.

例　题

11.1　图 11-13 是一个法拉第圆盘发电机.一个导电薄圆盘在轴向均匀定常磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中以均匀角速度 ω 转动.理想导体轴的半径为 a,圆盘周边的滑动接触器连接至一电压表.电压表读得的开路电压为多少?

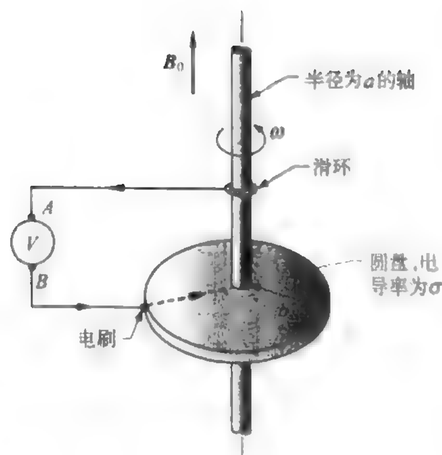


图 11-13

解 ☞　因为运动定常,没有涡电流,电动势与端电压相等.因此

$$V_{AB} = -\int_a^b E_r \cdot \mathrm{d}r$$

以及在开路条件下,$J_r = 0 = \sigma(E_r + r\omega B_0)$.因此

$$V_{AB} = \int_a^b r\omega B_0 \mathrm{d}r = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\omega B_0$$

换句话说

$$\mathrm{emf} = V_{BA} = \oint \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} - \int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

取通过连接导线,圆盘和轴的积分路径,我们得到的只是圆盘内 $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}$ 的贡献,为

$$V_{AB} = -V_{BA} = \int_a^b (r\omega) B_0 \mathrm{d}r = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\omega B_0$$

与以上的结果相同.

11.2　在槽道壁面上诱导磁场的边界条件是什么?

解 ☞　考虑矩形等截面槽道内充分发展的流动.靠近壁面的流动区域如图 11-14 所示.在理想导体做成的壁面处 $\sigma = \infty$,切向电场 $E_y = 0$.而且壁面处流体的速度也为零.因而在壁面处 $J_r = \sigma(E_y + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}) = 0$.但是根据 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$,我们有 $\partial H_x / \partial z = 0$,其中 z 为垂直于壁面的坐标,流动沿 x 方向.对于绝缘壁面,壁面处 $J_z = 0$,因此我们得到 $\partial H_x / \partial y = 0$.所以我们得出结论,在理想导体做成的壁面处

$$\partial H_x / \partial n = 0$$

以及在绝缘体做成的壁面处

$$\partial H_x / \partial t = 0$$

式中 t 和 n 为壁面的切向和法向,两者都与流动方向 x 垂直.

在有限电导率的壁面,可以推导得到更加复杂的关系.对于详细情况,读者可以参阅参考文献 5.

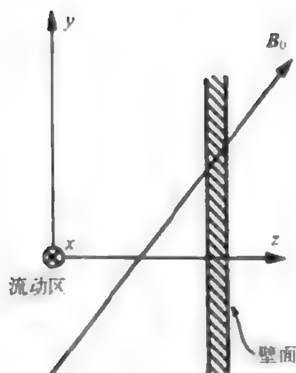


图 11-14

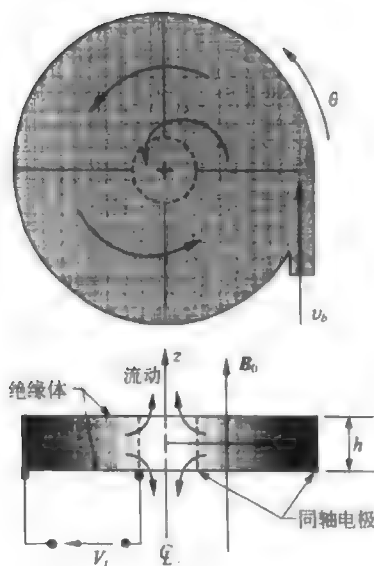


图 11-15

11.3 计算图 11-15 所示可压缩涡旋发电机的端部特性.

解 m 为容积流率,v_b 为进口切向速度.B_0 为定长,均匀,沿 z 轴的外加磁场.应用往形屏式电极.我们假定:$v \gg u$(其中 v 为速度在 θ 方向的分量,u 为速度的径向分量),随 z 不发生变化,而且 $R_m \ll 1$(诱导磁场可以忽略).在 θ 方向上运动方程为

$$\rho u(\partial v/\partial r + v/r) = -J_r B_0$$
$$= -\sigma(E_r + vB_0)B_0$$

因此,根据 $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$,$J_r = I/2\pi rh$ 和 $m = 2\pi u\rho rh$,所以以上方程变成

$$\frac{m}{2\pi rh}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} + \frac{v}{r}\right) = -\frac{IB_0}{2\pi rh}$$

积分后得到

$$\frac{v}{v_b} = \frac{b}{r} + \frac{IB_0 r}{2mv_b}\left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right)$$

V_t 由

$$V_t = -\int_a^b E_r \mathrm{d}r$$

得到,式中 E_r 根据

$$I = J_r \cdot 2\pi rh = \sigma(E_r + vB_0)2\pi rh$$

由 I 得到.在积分和令 $I=0$ 后我们发现

$$V_{t_{\alpha}} = v_b bB_0 \ln(b/a)$$

以及令 $V_t = 0$ 后

$$I_{SC} = 2\pi h\sigma v_b bB_0\left[1 - \frac{N}{2}\left(1 - \frac{b^2/a^2 - 1}{2(b/a)^2\ln(b/a)}\right)\right]^{-1}$$

式中 N 是相互作用参数,为

$$N = 2\pi\sigma B_0^2 b^2 h/m$$

因为流动向内(u 为负)和 r 向外为正,m 为负.

补　充　习　题

11.4 在什么条件下体力 $\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$ 无旋?

11.5 如果 $\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$ 无旋,你能描述流形吗?证明在二维不可压缩流动中,$\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$ 无旋时,速度分布与势流相同.

11.6 在上一习题中,对 $\boldsymbol{B}_0$ 有什么限制才能使流动为势流?$\boldsymbol{B}_0$ 的方位是什么?

11.7 讨论哈特曼问题中 E_z 和 I 的符号.在开路条件下,$V_{t_{\alpha}}$ 的符号是什么?

11.8 证明哈特曼问题中整个槽道内 $\partial p/\partial x$ 为常数.

11.9 求解哈特曼问题中槽道截面上压强的变化($\partial p/\partial y \neq 0$).

11.10 证明速度 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{B}_0$ 共面的二维流动中,$\nabla^2\phi$ 正比于 $\nabla \times V$ 的分量,旋度矢量.ϕ 为电势.

11.11 一导弹在有磁场存在时以速度 $\boldsymbol{V}_0$ 在电离层中飞行.在无限远处相对于导弹的 $\boldsymbol{E}$ 的边界条件是什么?

11.12 证明:对于导电液体如果 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 和 $\mu = \mu_0$,那末在任何参考系中能将本构方程写为 $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$.

11.13 证明:如果 ε 和 μ 两者分别为 ε_0 和 μ_0,在任何参考系中写出以上方程都准确.(然而在磁流体动力学近似中,在任何参考系中准确的是 $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$.)

11.14 推导在传播方向上以速度 V_0 运动的流体中横波的传播方程.流体导电和有外加磁场.

11.15 为什么在哈特曼问题中不需要磁输运方程?你能用它以不同方式做这类习题吗?

11.16 如果用磁输运方程代替麦克斯韦方程和欧姆定律,表达式中如何体现外电路的作用?提示:证明诱导磁场的边界条件如何取决于外电路.

11.17 求解磁流体动力学库埃特流问题.(它是上平板在流动方向上以速度 V_0 运动的哈特曼问题)

11.18 假设哈特曼问题的上下绝缘壁面的电导率为有限值.证明:这些壁面仅起并联的外电阻作用并对解没有影响.

11.19 在以上习题中对诱导磁场有何影响?

11.20 在运动磁场中会有这样的现象吗?

11.21 计算习题11.1中法拉第发电机的 I_{SC} 和 R_i.

11.22 在什么条件下习题11.2中槽道壁面处 $H_x=0$?

11.23 求解形式为 $B_r=B_0/r$ 的径向磁场涡旋发电机.(见习题11.3)

11.24 习题11.23合适的能量方程是什么?它能积分得到 $T(r)$ 吗? $p(r)$ 是什么?提示:假定 $v^2/2\gg u^2/2$.

第十一章符号表

a = 声速
a_S = 激波速度
A = 阿尔夫文速度;面积
$\boldsymbol{B}$ = 诱导磁场
$\boldsymbol{B}_0$ = 外加磁场
c = 光速
c_p = 定压比热
$\boldsymbol{D}$ = 电位移场
$\boldsymbol{E}$ = 电场
$\boldsymbol{H}$ = 磁场
$\mathscr{I}$ = 单位通道长度电流
I = 装置总电流
I_{SC} = 短路电流
$\boldsymbol{J}$ = 电流密度
k = 比热比, c_p/c_v;传播常数
L = 特征长度
m = 质量流率
$\boldsymbol{M}$ = 磁化强度矢量
M = 哈特曼数
M_m = 磁马赫数
Re = 雷诺数
N = 相互作用参数
p = 压强
P = 功率
$\boldsymbol{P}$ = 极化强度矢量
P_m = 磁普朗特数
R_m = 磁雷诺数
T_{ij} = 电磁应力张量
u = x 方向上的速度分量,内能
v = y 方向上的速度分量
v_p = 相速度
v = 容积
$\boldsymbol{V}$ = 速度矢量
V_t = 路端电势
$V_{t_{oc}}$ = 开路端电势
w = z 方向上的速度分量
$\beta=1/\sqrt{1-V^2/c^2}$
ε = 介电常数
ε_0 = 真空中的介电常数
ζ = 第二黏性系数
η = 磁耗散率
κ = 相对介电常数
κ_m = 相对磁介电常数
κ_T = 热导率
μ = 磁导率
μ_0 = 真空中的磁导率
μ_f = 流体的黏性系数
ν = 运动黏性系数
ρ = 流体密度
ρ_e = 电荷密度
σ = 电导率
τ = 机械应力张量
Φ = 耗散函数
ϕ = 电势
ψ = 重力势
ω = 频率

第十二章 非牛顿流体

12.1 引言

有一些流体不满足牛顿流体的应力和应变率之间的关系(3.52).这类流体我们通称为非牛顿流体.很多常见的流体都是非牛顿流体,如油漆,各种聚合物的溶液,苹果酱和番茄酱一类的食品,水在油中或油在水中形成的乳浊液,各种固体颗粒或纤维在液体中形成的悬浮液,以及纸浆、水煤浆和刷墙用的泥浆等等.教科书和课堂中未讨论到非牛顿流体决不是因为它缺乏应用.虽然非牛顿流体的性质已使它不能再用牛顿流体中发展起来的方法来作出简明精确的分析,但非牛顿流体的流动具有许多很有趣,且很有用,甚至是很鼓舞人的特性.比如在对油井作裂缝扩展作业时,发现有一种材料,把它加入水中可以使液体变得很稠,以至于砂子,玻璃和金属球都可以悬浮起来,但把这种液体通过管子快速注入井内时,其摩擦阻力还不到水的一半.在一个典型的裂缝扩展作业中,一分钟就可以让 100 桶(4200gal.)的这种液体通过内径为 3in 的几千 ft 长的管子注入井内.(油井和气井的裂缝扩展作业是增加油井产量的一种工艺.在生产区,开始时都有一些水平的裂缝,将流体高压注入井内,可以使裂缝扩大并延伸,同时注入的砂子和金属球作为支撑使裂缝保持张开状态.为了减少流体在断裂岩石裂缝中扩散造成的损失,流体必须快速注人.)

若煤粉或碎煤在水煤浆中所占的体积分数在 80%以上,这种水煤浆具有非牛顿流体的性质,通过长的管子时所需的功率比通过纯水时小.

12.2 非牛顿流体的特性和分类

概述

在 3.3 节中已经指出,牛顿流体的剪应力 τ 和剪应变率 $\dot{\gamma}$①之间满足线性关系

$$\tau = \mu\dot{\gamma} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \tag{12.1}$$

其中 μ 是黏性系数.或反过来说,剪应变率和应力之间有线性关系.

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\mu}\tau \tag{12.2}$$

下面我们把不满足这个线性关系的非牛顿流体分成三类,并分别进行讨论:

1. 最简单的是无时效的非牛顿流体,其剪应变率是剪应力的非线性单值函数.
2. 有时效的非牛顿流体,其应力-应变率关系更加复杂.在这种流体中,剪应变不是剪应力的单值函数,剪应变与剪应力作用的时间有关,还与流体先前发生的剪应变历史有关.
3. 黏弹性流体.由于剪应变或剪应变率和剪应力之间的关系特殊,黏弹性流体中有一部分变形能量能够像弹性体中一样得到恢复,而真正的黏性流体中,所有的变形能量都是被耗散掉的.

① 在第三章中,我们用符号 γ_{ij} 表示剪应变率。在非牛顿流体中,需同时引进剪应变和剪应变率,我们用 γ 表示剪应变,用 $\dot{\gamma}$ 表示剪应变率.

无时效的流体

无时效的非牛顿流体，其剪应变率为

$$\dot{\gamma} = f(\tau) \tag{12.3}$$

牛顿流体是上述非牛顿流体的一个特殊情况，其 $f(\tau)$是线性函数. 因此这类非牛顿流体也称为是纯黏性的非牛顿流体. 我们遇到的绝大多数非牛顿流体都属于这种类型. 有一些不属于这类流体的流动，如有时效的流体在管内作定常流动或定常库埃特流动时，也可以用无时效的流体来近似.

无时效的非牛顿流体通常又可分为如图 12-1 所示的三种不同类型. 它们分别是

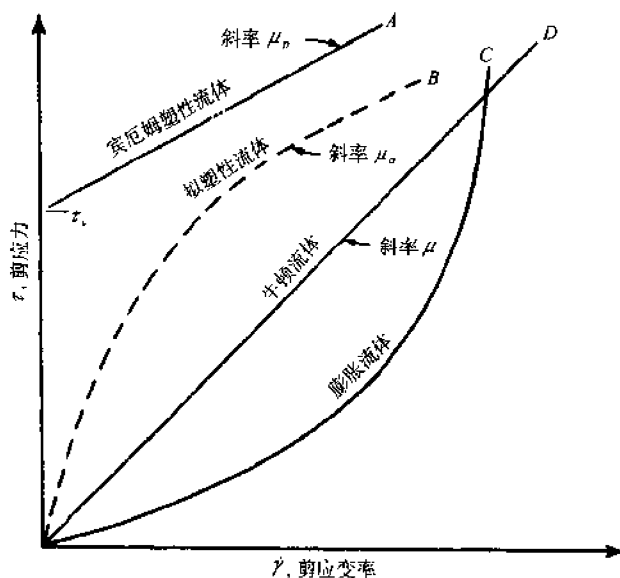


图 12-1　非牛顿流体的典型应力应变关系

1. 宾厄姆塑性流体，曲线 A；
2. 拟塑性流体，曲线 B；
3. 膨胀流体，曲线 C.

牛顿流体用直线 D 表示.

宾厄姆塑性流体

宾厄姆塑性流体在应变率等于零时就有一定的屈服应力，紧接着剪应力和剪应变率之间呈线性变化关系. 这种流体的特性可以用两个常数表示；一个是屈服应力 τ_y，表示流体开始运动必需要超过的应力；另一个是塑性黏性系数 μ_p，它是图 12-1 中曲线 A 直线部分的斜率. 宾厄姆塑性流体的应力-应变率关系为

$$\tau = \tau_y + \mu_p \dot{\gamma} \tag{12.4}$$

我们发现很多实际流体，如浆体、油漆一类的乳浊液、固体颗粒在液体中形成的悬浮液等，都可以用宾厄姆塑性流体的应力-应变率关系近似. 下面要讨论的一个重要例子是钻探用的泥浆，它主要由水和悬浮于其中的黏土组成.

由于剪应力和剪应变率之间呈直线变化关系，宾厄姆塑性流体的分析还是比较方便的.

拟塑性流体

拟塑性流体(图 12-1 中的曲线 B)和膨胀流体(曲线 C)都没有屈服应力. 拟塑性流体还有

一个特征是剪应力随剪应变率变化曲线的斜率逐渐减小.把斜率定义为表观黏性系数

$$\mu_a = \tau/\dot{\gamma} \tag{12.5}$$

在实际流体中,当应变率很大时,表观黏性系数逐渐变成常数且等于 μ_∞,这时剪应力和剪应变率之间又呈线性关系.

为了表征拟塑性流体,人们提出了很多经验公式.最简单的是 Ostwald 提出的幂律关系,其形式为

$$\tau = k\dot{\gamma}^n \qquad 其中 \qquad n < 1 \tag{12.6}$$

对给定的流体,k 和 n 都是常数.k 是流体黏度的度量,指数 n 是流体偏离牛顿流体的度量.对于牛顿流体,$n=1$,$k=\mu$,即为流体的黏性系数.

定义表观黏性系数

$$\mu_a = \tau/\dot{\gamma} \tag{12.7}$$

从方程(12.6)可得

$$\mu_a = k\dot{\gamma}^{(n-1)} \tag{12.8}$$

我们注意到,当剪应变率等于零时,表观黏性系数趋于无穷大.这是幂律模型的一个缺点;第二个缺点是实际流体在整个流动范围内 n 不是常数;还有一个缺点是常数 k 的量纲与 n 值有关.我们已经提到过,剪应变率很大时 n 的值接近于 1(即牛顿流体).尽管存在上述种种缺点,幂律模型因为简单仍然很受欢迎,尤其很适合对库埃特流,管内流动和槽道流动的分析.

为了消除幂律模型的缺点,人们还提出了其他的经验公式,如

$$\text{Prandtl:}\ \tau = A\arcsin(\dot{\gamma}/C) \tag{12.9}$$

$$\text{Eyring:}\ \tau = \dot{\gamma}/B + C\sin(\tau/A) \tag{12.10}$$

$$\text{Powell-Eyring:}\ \tau = A\dot{\gamma} + B\,\text{arsh}C\dot{\gamma} \tag{12.11}$$

$$\text{Williamson:}\ \tau = A\dot{\gamma}/(B+\dot{\gamma}) + \mu_\infty\dot{\gamma} \tag{12.12}$$

其中 A、B 和 C 都是常数(对不同的模型其值不同).

采用后四个模型进行分析,其过程比采用幂律模型要复杂得多,同时幂律模型在很多工程应用中也很合适,下面在讨论拟塑性流体时,我们仅限采用幂律模型.对于幂律模型不适用的流体,计算程序中采用该流体的实验数据也比采用其他经验公式更有效.

膨胀流体

膨胀流体和拟塑性流体相同,两者都没有屈服应力,和拟塑性流体不同的是,膨胀流体的表观黏性系数随剪应变率增加而增大.实际中膨胀流体比拟塑性流体少得多.和拟塑性流体一样,膨胀流体的剪应力-剪应变关系也可以用幂函数近似,只是它的指数 n 大于 1.

幂律流体的剪应力-剪应变关系可以用图线绘出,最简单的是用双对数坐标(如图 12-2).对方程(12.6)的两边求对数,得

$$\log\tau = \log k + n\log\dot{\gamma} \tag{12.13}$$

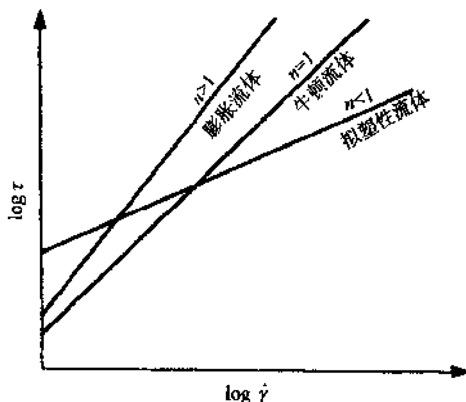


图 12-2　幂律流体的对数-对数曲线

这是一个直线的方程,其斜率等于 n,在 $\log\dot{\gamma}=0$ 或 $\dot{\gamma}=1$ 处的截距为 $\log k$,是一个常数.牛顿

流体的 $n=1$,恰恰是幂律流体的一个特殊情况.

有时效的流体

有一些流体比上一节讨论的流体还复杂,其表观黏性系数不仅与剪应变率有关,还与剪应变持续时间长短有关.这类流体又可以细分成触变流体和触稠流体两种.当流体发生应变时,触变流体的剪应力随时间的增长而减小,触稠流体的剪应力随时间的增长而增大.印刷用油墨是触变流体的常见的例子,在用于印刷之前,通常需要将辊筒滚动几次.

触变流体

触变流体的表观黏性系数除了和剪应变率有关外,还与剪应变持续的时间长短有关.当流体从静止开始变形时,它在分子尺度上破碎,但是随着时间的推移,它不断发生结构重组,最后达到平衡,即破碎率等于结构重组率.如果回到静止状态,流体继续缓慢重组,最后回到初始状态.因此触变过程是可逆的.

图 12-3 示出触变流体发生变形和已经静止下来以后,应力-应变率关系随时间的变化情况.图 12-3 的初始曲线似乎像牛顿流体,但实际上是非牛顿流体.

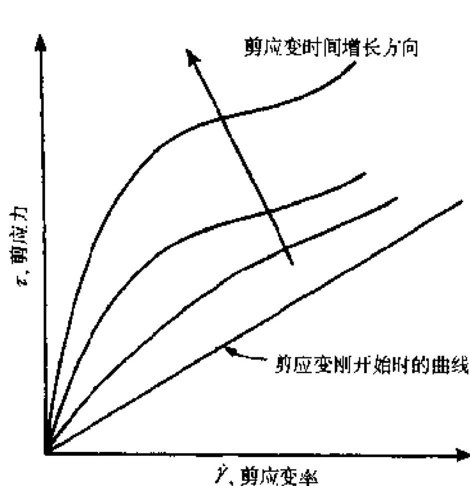


图 12-3 触变流体不同时刻的应变

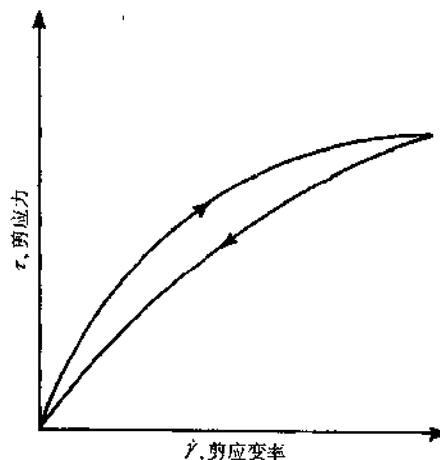


图 12-4 触变流体磁滞环线

若触变流体的剪应变率开始时不断增加,然后再不断减小,则我们可得一条和磁滞环线类似的曲线.图 12-4 给出了拟塑性类型的触变流体的这类曲线.剪应变率减小时的表观黏性系数比增加时的黏性系数小.

有一些宾厄姆塑性材料的特性起初和触变流体类似.但当应变率很大时,这个特性消失,在结构重组以前的特性就像是真正的液体.这个特性示子图 12-5(a).但是有一些材料,称为类固体,应变消除以后仍呈现出有屈服应力,尽管屈服应力的值不断减少,如图 12-5(b)所示.一般说,类固体恢复到初始时的屈服强度需要很长的时间.

触稠流体

在触稠流体中,剪应变率会导致分子状结构的形成,这个特性正好和触变流体相反.搅动蛋清产生泡沫并变稠是剪应变生成结构的一个简单例子,虽然蛋清可能不是真正的触稠流体.剪应变率很大时,很多材料的触稠特性消失,甚至具有触变流体的特性.

黏弹性流体

黏弹性材料同时具备弹性和黏性的特点.最简单的黏弹性流体是,黏性部分满足牛顿流体

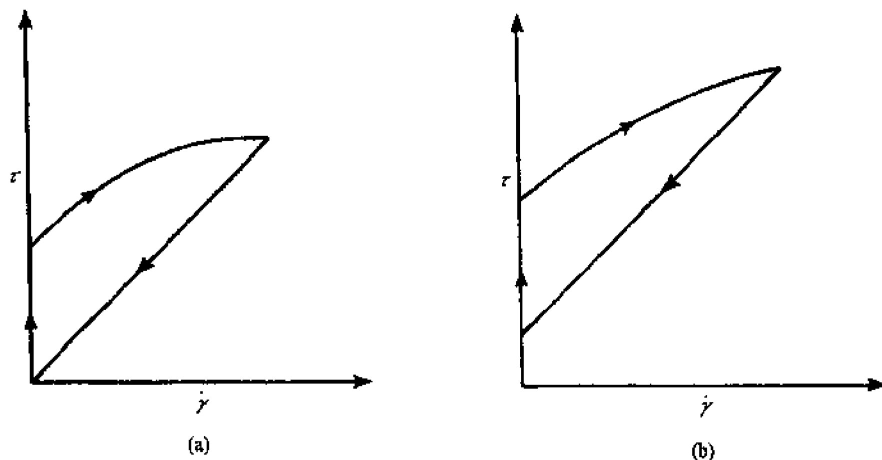


图 12-5　(a) 真正的触变宾厄姆流体；(b) 类固体的特性

定律，弹性部分遵守胡克定律，我们可写成

$$\dot{\gamma} = \tau/\mu_0 + \dot{\tau}/\lambda ① \tag{12.14}$$

其中 λ 是刚性模量. 在定常流动中，$\dot{\gamma} = \tau/\mu_0$，流体的特性像简单的牛顿流体. 但是，剪应力变化时则呈现出弹性效应.

麦克斯韦尔最早把方程(12.14)写成

$$\tau + (\mu_0/\lambda)\dot{\tau} = \mu_0\dot{\gamma} \tag{12.15}$$

遵守这个规律的液体叫做麦克斯韦尔液体. 常数$(\mu_0/\lambda)^{-1}$是一个弛豫时间，物理上是当应变率保持不变，应力呈指数规律衰减时的时间常数. 运动停止时，则应力按照 $e^{-\lambda t/\mu_0}$ 规律衰减.

也有人提出更复杂的黏弹性流体的模型，式子中包含 τ 和 γ 的更高阶的时间导数项. 当过程随时间变化时，弹性模量有可能是频率的复杂函数. Wilkinson[10] 对这类模型有一个很有趣的介绍.

12.3　管内的层流流动

幂律流体

为了说明幂律模型的应用，我们将对满足幂函数定律的流体在圆管内作完全发展的层流流动时，导出其速度分布和压降随流量变化的方程.

在柱坐标中，一维定常流的剪应力方程(完全发展的流动必然是定常的)为

$$\frac{d}{dr}(r\tau) = r\left(\frac{dp}{dz}\right) \tag{12.16}$$

对管内流动的方程进行积分(从中心线至 r 处)得

$$\tau = \frac{r}{2}\left(\frac{dp}{dz}\right) \tag{12.17}$$

其中 τ 是作用在管壁面元上的剪应力，指向下游方向规定为正. dp/dz 是下游方向的压力梯度(如图 12-6 所示).

---

① 原文式(12.14)中 γ 有误，应为 λ——译者注.

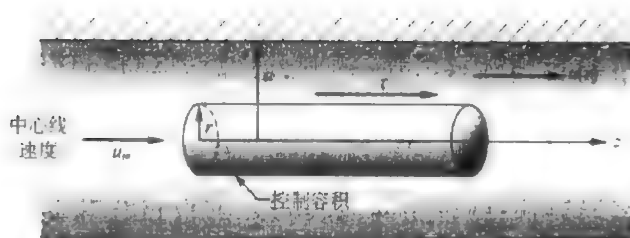


图 12-6 管内的一维流动

满足幂函数定律的流体,流变学的方程为

$$\tau = -k\left(-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)^n \tag{12.18a}$$

方程(12.18a)不是很规范,若速度仅在一个方向有变化,幂律流体的 τ 一般应写成

$$\tau = k\varepsilon\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right|^n$$

其中 ε 是一个符号参数,它的定义为

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}u/\mathrm{d}y}{|\mathrm{d}u/\mathrm{d}y|}$$

所以有

$$\tau = k\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right|^{(n-1)}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \tag{12.18b}$$

其中 $k|\mathrm{d}u/\mathrm{d}y|^{(n-1)}$起表观黏性系数的作用.现在方程(12.17)可以显式地写成(如 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y$ 是负的,则流动在正的 z 方向)

$$k\left(-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)^n = -\frac{r}{2}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right) \tag{12.19}$$

引进符号 $-\mathrm{d}p/\mathrm{d}z = G$,方程(12.19)重新整理得①

$$-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \left(\frac{G}{2k}\right)^{1/n} r^{1/n} \tag{12.20}$$

对方程(12.20)进行积分

$$\int_u^0 -\mathrm{d}u = \int_r^a \left(\frac{G}{2k}\right)^{1/n} r^{1/n}\mathrm{d}r \tag{12.21}$$

得

$$u = \frac{n}{n+1}\left(\frac{G}{2k}\right)^{1/n}\left(a^{(n+1)/n} - r^{(n+1)/n}\right) \tag{12.22}$$

总的流量为

$$Q = \int_0^a 2\pi u r\mathrm{d}r \tag{12.23}$$

将方程(12.22)代入式(12.23)并积分得

① 从此以后 G 取为正值.沿 z 方向的流动称为正的流动,正流动的 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z$ 是负的(G 是正的).

$$Q = \frac{n\pi}{(3n+1)}\left(\frac{G}{2k}\right)^{1/n} a^{(3n+1)/n} \tag{12.24}$$

容积平均速度 $V = Q/\pi a^2$，因此有

$$V = \frac{n}{(3n+1)}\left(\frac{G}{2k}\right)^{1/n} a^{(n+1)/n} \tag{12.25}$$

令管内流动的 $G = (\Delta p)/L$（L 是管长，Δp 是压降，$D = 2a$ 是管子的直径），方程(12.25)可以写成

$$\frac{2(3n+1)}{n}\frac{V}{D} = k^{-1}\left(\frac{D\Delta p}{4L}\right)^{1/n} \tag{12.26}$$

对于牛顿流体（$k = \mu, n = 1$），方程(12.26)退化成大家熟知的泊肃叶流的方程

$$\frac{8V}{D} = \frac{D\Delta p}{4\mu L} \tag{12.27}$$

从方程(12.25)求出$(G/2k)^{1/n}$，并代入式(12.22)，可得用容积平均速度进行归一化的速度分布公式

$$\frac{u}{V} = \left(\frac{3n+1}{n+1}\right)\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^{(n+1)/n}\right] \tag{12.28}$$

图 12-7 中画出式(12.28)的速度分布，不同的 n 值对应于不同的曲线.

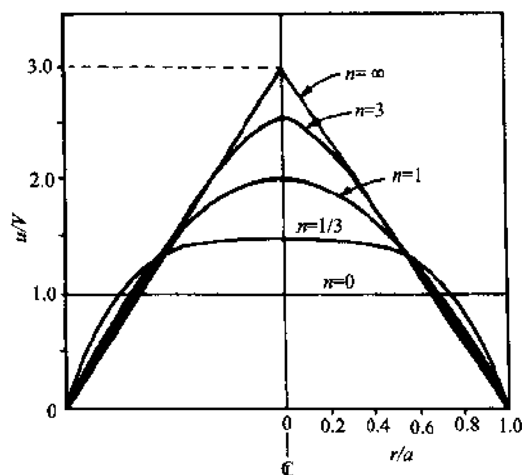


图 12-7　当 n 值不同时，幂律流体在圆管内流动时的速度分布

n 值越小，速度分布曲线越扁平. 当 n 值很小时，速度分布曲线像一个柱塞，只有管壁附近的流体才有应变. 这时的速度分布和宾厄姆塑性流体的速度分布几乎完全相同(见图12-8).

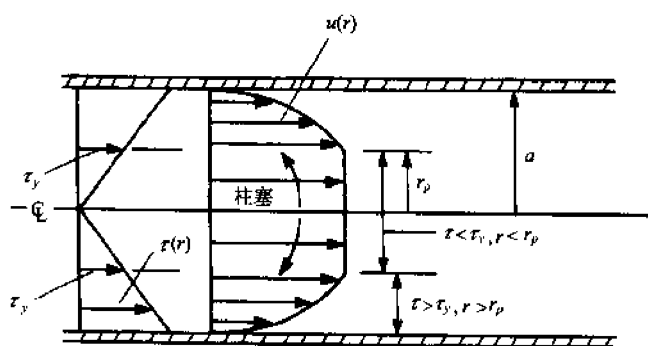


图 12-8　宾厄姆流体在圆管内的流动

在某些情况下，流动用宾厄姆塑性流体和幂律流体描述都很成功，钻探用的泥浆就是这种流体.

宾厄姆塑性流体

宾厄姆塑性流体作层流流动时，代入方程(12.17)中的剪应力方程应该是

$$\tau = \tau_y + \mu_p \dot{\gamma} \tag{12.29}$$

在这个方程中，要求 $\tau > \tau_y$；若 $\tau < \tau_y$，则 $\dot{\gamma} = 0$，流体像半径为 r_p 的活塞那样运动，如图 12-8 所示. 对于半径为 a 的管内流动，当 $r_p < r < a$ 时，有

$$\tau = \frac{1}{2} rG = \tau_y - \mu_p \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} \tag{12.30}$$

当 $r < r_p$ 时，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}r = 0$. 根据 $r = r_p$ 处，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}r = 0$，可得

$$r_p = 2\tau_y / G \tag{12.31}$$

将方程(12.30)积分，可得速度

$$\int_0^u \mathrm{d}u = \frac{1}{\mu_p} \int_a^r \left(\tau_y - \frac{1}{2} rG \right) \mathrm{d}r \tag{12.32}$$

所以，当 $r_p < r < a$ 时有

$$u = \frac{G}{4\mu_p}(a^2 - r^2) - \frac{\tau_y}{\mu_p}(a - r) \tag{12.33}$$

在式(12.33)中，令 $r = r_p = 2\tau_y / G$，可得

$$u_p = \frac{\tau_y^2}{\mu_p G}(a/r_p - 1)^2, \quad r_p > r > 0 \tag{12.34}$$

将速度在整个管子的横截面上积分，可得流量

$$Q = \frac{\pi a^4 G}{8\mu_p} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{2\tau_y}{aG} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2\tau_y}{aG} \right)^4 \right] \tag{12.35}$$

当 $\tau_y = 0$ 时，式(12.35)退化成泊肃叶流的流量公式. 方程(12.35)称为“白金汉”方程，压力梯度与流量之间的关系以隐函数形式给出.

12.4 管内流动的广义方法

拟塑性流体的广义雷诺数和广义阻力因子

Metzner 和 Reed[5] 已提出一种方法，对于无时效流体的层流和湍流，都可以利用广义雷诺数求出阻力因子.

与牛顿流体一样，广义的雷诺数定义为

$$Re' = \frac{8\rho V^2}{\tau_{0L}} \tag{12.36}$$

其中 τ_{0L} 是层流流动中的壁面剪应力，V 是平均速度.

“Fanning 阻力因子”①定义为

① Fanning 阻力因子和第四、第五章中引进的达西阻力因子差一个因子 4，$(f, \text{达西}) = 4 \times (f, \text{Fanning})$.

$$f = \frac{2\tau_0}{\rho V^2} \tag{12.37}$$

在牛顿流体的层流流动中,阻力因子和雷诺数之间有关系

$$f = \frac{16}{Re'} \tag{12.38}$$

下一步再根据在毛细管或其他装置中所测的实验数据,定出计算广义雷诺数所需的流变常数.

测出压降 Δp 和平均速度 V,用以下关系定义出流体的两个常数:

$$\frac{\Delta p}{4L} = \tau_0 = K'(8V/D)^{n'} \tag{12.39}$$

其中 K' 是稠度指数,n' 是流动特性的指数. $8V/D$ 是牛顿流体作泊肃叶流时的壁面剪应力. n' 可以用 $\log\tau_0$ 和 $\log(8V/D)$ 关系曲线的切线斜率确定

$$n' = \frac{\mathrm{d}(\log\tau_0)}{\mathrm{d}(\log 8V/D)} \tag{12.40}$$

方程(12.39)是根据 Mooney 提出的管壁处壁面剪应变公式

$$-\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)_w = \left(\frac{3n'+1}{4n'}\right)\left(\frac{8V}{D}\right) \tag{12.41}$$

推出的. 方程(12.39)、(12.40)和(12.41)也适用于幂律流体以外的流体(这时的 n' 和 K' 不一定是常数). 对于幂律流体, $n = n'$,则我们有

$$K' = k\left(\frac{3n+1}{n}\right)^n \tag{12.42}$$

将式(12.39)的 τ_0 代入式(12.36),可得广义雷诺数的计算公式

$$Re' = \frac{D^{n'}V^{(2-n')}\rho}{K'(8)^{(n'-1)}} \tag{12.43}$$

对于牛顿流体, $n'=1$, $Re'=\rho VD/K'$, K' 即为黏性系数 μ.

湍流流动

Dodge 和 Metzner[2] 根据牛顿流体中"冯·卡门对数阻力公式"给出了阻力因子和广义雷诺数 Re' 之间关系的公式. 和牛顿流体中的方程类似,Dodge 和 Metzner 给出的幂律流体在光滑管内流动时的阻力因子公式为

$$\frac{1}{f} = \frac{4.0}{(n')^{0.75}}\lg[Re'f^{1-n'/2}] - \frac{0.4}{(n')^{1.2}} \tag{12.44}$$

在方程(12.44)中没有显式地给出阻力因子,图 12-9 是根据这个方程画出的曲线.

Dodge 和 Metzner 给出的数据表明,层流变成湍流的临界广义雷诺数随流动特性指数 n' 的减小而增大,当 $n'=1$ 时, Re' 的临界值为 2100,当 $n'=0.38$ 时,临界 Re' 值变成 3100. 但没有给出临界雷诺数的精确判据.

非牛顿流体的异常(湍流)流动

虽然人们发现很多非牛顿流体都满足 Metzner 给出的湍流流动广义计算公式,但某些具有大分子量有机物的溶液在作湍流流动时,其阻力因子却比公式(12.44)的计算值小得多. 当广义雷诺数超过临界值以后,阻力因子的变化不是趋缓,而是仍和层流曲线一样继续下降,似

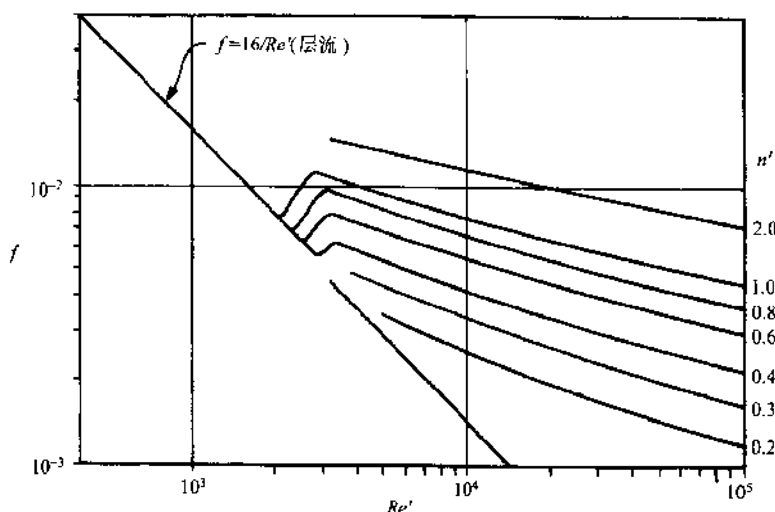


图 12-9 Fanning阻力因子 f 和雷诺数 Re' 之间的关系,方程(12.44)

乎是湍流受到了抑制,或向湍流的转捩推迟.有一些流体,这个趋势可以一直持续下去,直至阻力因子比纯水的阻力因子还小一个数量级.

市场上出售的用作降低抽排流体阻力的 Guar 胶和某些聚合物就具有这个特性.在对油井作裂缝扩展作业时,需在很短的时间内把大量流体注入井内,是这类流体应用的一个例子.但很遗憾,这类大分子量的成分具有对物理分解很敏感的毛病(即在大应变率作用下大分子被撕裂),多次使用时就会渐渐丧失减阻的特性.

固体和水组成的浆体(固体在水中可能没有完全弥散开)在管内作湍流流动时,也可以使阻力因子减小,甚至比水的阻力因子还小.在管壁附近,水或液体和固相分离,形成了一个黏性层,浆体中更稠的核心部分像柱塞一样运动.由于在边界层和核心部分之间,动量的湍流输运减弱,因此层流边界层增厚,阻力因子比纯水流动时更小.高浓度水煤浆的阻力因子比纯水低很多.纸浆的浓度增高时,纸浆作湍流流动时的阻力因子也比水的低.

参考文献

1. Coleman, B. D., Markovitz, H., and Noll, W., *Viscometric Flow of Non-Newtonian Fluids*, Springer-Verlag, 1966.
2. Dodge, D. W., and Metzner, A. B., "Turbulent Flow of Non-Newtonian Systems", *A. I. Ch. E Journal*, 5, pp. 189—204, 1959.
3. Fredricson, A. G., and Bird, R. Byron, "Non-Newtonian Flow in Annuli", *Industrial and Engineering Chemistry*, 50, No. 3, pp. 347—352, March 1958.
4. Larson, R. G., *Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions*, Butterworth, 1987.
5. Metzner, A. B., and Reed, J. C., "Flow of Non-Newtonian Fluids-Correlation of the Laminar Transition and Turbulent-flow Regions," *A. I. Ch. E. Journal*, 1, pp. 434—440, 1955.
6. Savins, J. G., "Generalized Newtonian (Pseudoplastic) Flow in Stationary Pipes and Annuli," *Petroleum Transactions, A. I. M. E.*, 213, pp. 325—332, 1958.
7. Showalter, W. R., *Mechanics of Non-Newtonian Fluids*, Pergamon Press, 1978.
8. Streeter, V. L. (Editor), *Handbook of Fluid Dynamics*, Chapter 7, by A. B. Metzner, McGraw-Hill, 1961.
9. Vaughn, R. D., and Bergman, D., "Laminar Flow of Non-Newtonian Fluids in Concentric Annuli," *Industrial and Engineering Chemistry-Process Design and Development*, 5, No. 1, pp. 44—47, 1966.
10. Wilkinson, W. L., *Non-Newtonian Fluids*, Pergamon Press, 1960.

例　题

12.1 $K' = 1.693, n' = 581$ 的泥浆在内径为 3.826in 的管内流动时，流量为 1150gal/min，试求管内的压力损失（K' 的单位制是 lb、ft 和 sec，n' 是幂函数的指数）.

解 1150gal/min 相当于 $2.56ft^3/sec$，管子的横截面积是 $0.0798ft^2$，因此可得流动速度 32ft/sec. 根据方程(12.43)可得修正的雷诺数 $Re' = 19900$，流动处于湍流状态. 从方程(12.44)得 Fanning 阻力因子 $f = 0.00442$. 从方程(12.44)不能显式地求出 f 的值，但用假定的 f 值，代入 $\lg(Re' f^{(1-n'/2)})$ 项中，可以很容易解出 f 值，然后用新求出的 f 值代回式(12.44)，如此不断迭代，很快可以收敛到满足式(12.44)的精确的 f 值. f 值也可以从图 12-9 查得. 最后再利用公式

$$\tau_0 = \frac{D\Delta p}{4L} = \frac{f\rho V^2}{2}$$

求出管内的压力梯度 $(\Delta p)/L = 0.396$ psi/ft.

12.2 油漆可以用宾厄姆塑性流体近似. 把屈服应力为 τ_y 和黏性系数为 μ_p 的油漆涂在墙壁上，要使油漆附着在墙壁上不动，油漆的最大的厚度 h 可以多厚？

解 参考图 12-10，当由油漆重量产生的壁面剪应力超过 τ_y 以前，油漆可以附着在壁面上，超过 τ_y 以后，油漆将要流走一部分以保持临界的厚度. 考虑厚度为 $(h-x)$ 一层油漆重量和剪应力的平衡. 表面上的剪应力为零，到壁面上线性地增加到 $\tau = \rho g h$. 最大的厚度根据 $\rho g h_{max} = \tau_y$ 确定，即 $h_{max} = \tau_y / \rho g$.

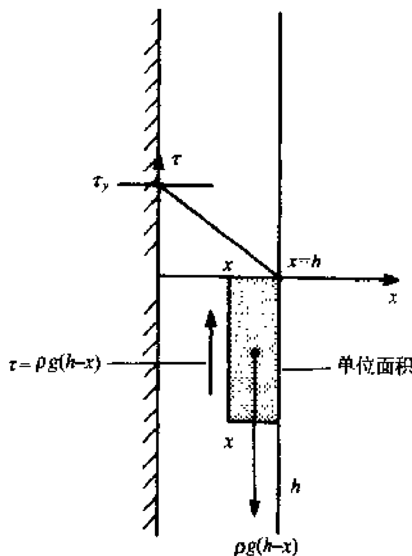


图 12-10

补 充 习 题

12.3 测量表面，毛细管流量计的 $\log\tau_0$ 和 $\log(8V/D)$ 之间呈线性关系. $8V/D$ 从 $88sec^{-1}$ 变到 $5400sec^{-1}$ 时，τ_0 从 1.20 变到 2.50. 当流体以 400 gal/min 流量通过内径为 3.820in 的管道时，压降多大？是层流还是湍流？

12.4 试证明当幂律流体通过两平行平板之间时，其速度分布公式为

$$u = \frac{n}{1+n}\left(\frac{G}{k}\right)^{1/n}\left[h^{(n+1)/n} - y^{(n+1)/n}\right]$$

其中 h 是槽道的半宽，y 是从中心线算起的坐标.

12.5　推导宾厄姆塑性流体在两静止平行平板之间流动时的速度分布.

12.6　当立式止推轴承(见习题 5.11)采用宾厄姆塑性流体时,描述轴承速度增加时的流动状态.

12.7　在习题 5.13 中的液压止推轴承采用宾厄姆塑性流体作为润滑剂时,当油箱的压力从零增大到一个大值时,描述通过轴承的流动.

第十二章符号表

a = 管子的半径

A, B, C = 在各种应力应变关系中的常数

D = 直径

f = 阻力因子(Fanning)

$G = -\mathrm{d}p/\mathrm{d}z$,管内的压力梯度

K = 幂律流体的比例常数

K' = 稠度指数

L = 长度

n = 幂律流体的指数

n' = 流动特性指数

p = 压力

Q = 容积流量

Re' = 广义雷诺数,$8\rho V^2/\tau_{0L}$

r = 半径方向坐标

r_p = 管内中心柱塞的半径

u = 速度

u_m = 最大速度

u_p = 管内中心柱塞的速度

V = 平均速度

γ = 剪应变

$\dot{\gamma}$ = 剪应变率

λ = 刚性模量

μ = 黏性系数

μ_a = 表观黏性系数

μ_0 = 应变率等于零时的黏性系数

μ_p = 塑性黏性系数

μ_∞ = 应变率很大时的表观黏性系数的渐近值

τ = 剪应力

$\dot{\tau}$ = 剪应力的改变速率

τ_{0L} = 层流流动中的壁面剪应力

τ_y = 屈服应力

第十三章 波动和稳定性

13.1 引言

波动的研究对流体力学的许多方面都很重要.波在液体表面上的行为和对流体稳定性的认识,构成了声学的基础.波动会传播,并以振荡的方式进行,这是因为流体在受到扰动时所激发出的恢复力趋向于把流体恢复到原来的未扰动状态.波动可以连续地传播,直到由于耗散效应使其消失为止.波动可以是很弱的(有时称为**无限小的**)或者是很强的.弱波的实例之一是普通的声波,由声波导致的流体特性的改变量与流体特性的定常背景值相比是小量.而激波和水跃则是强波的实例.

弱波和强波的行为是完全不同的,描述它们的数学方法也不相同.一般而言,描述弱波的方程可以是"线性的",它忽略了与波有关的二阶小量.这种简化使方程可以用简单的方法来求解.在本章将局限于研究线性波.由于声波可以像稳定性理论中的大多数问题一样,用线性化方法作准确地处理,所以这种限制并不算严重.事实上,一些如水跃之类的强波也能用线性化的方法来处理.

稳定性研究什么?一静止流体或者具有特殊定常运动状态的流体,如果受到某种特定方式的扰动,尽管通常是无限小扰动,也会使流体变得不稳定.一般而言,流体参数有一定的范围,在此范围内流体是稳定的,但是,如果允许或者导致某些参数超过临界值,流体将变得不稳定.因为无限小的扰动总是存在的,若超过了临界参数,那么出现不稳定性将是不可避免的.例如,如果雷诺数超过依赖于流动形状的临界值,那么层流会变得不稳定,并发展成湍流.又如风速超过临界风速,那么在海浪上会形成白色浪花.还有些流动形状是固有不稳定的,与相应的参数值无关,实例之一是水的薄层射流,它总是在下游破碎成小水珠.

在不稳定性发生时,并不总是意味着流动会出现像层流到湍流或像表面波破碎那样的激烈变化.流体的某种流动形状可能转化成另一种流动形状.如两种互不相溶的液体,让密度较大的液体水平地放在上层是不稳定的,液体将互相渗透直到两层液体颠倒过来,使密度较大的液体处于底层为止.

怎样预测稳定性?扰动以波的形式施加到流体的一个或多个参数上,流体的响应决定了稳定性的判据.如果波动消失了,流体是稳定的.如果波动增长了,则是不稳定的.通常由无限小扰动可提供预测稳定性的判据.然而,在某些情况下,虽然对小扰动的响应也许是稳定的,但是足够强的扰动却可能引起不稳定性.强扰动通常会产生非线性效应,不过这些超出了本书的研究范围.大多数实际问题是适合于用线性分析来处理的,但是应注意的是,有些流动的不稳定性只能利用非线性分析作预测,例如在一些简单形状情况下,流动转捩成湍流就是这种类型.

波动分类为**横波**和**纵波**,纵波是指任何与该波有关的矢量(如速度)与波的传播方向相一致的波.声波就是纵波.横波是指任何与该波有关的矢量与波的传播方向相垂直(**横**)的波.黏性剪切波就是这类波,大多数表面波也都是横波.在无边界的空间里,这两类波是不耦合的,每一类波都能独立传播.但是在有边界或有自由表面的情况下,这两类波是耦合在一起的.

另一种分类方法是根据波阵面的形状.波阵面是平面的称之为**平面波**,并且在垂直于传播方向的平面上,所有的参数是均匀的.**柱面波**和**球面波**分别在柱面和球面上参数是均匀的,并且波沿径向传播.这里,我们仅详细研究平面波,不过,一般来说它们的行为表现为波的特征,并且柱面波和球面波也可以用类似的方法来处理.

13.2 行波和相位复矢量表达式

这里将详细研究单一频率的(单色的)行波.许多复杂的波形可以通过把单色波叠加的方法来构成.任何形状的周期波都能用傅里叶级数来表示,而非周期波则可用傅里叶积分来表示.

单色行波可用正弦函数来表示.我们将全部使用复数表示法.这是一种包括了相位移、波的增长或衰减的简便方法.图 13-1 显示了在 x 方向上的行波.

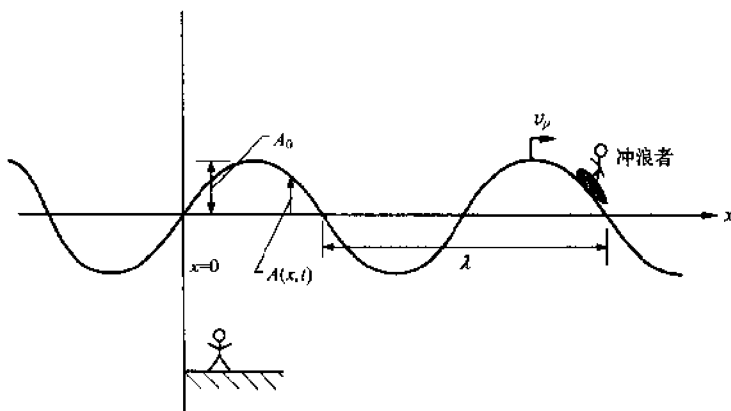


图 13-1　沿 x 方向的行波

在任何 x 处和任何时间 t,波的幅度大小是 $A(x,\ t)$,该值可以代表任何变量,如压强、密度、速度分量等.振幅是 A_0,并且波可以沿正 x 方向行进(在这种情况下称之为前行波),或者沿负 x 方向行进(称之为后行波).图 13-1 显示的是前行波.图 13-2 显示的是先后几个时间间隔的波形.

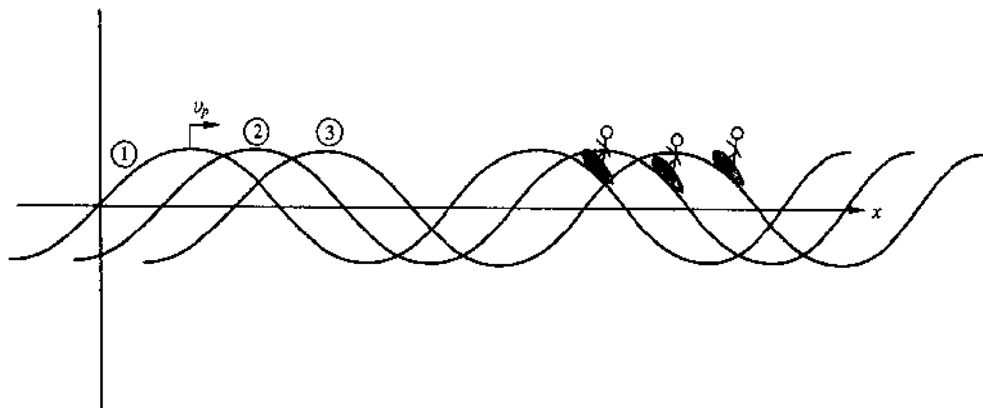


图 13-2　对行波由连续时间间隔显示的波的位置①、②和③.冲浪者以速度 v_p 向前运动

在参考系中静止不动的观察者(在一个固定的 x 值处)所看到的是波随时间的变化,而在一给定时刻得到的波的照片显示的是波随位置 x 的变化.应注意的是假定波动在正 x 和负 x 方向上可以延伸到非常远,然而,若把原点($x=0$ 处)视为波的振荡器或发射器,那么波仅可以在正 x 方向上延伸.

图 13-1 显示的前行波以速度 v_p 沿正 x 方向运动.v_p 是**相速度**或**波速**.图上显示的冲浪者骑在一个波阵面上,正以速度 v_p 运动.当冲浪者向前运动时,他(或她)看到的波的强度值总是相同的.必须强调的是波速 v_p 并不是流体的速度.当波通过时流体质点可以轻轻摇晃,

但是流体并不随波阵面一起运动.通常我们的兴趣在于波通过静止流体的运动(流体相对于 x 坐标系是静止的).波动代表了一种扰动,扰动通过流体传播,实际上当波经过时流体会经历一种轻微的摆动,但是,这仅仅是一种振荡运动,并不会发生流体的净运动.波峰和冲浪者与波一齐向前运动,而不是随流体运动.

在数学上我们把平面波表示为

$$A(x,\ t) = \mathscr{R}\{A^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\} \tag{13.1}$$

其中 A^* 是复数,称为**相位复矢量**.A^* 可以写为

$$A^* = |A^*| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = A_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = A_r^* + \mathrm{i}A_i^* \tag{13.2}$$

其中 $|A^*|$ 是 A^* 的模,如图 13-3 所示,它等于 A_0,而 A_r^* 和 A_i^* 分别是 A^* 的实部和虚部.振幅可以写成 $|A^*| = \sqrt{A_r^{*2} + A_i^{*2}}$,还可以写成 $|A^*| = A^* \bar{A}^*$,这里 $\bar{A}^*$ 是 A^* 的共轭复数.

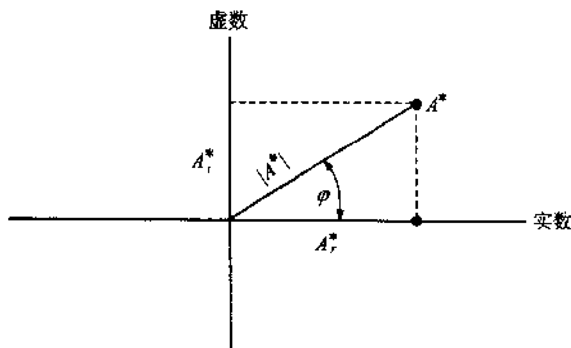


图 13-3　复数平面表示的 A^*

符号 $\mathscr{R}$ 表示表达式的实部.下面我们将省略大括号,这意味着实部总是相对于整个表达式而言的,因为复数乘积的实部与复数实部的乘积是不同的,因此必须先完成所有的运算和代数计算,然后才能取复数的实部,否则会丢弃包含虚数乘积(为实数)项.符号 $\mathscr{R}$ 不必写出来,因为总是这样认为:只有实部或 $A(x,\ t)$ 的任何最终表达式的实部才有实际意义.不过应强调的是所有的中间分析必须用完整的复变量来表示.

ω 是角频率(弧度/秒),在这里 ω 为正实数.k 是传播常数,通常 k 可能是复数,其实部为 k_r,虚部是 k_i.常常把实部 k_r 称之为**波数**,而虚部 k_i 称之为**衰减常数**.频率 f(次/秒)用赫兹(Hz)来度量,它与 ω 的关系是 $\omega = 2\pi f$.波长 λ 与波数 k_r 有关,其关系是 $k_r = 2\pi/\lambda$.我们知道 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta} = \cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta$,这样可以写出方程(13.1),并取其实部为

$$A(x,\ t) = \mathscr{R}\{|A^*| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_r x)} \cdot \mathrm{e}^{k_i x}\} = |A^*| \mathrm{e}^{k_i x} \cos(\omega t - k_r x + \varphi) \tag{13.3}$$

余弦项代表自原点 $x=0$ 和 $t=0$ 出发的相位移为 φ 的行波.就前行波而言,如果 k 的虚部 k_i 是正值,那么当波沿正 x 方向传播时是增长的;如果 k_i 是负值,那么当波传播时是衰减的.对负 x 方向的后行波而言,反过来也是对的.对前行波 k_r 是正值,而对后行波 k_r 为负值.

所以,我们知道相位复数矢量表达式(13.1)包含许多关于波的信息.现在的问题是,对于一个给定的 ω 值(由激发系统,如变换器所强加的),如何求得复数 k 的值?有时振幅 $|A^*|$ 也可以被强加,但是,如果波的几个参数耦合在一起,它们将被同时激发,那么,给出各个参数的相对振幅和相对相位的相位矢量振幅可由流体的控制方程关联起来.一般讲,在发射器处有可能规定惟一的变量(振幅)的大小,而相位角则取为零,那么其他变量的相位就是相对于它的相位.

这样,波动的主要问题就是对于一个给定的输入信号,求解 k 值(角频率 ω 已知)和确定

每一个参数的相位矢量振幅值. k 和 ω 之间的关系方程称之为**色散方程**, $k = k(\omega)$.

在计算色散方程之前,先来仔细地探讨有关相位复矢量的概念. 我们可以在复数平面上来表示方程(13.3). 对于波的复数表达式可以想象为一个在复数平面内的旋转矢量,而 $A(x, t)$可以解释为旋转矢量的实部,如图 13-4 所显示.

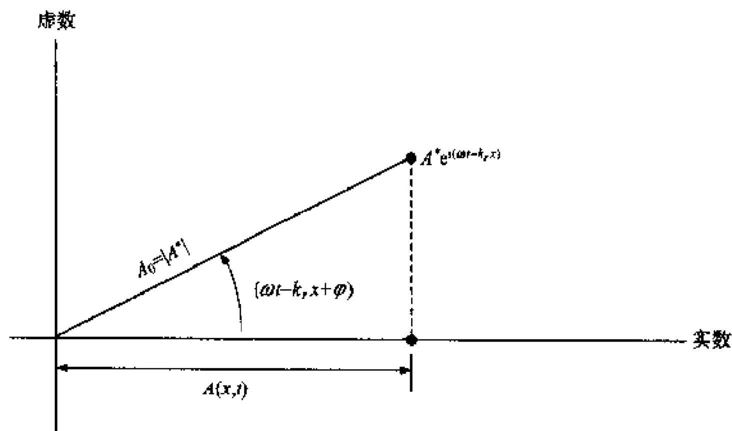


图 13-4 作为旋转矢量实部的 $A(x, t)$

现在由方程(13.3)给出的行波可以用 $e^{k_i x}$ 给出的包络线来表示. 图 13-5 显示的是 k_i 分别为正值和负值时前行波的包络线.

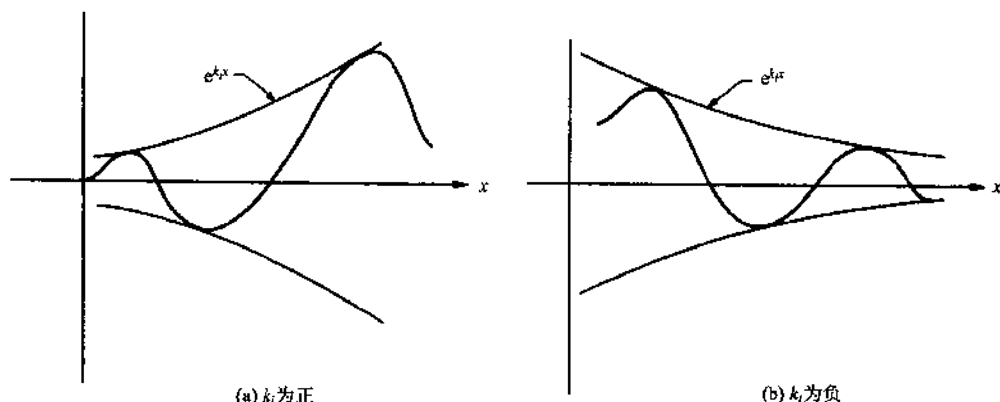


图 13-5 由包络线 $e^{k_i x}$ 给出的波的增长或衰减
(a)表示前行波的增长,它可以被解释为后行波的衰减,将其反过来就是(b)

13.3 相速度和群速度

现在我们会问:冲浪者的速度和波峰的速度是多少? 这个速度一般称为**相速度**或**波速**. 冲浪者随波一起运动,如果没有波的增长或衰减,他看到的总是相同大小的波. 相对于波峰而言,他骑在相同的位置上. 因此,在冲浪者的位置,其余弦项的幅角必须是常数. 所以

$$(\omega t - k_r x + \varphi) = 常数 \tag{13.4}$$

对冲浪者而言该表达式与 x 和 t 有关. 他的速度必须是 dx/dt, 很简单, 该导数是 ω/k_r, 即

$$v_p = \omega/k_r \tag{13.5}$$

我们总是把 ω 取为正实数,所以 k_r 为正值或负值分别表示速度 v_p 的正或负,对应于前行波或后行波. 按照 k 与 ω 的函数关系, v_p 值可以是常数或者随 ω 而变化. 如果 v_p 随 ω 变化,该波被

认为是色散的.单色波不能色散,但是,如果把几个不同 ω 值的波进行叠加(形成任意形状的周期波,或者形成脉冲),当它传播时若 v_p 与频率有关,那么其形状会趋向于模糊(即色散).ω 和复数传播常数 k 之间的函数关系称之为**色散方程**.

根据这个函数关系,可以求得导数 $\partial\omega/\partial k_r$,该导数具有重要的物理意义,将其称之为行波的**群速度**.只有当波是由中心频率 ω_0 附近的频率分量组成时,它才有简单的解释.群速度 v_g 可以表达为

$$v_g = \left.\frac{\partial\omega}{\partial k_r}\right|_{\omega_0} \tag{13.6}$$

实际上 v_g 代表的是信息或能量通过波进行传播的速度.如果中心在 ω_0 处的主波(载波)在一些非常低的频率处被调制,该调制信号将以群速度运动.由调制形成包络线,该包络线自身与载波相比是一个波长非常长的波.包络线的速度是群速度,而载波的速度是相速度.如果没有色散,那么群速度和相速度是等同的.更完整的讨论可参看习题 13.1.

13.4　色散和衰减

我们已经把色散定义为由于相速度随频率而变化所造成的波的结构在空间的扩展或消失.不管 k_i 为何值色散都可以发生,甚至当 k 是纯实数,而 k_i 是零,波既不增长也不衰减时也能发生色散,并在波中不存在因色散而产生的能量损失或增益.当随着波的衰减或增长有能量损失或增加时,这说明是由 k_i 引起的.可见,色散仅仅依赖于 k_r.图 13-6 展示的是在 $+x$ 方向传播的方波.让我们假定 k 是纯实数,而 v_p 随着频率而变化,这将导致色散.当波传播时,方波的形状会退化,这是因为高频分量比低频分量行走得更快所至.在远下游处,波将接近于正弦形,只有基频保持不变.

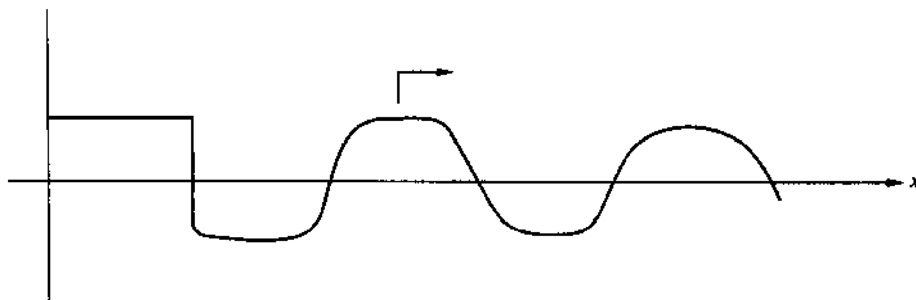


图 13-6　一个色散方波

一个更加引人注目的色散实例是方形脉冲的色散(用傅里叶积分描述).图 13-7 显示了这样一个脉冲逐次在 a,b 和 c 位置处的情况.如果 k 是纯实数,当它向下游传播时,脉冲会扩展但是总能量却不变.

一个波可以在色散的同时发生增长或衰减,从传播波的流体的流动中获得能量,或者通过黏性剪切或热传导等耗散过程损失能量.在这种情况下,由图 13-6 和图 13-7 所示的色散波看起来两者类似,但是它们的振幅在下游是变化的.

为了确定波的行为,根据给定的 ω 来确定 k 是最主要的任务.

为了总结并扩展我们的讨论,应该关注下列用 k 表示的不同类型的波.

1. 如果 k 是复数,那么不管有没有色散,波的衰减或增长总会发生.

2. 如果 k^2 是纯负虚数(k 是复数),则可得到满足扩散方程的波,诸如描述热传导的波或描述黏性剪切的波.

3. 如果 k 是纯虚数,将完全没有波的传播,由于 k_r 为零,所以 $v_p\to\infty$,它对应于波长是

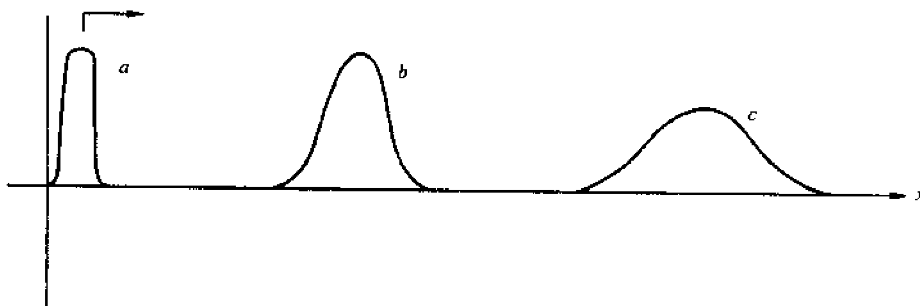


图 13-7　一个色散脉冲

无穷大.如果这种情况发生在临界频率处(k 变成纯虚数),该频率称之为**截止频率**,这种波的形状是简单的指数函数,它沿 x 方向延伸至无穷远,并随时间振荡.整个波同相地移动,好像是振动的弹簧.这样的波称之为**损耗波**(参见图 13-8).

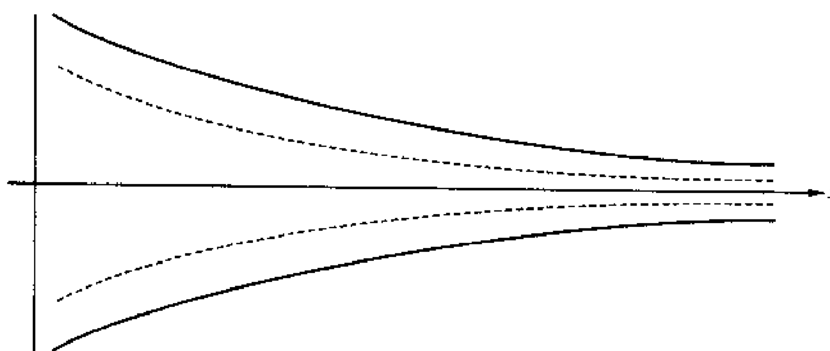


图 13-8　超过"截止"的非传播损耗波.振荡发生于两条实线之间.虚线表示中间位置

13.5　驻波

考虑一个没有色散,也没有衰减或增长的正弦波.那么 k 是实数,v_p 是常数,所以,有 $k_r=\pm(\omega/|v_p|)$和 $k_i=0$.如果把一个 $k_r=+(\omega/|v_p|)$的前行波与一个 $k_r=-(\omega/|v_p|)$的后行波进行叠加,而且这两个波有相同的振幅,所得的结果是驻波.驻波在空间不行走.其节点(指振幅总是为零的地点)在空间也是固定不动的,如图 13-9 所示,图中是振幅为 B_0 的驻波.该波随时间在实线与虚线之间振荡.

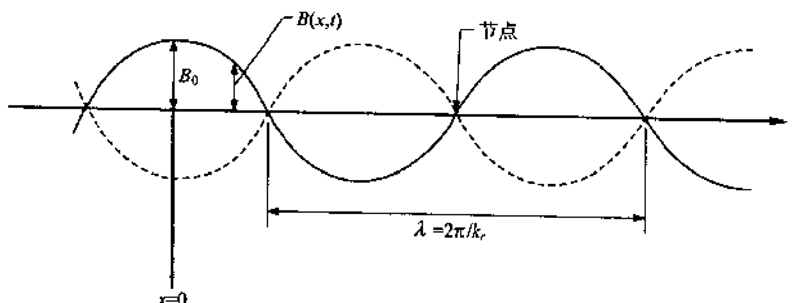


图 13-9　驻波.节点位置是固定的,波在实线和虚线之间上下振荡

驻波可以写成两个行波的和,行波的形式是$|A|\cos(\omega t-k_r x)$,其中k_r是正值代表波向正x方向行走,k_r是负值代表波向负x方向行走.

$$B(x,t)=|A|\cos\left(\omega t-\frac{\omega x}{|v_p|}\right)+|A|\cos\left(\omega t+\frac{\omega x}{|v_p|}\right) \tag{13.7}$$

利用等式

$$2\cos\alpha\cdot\cos\beta=(\cos\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$$

将其应用于式(13.7),给出

$$B(x,t)=2|A|\cos\omega t\cdot\cos\frac{\omega x}{|v_p|}=B_0\cos\omega t\cdot\cos\frac{\omega x}{|v_p|} \tag{13.8}$$

我们知道振幅B_0是$2|A|$,式(13.8)是图13-9所示的驻波的准确表达式.这样的驻波可以通过用手指拨动节点在吉它弦上形成.

13.6　声波色散方程的计算

作为一个简单的色散计算的实例,我们考虑一个在静止空气中传播的声波.这个方法是相当普通的,并可应用于其他类型的波.我们的分析局限于线性波.因为声波是线性的,所以这里所限定的分析范围似乎不是什么限制,对稳定性研究而言,线性分析通常是合适的.

我们使用的方法如下:描述该系统的方程可以这样来线性化,即通过假设使该系统偏离定常背景条件的扰动量与原定常背景参数相比是小量.假定采用相位复矢量正弦波解法,则允许把描述系统的微分方程组简化成关于相位系数的联立代数方程组,而相位系数是与波相关的各种参数的系数.然而,方程组不是独立的,可以应用克拉默规则得到色散方程.

第一个例子是在静止空气中的普通的平面声波.该波沿正x方向或负x方向行走,如图13-10所示.这种波既是纵波,又是平面波,在y方向和z方向是不变化的.我们忽略所有的耗散效应,如黏性剪切和热传导,因为这些会引起色散和衰减;加之这些效应非常小,忽略后仍可有很高的精确度.所以,在波中所有特性的变化都是等熵的.其控制方程组是

运动方程:
$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x} \tag{13.9}$$

连续方程:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0 \tag{13.10}$$

等熵关系:
$$p\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\gamma}=p_0\left(\frac{1}{\rho_0}\right)^{\gamma} \tag{13.11}$$

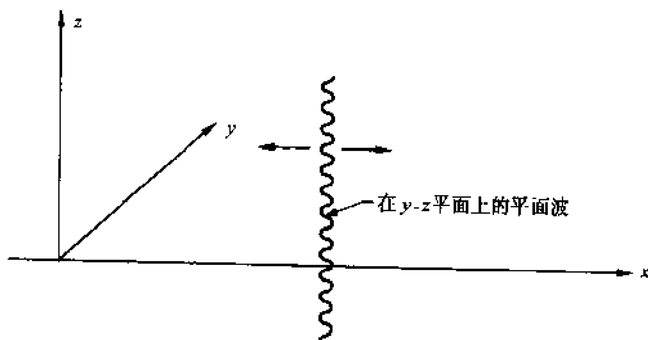


图13-10　沿正或负x方向传播的平面声波

式中$\gamma=c_p/c_v$是比热比.将定常状态参数表示为p_0,ρ_0和$u_0=0$.当波动传播时,波所产生的小扰动或振动量用一撇表示为p',ρ'和u',所以在任何时刻实际的参数值是(p_0+p'),$(\rho_0+$

ρ')和 u',并假定 $p' \ll p_0$, $\rho' \ll \rho_0$. 再有,所有带撇量的平方或更高次的幂和两个或多个带撇量的乘积与带撇量自身相比可以被忽略,虽然这里没有定常速度,但是 u'被认为是一个小扰动量. 要证明 u'为小量需要将方程组作归一化处理,这里不用归一化方法. 替代的方法是将变量用定常量加带撇量来表示,这样方程(13.9)至方程(13.11)变成

$$(\rho_0 + \rho')\left\{\frac{\partial u'}{\partial t} + u'\frac{\partial u'}{\partial x}\right\} = -\frac{\partial(p_0 + p')}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\{(\rho_0 + \rho')u'\} = 0$$

$$(p_0 + p')(\rho_0 + \rho')^{-\gamma} = p_0\rho_0^{-\gamma}$$

通过展开并只保留带撇量的一阶项(对等熵关系应用二项式定理),由此可得线性方程组. 由于所有定常状态项的导数为零,则有

$$\rho_0\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} \tag{13.12}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \tag{13.13}$$

$$p' = \frac{\gamma p_0 \rho'}{\rho_0} \tag{13.14}$$

现在,对所有小扰动量假设有相位复矢量解

$$\begin{aligned} p' &= p^* e^{i(\omega t - kx)} \\ \rho' &= \rho^* e^{i(\omega t - kx)} \\ u' &= u^* e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned} \tag{13.15}$$

其中显然应在复数矢量与指数相乘以后,再对整个表达式取实部,如果过早地抛弃虚部,将会把解的一部分丢失掉,因为两个虚数的乘积是实数. 应注意所有带撇量可以对 x 或者 t 求导数. 例如

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = i\omega p^* e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -ikp^* e^{i(\omega t - kx)}$$

将这些解代入方程(13.12)至(13.14),由此得到代数方程组

$$\begin{aligned} i\omega\rho_0 u^* - ikp^* &= 0 \\ i\omega\rho^* - ik\rho_0 u^* &= 0 \\ \rho_0 p^* - \gamma p_0 \rho^* &= 0 \end{aligned} \tag{13.16}$$

如果已知 ω 和 k,或许以为能直接求出 p^*, ρ^* 和 u^*. 然而情况并非如此. 因为方程组不是独立的. 这在物理上是有道理的,原因在于波的强度必定是由产生波的源所强加的. 如果我们强加(在发射器或扬声器处)任何一种变量的值,比方是 u^*,那么其他的参数是根据上述方程组得出的. 由于 p^*, ρ^* 和 u^* 一般是复数量,这些量给出的振幅和相位与强加的变量有关,在现在的情况下是 u^*,当然也可以是任何其他变量. 强加的变量通常取零相位,所以它的相位复矢量是一个实数.

现在,关键步骤是对于一个非独立的线性方程组完成对变量(在现在的情况下是 p^*, ρ^*

和 u^*)的系数行列式必须为零的计算.这就是克拉默规则,由此得到的方程就是**色散方程**,该方程给出了 k 和 ω 的函数关系.

在色散方程中不出现相位复数矢量.系数行列式可以直接根据方程(13.16)得到.

$$\begin{array}{ccc} u^* & p^* & \rho^* \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} i\omega\rho_0 & -ik & 0 \\ -ik\rho_0 & 0 & i\omega \\ 0 & \rho_0 & -\gamma p_0 \end{vmatrix} = 0$$

最上面一行是相位复矢量,列在上面作为参考,下面的各项是其系数.展开该行列式可得

$$k^2\gamma p_0 = \omega^2\rho_0 \tag{13.17}$$

k 是纯实数,其表达式是

$$k = \pm\sqrt{\frac{\omega^2\rho_0}{\gamma p_0}}$$

所以,相速度 v_p,即声速是

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \pm\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \pm a \tag{13.18}$$

为了以后使用方便,把通常的声速 $\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ 表示为 a.正号和负号分别代表前行波和后行波.因为 v_p 是常数,所以没有色散.又由于 k 是实数,所以波不衰减,也不增长.利用完全气体定律

$$p_0 = \rho_0 RT_0$$

这样,v_p 可以表示为

$$v_p = \pm\sqrt{\gamma RT_0}$$

现在回到方程(13.16),我们可以求得其他的波参数的相位复矢量,该量是用频率 ω(是由发射器或波源产生的)和一个已知的相位复矢量(如 u^*)来表示.若任意地取 u^* 为实数 u_0(相位角为零),那么

$$\begin{aligned} p^* &= \left(\frac{\omega}{k}\right)\rho_0 u_0 = \pm a\rho_0 u_0 \\ \rho^* &= \pm\frac{\rho_0 u_0}{a} \end{aligned} \tag{13.19}$$

应注意的是关于相位复矢量方程组(13.16)中有一个方程是多余的,一旦色散方程获得后,该方程可以从另外两个方程推导出来.在这里的问题中,p^* 和 ρ^* 实际上是实数,所以在波动中压强和密度的振荡与速度是同相(+号)或者是相位相差 180°(-号).然而,如果在推导过程中包括有黏性效应和热传导,那么 k 应该是一个复数.

关于 u',p' 和 ρ' 的最终表达式是[根据方程(13.15)]

$$\begin{aligned} u' &= \mathscr{R}u_0 e^{i[\omega t \mp (\omega x/a)]} = u_0\cos\omega(t \mp x/a) \\ p' &= \mathscr{R}a\rho_0 u_0 e^{i[\omega t \mp (\omega x/a)]} = \pm a\rho_0 u_0\cos\omega(t \mp x/a) \\ \rho' &= \mathscr{R}\frac{\rho_0 u_0}{a} e^{i[\omega t \mp (\omega x/a)]} = \pm\frac{\rho_0 u_0}{a}\cos\omega(t \mp x/a) \end{aligned} \tag{13.20}$$

上面的一组符号(指余弦函数中位相前为 − 和在表达式前为 +)对应于前行波，在 $+x$ 方向 u' 取 + 号. 下面一组符号代表后行波. 为了理解这种叙述的意义，想象一个位于 $x=0$ 处的扬声器，其前面和背面都暴露于空气中. 前面(在 $+x$ 一边)产生向 $+x$ 方向行走的波. 在前面一侧，一个正的速度压缩空气，并使压强升高，因此 u' 与压强 p' 是同相的. 在背面一侧，产生向 $-x$ 方向行走的波，并且一个正的 u' 在扬声器的背面产生稀疏波，使压强减小，所以在背面一侧，u' 和 p' 的相位相差 180°. 相同的讨论也可应用于 ρ'.

另一种研究声波的方法(但是更麻烦)是把控制微分方程组合并成对每一个变量的单一方程. 其结果是熟知的波动方程.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{Bmatrix} u' \\ p' \\ \rho' \end{Bmatrix} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{Bmatrix} u' \\ p' \\ \rho' \end{Bmatrix} \tag{13.21}$$

并且 $\gamma p_0/\rho_0$ 被认为是声速的平方. 然而该方法对较复杂的情况变得很不方便，求解这种情况所适用的波动方程将是冗长的.

前行波和后行波，两者都是色散方程的解. 依据实际情况，其中踊种波或两种波都可能存在. 如果流体在 $+x$ 方向可以无限延伸，那么在定常状态情况下，在 $x=0$ 处产生的波只可能存在前行波. 然面，如果流体在下游某位置处是有界的，那么依据边界情况，波将被反射、吸收，或者部分反射. 这种边界条件，与在振荡器($x=0$)处的条件一起决定了 $+x$ 和 $-x$ 向行波的混合. 进一步，如果边界壁面是一个反射器，并且沿 x 方向运动，那么反射波的频率与人射波的频率将是不同的(当在相对于 x 坐标系和发射器为静止的观察者的参考系中测量时). 对于运动壁面上的观察者而言，入射波和反射波有相同的频率，但该频率与发射器处的频率是不同的. 这就是**多普勒位移**.

13.7　从静止壁面反射的声波

作为反射的例子，考虑如图 13-11 所示的系统，图中同时存在前行和后行两种波.

一个有平直表面的大扬声器产生频率为 ω 的声波. l 与扬声器的尺度相比假设是小量，所以这样的波是平面波. 在 $x=l$ 处的壁面是刚性的，因此产生完全反射. 在 $x=0$ 处扬声器的运动可表示为

$$u|_{x=0} = \mathscr{R} u_0 e^{i\omega t} = u_0\cos\omega t$$

我们知道

$$k_r = \pm\omega\sqrt{\frac{\rho_0}{\gamma p_0}} = \pm\frac{\omega}{a}$$

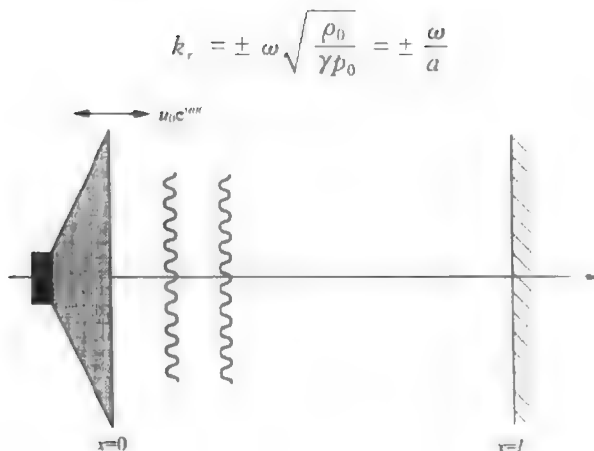


图 13-11　在 $x=0$ 处的扬声器产生声波
并在 $x=l$ 处被刚性壁面反射. 假设是平面波

$$k_i = 0$$

所以,整个流体的速度波动可以表示成前行波和后行波之和

$$u(x,\ t) = \mathscr{R}\{u_1^* e^{i\omega(t-x/a)} + u_2^* e^{i\omega(t+x/a)}\} \tag{13.22}$$

其中 u_1^* 和 u_2^* 分别是前行波和后行波的相位复矢量的振幅. 在 $x=l$ 处壁面是刚性的,所以边界条件是

$$u(l,\ t) = 0$$

$$u(0,\ t) = u_0 e^{i\omega t}$$

在式(13.22)中利用这些条件,u_1^* 和 u_2^* 能直接求得,于是 $u(x,\ t)$是确定的. 必须强调的是,当代入边界条件后,一般不得对表达式取实部,在获得 $u(x,\ t)$的最终形式之前必须保持复数形式. 这里就该问题而言,应用边界条件后给出

$$\begin{aligned} u_1^* e^{-i l\omega/a} + u_2^* e^{+i l\omega/a} &= 0 \\ u_1^* + u_2^* &= u_0 \end{aligned} \tag{13.23}$$

对于 l 为任意值时的计算细节留作本章末尾的习题. 然而,对于 $l=(2n+1)(\lambda/4)$的特殊情形(这里 n 是整数,所以 l 是四分之一波长的奇数倍),边界壁面对应于一个自然节点,并且显而易见两种波(前行和后行波)是同等大小的,由此会形成驻波. 边界条件变成

$$u_1^* e^{-i(2n+1)\pi/2} + u_2^* e^{+i(2n+1)\pi/2} = 0$$

$$u_1^* + u_2^* = u_0$$

由此给出

$$u_1^* = u_2^* = u_0/2 \tag{13.24}$$

前行波和后行波大小相同,因此叠加时形成驻波. 一端封闭的玻璃管,在另一端用声波激发,管内将会以临界频率(共振)形成驻波,在这种情况下四分之一波长的奇数倍等于管长. 当共振发生时,少量放在管内下侧的沙子将在节点处聚成一团. 当波长远大于管道直径时,管壁效应可忽略不计.

13.8　黏性流体中的剪切波

有横波型行为的另一个例子是平面剪切波在黏性流体中的传播. 关于速度的类波解并不代表真实的波,原因在于它不存在恢复力. 黏性剪切力总是与没有恢复力的流体运动方向相反,所以该系统必须由振荡器连续地驱动. 输入的能量全部被黏性效应所耗散,波在传播过程中逐渐消失.

考虑一个非常大的黏性海洋,流体从 $x=0$ 处的表面沿 x 方向朝海底向下延伸,见图13-12. 有一块巨大的平板覆盖在流体上,该平板在表面沿 y 方向以频率 ω 作振荡,其速度为 $v_0 e^{i\omega t}$. 记住,实部是实际的运动,$v_0\cos\omega t$. 可以任意地把相位取为零. 平板的位移可记为 $y_p = y^* e^{i\omega t}$. 速度是位移对时间的导数,即 $i\omega y^* e^{i\omega t}$,所以,平板的运动可表示为

$$y_p = \mathscr{R}\left\{-\frac{i v_0}{\omega} e^{i\omega t}\right\} = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

位移和速度的相位差是 90°.

流体在 y 方向振荡,由平板激发的剪切波沿 x 方向向下传播. 这是横波,并且它与任何纵声波是不耦合的. 因为流体有黏性,所以剪切波才能传播. 理所当然剪切波是色散的,又是衰减的,在传播时会逐渐消失.

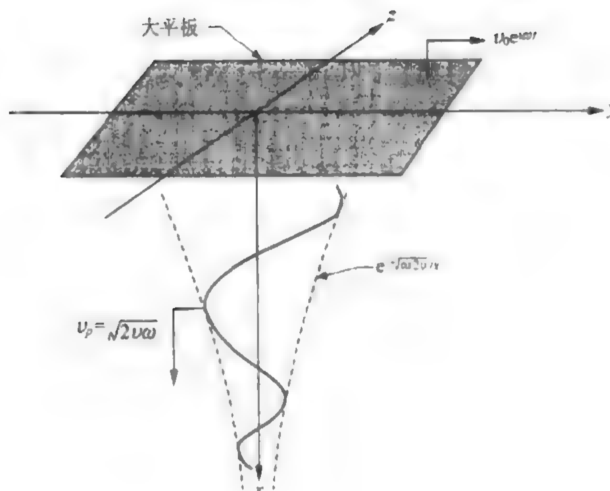


图 13-12　无限大黏性流体受到表面上振荡平板的激发

y 向的运动方程可简化为

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}=\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{13.25}$$

在 y 向或 z 向没有变化,仅仅在 y 向存在一个速度分量.这是这里所需要的惟一方程,该方程就是标准的扩散方程.(它也可以根据第三章中讨论的旋涡输运方程推导出来.)由于有振荡输入,要寻找的解的形式为

$$v(x,\ t)=\mathscr{R}\{w^* e^{i(\omega t-kx)}\} \tag{13.26}$$

将其代入方程(13.25),得到的色散方程为

$$i\omega\rho v^*=-\mu v^* k^2 \tag{13.27}$$

所以有

$$k^2=-i\rho\omega/\mu=-i\omega/\nu \tag{13.28}$$

其中 $\nu=\mu/\rho$ 是运动黏性系数,起扩散常数的作用.k^2 为负虚数表明波总是衰减的,并在扩散过程中消散.解出 k,并把实部和虚部分开,得到

$$k_r=\pm\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}},\qquad k_i=\mp\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \tag{13.29}$$

对于 k_r 的 + 号表示沿 $+x$ 方向向下行走的波,对于 k_i 相应的是 − 号,表明沿传播方向是衰减的.另外一组符号表示波沿 $-x$ 方向(向上)行走并衰减.

相速度是

$$v_p=\frac{\omega}{k_r}=\pm\sqrt{2\nu\omega}$$

注意到 k_i 随频率增高而增大,所以,高频波比低频波衰减得更快.用傅里叶积分级数表示的波的结构中,高频分量衰减得很快,由此引起波形的变化.但是,这种波形变化不应与由耗散效应引起的波形变化相混淆.

在平板处，$x=0$，流体和平板一起运动，所以

$$v(0,\ t) = \mathscr{R}v_0 e^{i\omega t} = \mathscr{R}v^* e^{i\omega t}$$

并且，v^* 等于 v_0. 假定只存在前行波(没有从海底的反射)，$v(x,\ t)$的表达式是

$$\begin{aligned} v(x,\ t) &= \mathscr{R}v_0 e^{i(\omega t - \sqrt{\omega/2v}\cdot x + i\sqrt{\omega/2v}\cdot x)} \\ &= v_0 e^{-\sqrt{\omega/2v}\cdot x}\cos(\omega t - \sqrt{\omega/2v}\cdot x) \end{aligned} \tag{13.30}$$

式中 $e^{-\sqrt{\omega/2v}\cdot x}$ 项是衰减波的包络线. k_i 是阻尼或衰减常数.

波穿过流体到达其振幅变成 $e^{-1}v_0$ 的位置处所穿透的距离称之为**趋肤深度**，δ. 这里的**趋肤深度**是

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

这是波的扩散特性的量度，波本身是频率的函数. 很显然，高频波的穿透深度小于低频波的穿透深度.

如果大海的底部位于 $x=l$ 处，那么在定常情况下会存在前行和后行两种波，由边界条件可确定这两种波的相位复矢量的振幅，正如在上一节对声波所作的讨论一样.

13.9　水的表面波

表面波的研究形成波动理论的有趣而重要的分支. 表面波像海洋波和湖泊与河流上的波纹是容易观察的. 一般而言，表面波的耗散效应很小，故短距离上波的结构不会受到影响. 然而，表面波会自然消散，尤其在水较深时，这种效应会变得更为重要.

求解表面波所需要的数学方法的一般论述超出了本书的范围. 然而，我们将评述不同类型的表面波和它们的色散方程，如同一般的主题介绍那样. 有关表面波的极好论述读者可参阅莱特希耳的著作，见参考文献 3.

表面波一般是纵波和横波的组合. 压缩性效应可以忽略. 在波动中液体粒子作椭圆运动(主轴是垂直的). 在波的传播方向没有液体的净流动，但是，在一个周期内，粒子完成一次椭圆轨道运行. 一名冲浪者骑在波阵面上以波速运动，必须再次强调的是该速度并不是水本身的速度.

表面波一般有两种类型，按照液面受到扰动后使表面恢复到平面的恢复力的性质来分类. 一种是**重力波**，其中起支配作用的恢复力是重力，而另一种是**表面张力波**，其中起支配作用的恢复力是表面张力. 这两种力总是同时存在的，但是，那种力起主要作用则取决于波长. 重力波是波长 λ 较大的波，即 λ 应大于表面张力起主要作用时的线尺度(但是不必大于水的深度). 当表面的曲率半径很小时表面张力才是重要的(即，表面张力波的波长很小).

事实上，根据经验可知 $\lambda>10$cm 的波重力起支配作用，面 $\lambda<0.5$cm 的波表面张力起支配作用. 显然，海洋波是重力波，而表面张力波只有在表面是风平浪静的情况下才能观察到. 表面张力波有时又称之为**微波**.

以下我们假定波是正弦的和单色的.

重力波

对于重力波的色散方程的形式取决于波长和深度 h 之间的相对大小，并且对于深水，$\lambda\ll h$，和对于浅水，$\lambda\gg h$，方程可以化成简单的形式. 对于深水情况，$\lambda\ll h$，如果水足够深的话 λ 可能非常大，达到 1000m 或更大. 其色散方程可简单地表示为

$$\omega^2 = gk \tag{13.31}$$

可见 k 是纯实数,并且与深度 h 无关.波速是

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{g}{\omega} = \sqrt{g/k} \tag{13.32}$$

波是消散的,波速与 h 无关.实际上,相速度可能是正的也可能是负的,因此这里没有必要关心波的方向,感兴趣的仅是波速.用频率表示的波长是

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi g}{\omega^2} \tag{13.33}$$

对于浅水情况,$\lambda \gg h$,色散方程是

$$\omega^2 = ghk^2 \tag{13.34}$$

而波速是

$$v_p = \sqrt{gh} \tag{13.35}$$

这种波是不消散的,但波速与 h 有关.倾斜的海岸对浅水波有重要影响.在海洋波接近海岸的过程中,海水变得越来越浅,波速也变得越来越慢,其结果是岸边的波变成与海岸线相平行并对准海岸线.引起这种现象的理由在于当波向倾斜的海滩推进时,波的前锋(在海岸附近)的速度比离海岸较远处较深水面上的波速要慢,由此形成波浪与海岸相一致的趋势.用 ω 表示的波长是

$$\lambda = \frac{2\pi\sqrt{gh}}{\omega}$$

对任意深度的水而言,一般的色散方程是

$$\omega^2 = gk\tanh(kh) \tag{13.36}$$

而波速是

$$v_p = \left[\left(\frac{g}{k}\right)\tanh(kh)\right]^{1/2} \tag{13.37}$$

在深水($kh \gg 1$)的极限情况下可简化成$\sqrt{g/k}$,而在浅水($kh \ll 1$)的极限情况下,可简化成$\sqrt{gh}$.

表面张力波或微波

表面张力波,有时也称为微波是 $\lambda < 0.5$cm 的波长非常短的波,在这种情况下表面张力起支配作用.这时重力可以忽略.表面张力波的色散方程和波速分别是

$$\omega^2 = \frac{Tk^3}{\rho} = \frac{T}{\rho}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^3 \tag{13.38}$$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{Tk}{\rho}} \tag{13.39}$$

其中 T 是表面张力.微波会消散,但它的行为和深度无关.扔进平静水中的小石子会产生波纹,当它们向外运动时可以看到波纹扩展和消散.

风在水面上产生的剪切力,或者物体通过水运动都可能引起表面波.风力可以产生海洋波,并为它们的运动提供能量.运动中的船舶会产生复杂的波动图像,水绕面定物体的流动也会产生出波动图像.把小物体抛进平静的水面会形成张力波,或者在浅河床或水槽底部或侧面上存在小凸起物的情况下,当水流过的时候也会形成波纹.张力波的研究在另一种场合下也是重要的,在水面的张力波和可压缩气流中的压缩-膨胀波之间存在许多类比性,以至于常常可以利用水波来模拟和显示可压缩流动的某些形状.

以上我们已经概括地叙述了有关表面波色散方程计算的结果.较完整的讨论需要考虑波

的相互作用所产生的衍射,像船舶产生的图像,还有深度变化和底部变化的影响等,这些讨论超出了这里的范围.

在海洋里,除了表面波,在整个深度上还有其他扰动水的波.水跃或**涌潮**(在第三章中讨论过)就是这种波的实例,如**潮汐波**或**海啸**,这是因海床岩层隆起,通常是因火山活动引起的.这里使用的色散分析对于这些"深海"的波是不适用的,读者可参阅参考文献.

13.10　关于波动的小结

本章描述的线性波可能与固体边界或物体相互作用,或者与其他类似的波相干涉,从而引起衍射和干涉效应.这些现象可以采用叠加方法并满足边界条件进行分析,其中叠加法是将相位-正弦解的复数形式加以叠加.向不同方向行走的平面波也可进行叠加.必须记住的是在这些需要进行叠加的计算中必须使用完整的复数形式.

对于一个在某一方向上传播的波,我们用向量 $\boldsymbol{k}$ 代替 k,同时坐标位置用向量 $\boldsymbol{r}$ 给出.这样,相位复矢量表达式是

$$A^* e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}$$

这里我们已讨论过平面波.上式表示的正是平面波.柱面波具有圆柱形波阵面,这种波必须采用关于空间变量的贝塞尔函数的形式来表达,这与平面波的正弦形是不同的.柱面波没有确定的波长,当柱面波传播时其波长随位置而变化.然而,当相位很大(距离很远)时,贝塞尔函数逐渐变成有确定波长的正弦波行为.球面波可以像平面波一样用同样的相位-正弦形式来表达,但是振幅随$(1/r)$变化.

$$A^*\left(\frac{1}{r}\right)e^{i(\omega t-kr)}$$

这种形式可以通过将其代入用球坐标系描述的方程来验证,这个问题留作习题在后面叙述.

13.11　稳定性理论

流动流体或静止流体可能变得不稳定,从而使它的流动特征或几何形状经受激烈的变化.稳定性分析的主要问题之一是确定导致流动不稳定的相关参数的范围或临界值.流体运动状态或静止状态是否稳定,可以采用扰动流体的方法来试验,即在与流体相关的几个或所有的参数中用很小的正弦形扰动波来扰动流体.例如可以对一个或多个速度分量进行扰动.实际上,由环境因素引起的小扰动总是存在的.

不稳定效应的一些常见的例子有从层流到湍流的转换,液体射流的破碎,把互不相溶的较重的液体倒在较轻液体上面时的翻转,海洋波浪上浪花的形成和海岸边波浪的破碎等.如前所述,不稳定性可能引起液体的破碎或者向湍流的转换.不稳定性也能引起从一种流动状态到另一种流动状态的转变,虽然这两种状态可能都是层流.这类不稳定性的例子有:

1. 在一块水平热平板上形成六边形涡胞结构的螺旋管形的流动.这些涡胞一道装配成一种棋盘形布置的图像,称之为**贝纳德**涡胞网.

2. 在两个同轴圆筒之间的空间中装满黏性流体,两个圆筒以不同的速度绕轴转动,其间的黏性流体形成层流速度剖面.在这种情况下存在一个相对运动的范围,在该范围内,筒间的流动变成不稳定的,并发展成环形流动的涡胞式结构叠加在旋转流动上.

一般而言,在稳定性分析中,施加于流体的正弦形扰动可以是任意小,方程组可以线性化,并通过分析随后的波的行为对不稳定性作出预测.如果预测是不稳定的,则不能通过线性方程组引申出最终的流动形态.此时,必须考虑完整的非线性方程组.在某些情况下,当大扰动导致不稳定时,用小扰动的线性理论仍能预测稳定的流动.幸运的是这类行为很少出现,因此,线性理论通常是适用的.

对不稳定性的识别是通过检查因施加的扰动所引起的波动的色散方程来进行的.扰动波

可以通过流体传播，而传播常数虚部的值 k_i 可表明扰动是增长的还是消失的．若 k_i 表明是增长的，则称之为**空间不稳定**．相对于坐标系为固定位置的观察者看到的是定常状态，但向下游观察，流动却变成不稳定的．这样的实例有液体射流会变成水滴，还有翼型上层流边界层在下游变成湍流边界层．很显然，空间不稳定的识别在这些例子中是恰当的．

然而，如果观察者以波速 v_p 行进（即观察者为冲浪者），那么在他的位置上可能看到的是波随时间的增长或衰减．为了描述下游的行为，空间考虑是不必要的．随着时间流逝，冲浪者移动，并且总能观察全部的空间位置，而他只需考虑随时间的变化．只要考虑随时间变化的不稳定性的描述称之为**瞬态不稳定性分析**．在这种描述中，可允许 ω 为复数，但是，应假设 k 是实数．ω 的虚部表示增长或者衰减．

在物理上，**空间不稳定**和**瞬态不稳定**指的是同一现象，只要进行仔细地分析，其结果将是相同的．不过，对运动流体而言，我们可以肯定的是，只有坐标系以波速运动时，瞬态分析才能给出正确的结果，而波速可能事先知道或者不知道．

在稳定性分析的最一般形式中，ω 和 k 两者都可为复数，使其在空间和时间两方面都能增长（相对于任何参考系）．当 ω 为复数时，表明振荡是增长或衰减的；当 ω 为纯虚数时，则表明振荡有爆发性的增长或衰减．此外，在所有的相关参数中和速度分量中都可以引入扰动，而且波动可以在任何方向上传播．通常，实际情况允许在这方面作很大的简化，但是必须经过仔细的判断．

不稳定性分为两类，即**对流不稳定性**和**绝对不稳定性**．这种分类是指物理行为，并不是指分析方法．若把一种扰动加入到流体中，当扰动向下游传播时是增长的，则出现**对流不稳定性**．随着时间的推移所有的图像保持相同．像液体射流的破碎就属于这种类型．若整个流体区域最终变成不稳定的，并且随着时间的推移整个流场都发生了改变，则出现**绝对不稳定性**．前面叙述的旋转圆筒问题就属于这种类型．如果假设 ω 和 k 均为复数，那么这两类不稳定性都是可以预测的，并且在这种情况下无需预先假定是属于哪一类不稳定性．另外，对小扰动而言，通过允许 ω 为任意值的方法可构成任何类型的脉冲输入或周期输入．

在稳定性文献中几乎只使用瞬态分析，而不用空间分析，因为用瞬态分析方法通常可获得较为简单的色散方程．坐标系可以这样选择，使瞬态分析至少可以给出近似结果，并且只有坐标系以波速运动时瞬态分析法才是精确的，例如，液体射流的经典分析就是通过把坐标系放在运动射流上获得的．然而对射流而言，波速与液体速度是否相同并不清楚，所以波可以沿着液体表面以相对于射流的平均速度进行传播．在瑞利所作的经典分析中使用的是纯瞬态分析方法，并且假设表面波是射流上的驻波，该分析方法将在下节作概要介绍．由这种假设所引起的误差是非常小的，因为理论预测与实验结果相比是惊人的一致．

13.12　液体射流的稳定性

图 13-13 显示的是一股细的液体射流，其半径为 a，速度为 U．作用于表面波的恢复力是由表面张力产生的．任何液体射流都不可避免地破碎或小液滴．射流表面上的小扰动总是存在的，而且扰动会增长，并最终将射流夹断，形成液滴．这些液滴的大小形成一种分布，这种分布

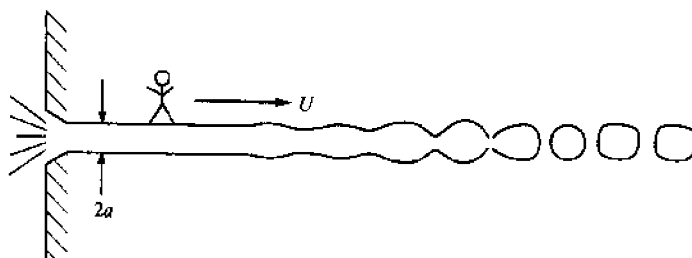


图 13-13　液体射流的破碎．观察者随射流以速度 U 运动

以理论预测的液滴尺寸为分布中心.

我们依照瑞利原来的分析,选择一个建立在运动液体上的参考系,并假设扰动是驻波,其波数是 k,频率是 ω. 不稳定性的判据是 ω 有负的虚部(假设波的形式是 $e^{i\omega t}$). 当 k 小于某个临界值时,我们将确定出 ω,该 ω 是虚数,并为负虚数(表明波是瞬时增长的),这意味着波长要大于某个临界值,该临界值正是射流的周长 $2\pi a$. 黏性效应对临界值的影响可以忽略,故不予考虑.

流动是无旋的,因此可以引入速度势 ϕ. 选择柱坐标系 r, θ, z,如图 13-14 所示. 射流表面取为 $r = a + \eta$,其中 η 可以是 θ 和 z 的函数,从而可计及三维扰动.

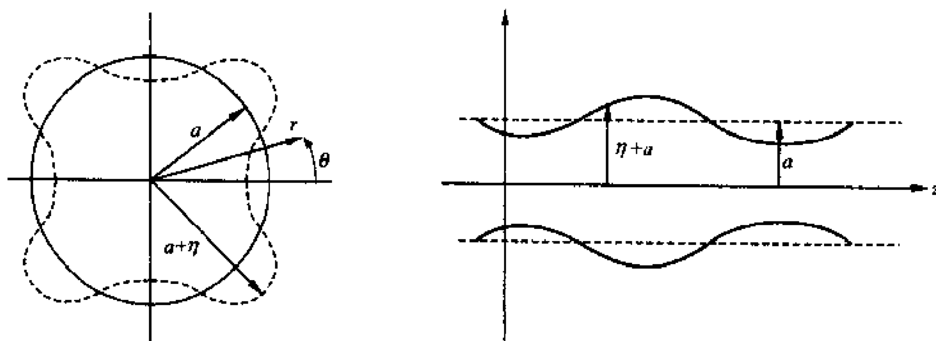


图 13-14　受扰动的射流. 坐标系建立在运动射流上

表面与半径为 a 的测柱面之间的偏差为 η,假设 η 与 a 相比为小量,即 $\eta \ll a$,并且 $\eta = \eta(\theta, z)$. 我们考虑 θ 的第 n 个傅里叶分量,k 是实数,并且在 z 方向是一个驻波.

$$\eta = \eta^* e^{i\omega t} \cos n\theta \cos kz$$
$$\eta^* = \eta_0 \tag{13.40}$$

相对于运动射流,对扰动速度引入速度势 ϕ. 根据第六章可知,该速度势满足拉普拉斯方程(虽然液体运动随时间是变化的)

$$\nabla^2 \phi = 0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \tag{13.41}$$

其边界条件是

$$-\left.\frac{\partial \phi}{\partial r}\right|_{r=a} = \left.\frac{\partial \eta}{\partial t}\right|_{r=a} = \left. v_r \right|_{r=a} \tag{13.42}$$

该条件是在 $r = a$ 处,而不是在 $r = a + \eta$ 处计算的一阶量. 方程(13.14)的解具有如下的形式:

$$\phi = \Phi(r) \cos r\theta \cos kz$$

因此对 $\phi(r)$ 有

$$\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + k^2\right)\Phi = 0 \tag{13.43}$$

方程(13.43)的解是 $I_n(kr)$,是一个 n 阶的修正贝塞尔函数

$$\Phi(r) = (\text{常数}) \cdot I_n(kr)$$

其中常数由边界条件(13.42)来确定,可得

$$\phi = -i\eta_0 \omega e^{i\omega t} \cdot \frac{I_n(kr)}{k I'_n(ka)} \cos n\theta \cos kz \tag{13.44}$$

现在,必须用色散方程来关联 k 和 ω,而表面张力必须与液体表面两侧的压强差相平衡.该压强差 Δp 可表示为

$$\Delta p = T\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

其中 T 是表面张力,R_1 和 R_2 分别是射流表面在 r-θ 平面和 r-z 平面上的曲率半径.在与圆柱形状偏差很小的情况下,曲率半径分别是

$$\frac{1}{R_2} = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{a+\eta}\left\{1 - \frac{\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2}}{a+\eta}\right\} \cong \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}\left(\eta + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2}\right) \tag{13.45}$$

在忽略二阶速度项的情况下,非定常伯努利方程(6.9)变为

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} = 常数 \tag{13.46}$$

在未受扰动的射流表面内侧上的压强大于大气压强,其压强差可表示为 T/a.当射流受到扰动时,压强相对于定常状态值的变化量是

$$\Delta p = T\left[-\frac{1}{a^2}\left(\eta + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2}\right) - \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}\right] = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}\bigg|_{r=a} \tag{13.47}$$

根据式(13.44)得到的 $(\partial\phi/\partial t)|_{r=a}$ 和由式(13.40)得到的 η,将这些代人上式可得

$$\omega^2 = -\frac{T}{\rho a^2}(1 - n^2 - k^2a^2)\frac{kI'_n(ka)}{I_n(ka)} \tag{13.48}$$

其中 I_n 是 n 阶修正贝塞尔函数,I'_n 是关于角变量的导数.对实数角变量而言,I_n 和 I'_n 总是正值.对所有的 $n \geqslant 1$ 的值(非对称模式),$\omega^2 > 0$,故 ω 是实数,在这种情况下对所有的 k(即所有的波数和波长)而言,行为是振荡的和稳定的.因此,只有 $n=0$ 的模式(单纯的圆)才能导致不稳定性,所以只有 $ka<1$ 的情形.在 $ka<1$(也就是波长大于射流的周长)的情况下,ω^2 是负数,ω 是虚数,所以波动将按指数规律增长.由于不存在衰减机制,波动只能增长,因此这里仅考虑 ω 的负的虚数根.对于 $ka<1$ 的不稳定模式($n=0$)以速率 $e^{\sigma t} = e^{i\omega t}$ 增长,这里 σ 是正的实数

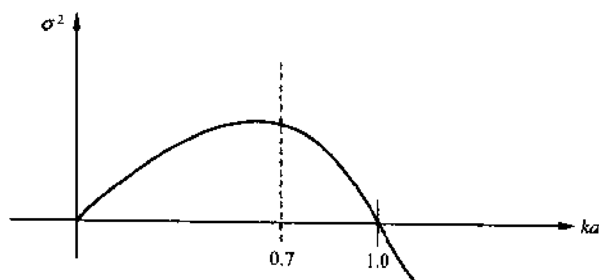


图 13-15 射流上圆形扰动的选择性放大

$$\sigma = \left[\frac{T}{\rho a^3}(1 - k^2a^2)\frac{ka\,I_0^1(ka)}{I_0(ka)}\right]^{1/2} \tag{13.49}$$

该值表明选择的放大倍数取决于(ka)值,并且在(ka)=0.7 时有最大增长率.图 13-15 显示了 σ^2 随(ka)的变化曲线.对水而言,放大倍数达到 1000 倍时,对于直径为 1cm 的射流要 0.8s,对于直径为 1mm 的射流只要 0.025s.

13.13 旋转圆筒之间流动的稳定性

在两个共轴并作相对转动的圆筒之间的定常层流,在某些条件下会变得不稳定.这种不稳

定性会产生一种新的和更加复杂的层流.

现在考虑两个很长的共轴圆筒之间的定常层流,其中内筒半径为 R_1,外筒半径为 R_2,两筒分别以角速度 ω_1 和 ω_2 旋转,ω_1 和 ω_2 可正可负,这些如图 13-16 所示.

两筒之间层流的运动方程是

$$\frac{d^2 v_\theta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv_\theta}{dr}-\frac{v_\theta}{r^2}=0 \tag{13.50}$$

相应的边界条件是

$$v_\theta = R_1\omega_1,\quad r = R_1$$

$$v_\theta = R_2\omega_2,\quad r = R_2$$

该定常流动的解(根据习题 5.56)是

$$v_\theta = Ar+\frac{B}{r}$$

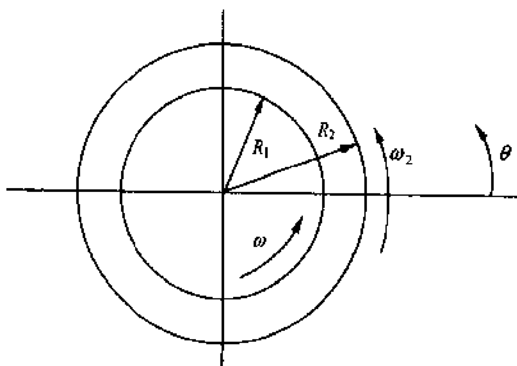


图 13-16　两个旋转的同轴圆筒,其间有黏性液体

$$A=\frac{\omega_2 R_2^2-\omega_1 R_1^2}{R_2^2-R_1^2} \tag{13.51}$$

$$B=\frac{(\omega_1-\omega_2)R_1^2R_2^2}{R_2^2-R_1^2}$$

这里暂时考虑任何一种旋转流体,而不必是旋转圆筒之间的流体.设想分别在任一半径为 r_1 和一半径为 $r_2(r_2>r_1)$处的两个流体质点交换位置,原来两质点的角动量相等.由角动量守恒原理,原来位于 r_1 处的质点现在的速度是 $r_1v_{\theta1}/r_2$.而在 r_2 处的当地压强梯度是

$$\left(\frac{dp}{dr}\right)_{r_2}=\frac{\rho v_{\theta_2}^2}{r_2}$$

如果该压强梯度大于为了平衡离心力所需要的压强梯度,那么现在位于 r_2 处的流体点将运动回到它原来的位置 r_1 处(流体是稳定的).这就是说,如果

$$\left(\frac{dp}{dr}\right)_{r_2}>\frac{\rho}{r_2}\left(\frac{r_1v_{\theta1}}{r_2}\right)^2 \tag{13.52}$$

而且

$$\frac{v_{\theta2}^2}{r^2}>\frac{1}{r_2}\left(\frac{r_1v_{\theta1}}{r_2}\right)^2$$

因此,旋转流体中的稳定性判据是

$$(r_2v_{\theta2})^2>(r_1v_{\theta1})^2 \tag{13.53}$$

把流体的单位环量定义为 $C=v_\theta\cdot r$ 是方便的,那么用 C 表示的旋转流体,如果

$$\frac{d|C|}{dr}<0 \tag{13.54}$$

则该旋转流体是不稳定的.

将这个判据应用于旋转圆筒,可得

$$C=Ar^2+B$$
$$\frac{dC}{dr}=2Ar \tag{13.55}$$

在 R_1 处可任意地取 $\omega_1>0$ 和 $C>0$.现在,ω_2 可以是正值或为负值(两圆筒可同向或者反向

转动).稳定性判据变为

$$
\begin{aligned}
&\text{稳定}:\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}r}>0, \quad \omega_2 R_2^2>\omega_1 R_1^2 \\
&\text{不稳定}:\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}r}<0, \quad \omega_2 R_2^2<\omega_1 R_1^2
\end{aligned} \tag{13.56}
$$

这个结果是瑞利首先得到的,用图形示于图 13-17(a).负的 ω_2 表示圆筒反向转动.

更准确的稳定性计算是由 G. I. 泰勒作出的.他假设在所有速度分量中有轴对称的类波扰动.他的结果示于图 13-17(b),由图可见当 ω_1 为小值时,在 $\omega_2<0$ 的情况下存在一个稳定区.

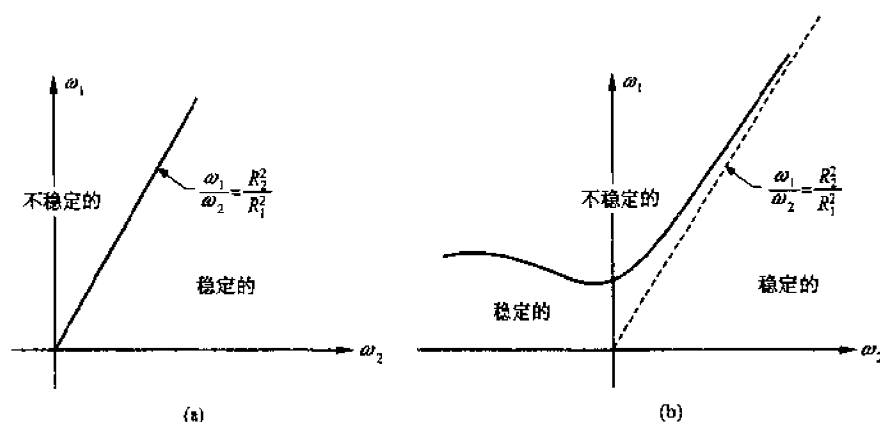


图 13-17　两圆筒间层流的稳定性曲线图(a)瑞利解;(b)泰勒更精确的分析解

在不稳定性开始以后,流动会发展成另一种定常状态,该状态取决于 ω_1/ω_2 值.如果 $\omega_1/\omega_2>0$(也就是圆筒同向旋转),那么流动将在 r-z 平面上发展成一系列的具有环量的圆环形涡胞,这些涡胞叠加在旋转速度 v_θ 之上.参看图 13-18.

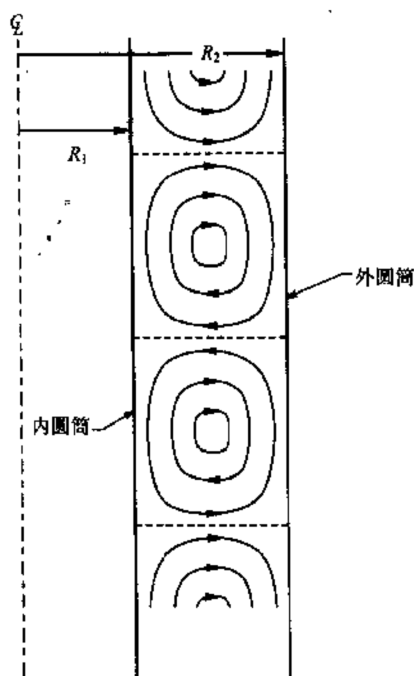


图 13-18　当 $\omega_1/\omega_2>0$ 时,在不稳定性开始以后,过圆筒轴的横截面上显示的环形涡胞.该图像叠加在转动上

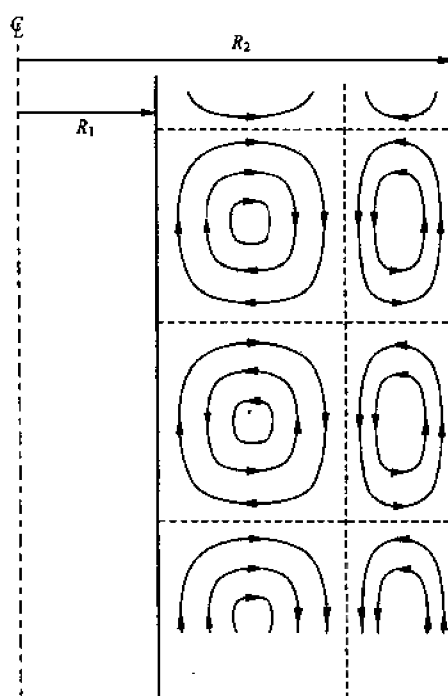


图 13-19　当 $\omega_1/\omega_2=-1.5$ 时,不稳定性开始以后的环形涡胞系.两圆筒反向旋转

如果 $\omega_1/\omega_2<0$,在不稳定性开始以后的流动图像变得更加复杂,并发展成双系列的圆环形涡胞形式.当 $\omega_1/\omega_2=-1.5$ 时,这样的图像示于图 13-19.

13.14　流体之间界面的稳定性

在许多不同的条件下,两种不同流体之间的边界可能会变成不稳定的,由此得到的结果具有重要的应用价值.如果流体是静止的,若将较重的流体置于较轻的流体之上时就存在不稳定性.这两种流体会倒转过来变成稳定状态,使重的液体处于底部.这些流体可以是不相溶的液体,或者是不同密度的气体,它们在倒转的同时还有扩散.当两种流体被界面隔开时,一般存在两类不稳定性,一类是两种流体作相对运动,另一类是界面自身运动,分别称之为(1)**开尔文-海尔姆霍兹不稳定性**和(2)**瑞利-泰勒不稳定性**.

当两种不同的液体或者气体与液体沿着平行于分隔它们的界面作相对运动时,出现的是**开尔文-海尔姆霍兹不稳定性**.在大部分感兴趣的问题中,界面通常是水平的,但是并不需要一定是水平的.在界面处由剪切力驱动的波动当相对速度超过某临界值时会发展,并变成不稳定的.像海洋浪花就是因风驱动的重力表面波不稳定性的例子.

当剪切力不存在或者不重要时,垂直于界面自身的扰动可能引起不稳定性,称之为**瑞利-泰勒不稳定性**.液体射流的破碎就属于这类不稳定性.另一个例子是界面加速运动的不稳定性.如果一个分层的液体系统在垂直于界面向着较稠密的液体方向加速运动时,不稳定性可能会产生.假若界面是水平的,并且较稠密的液体位于底部,如果向下的加速度超过自由落体加速度 g,那么不稳定性就会出现.

还有一个瑞利-泰勒不稳定性的例子是,一个竖直的充满液体并且顶部被密封的刚性圆管的底部自由表面的破碎问题.考虑一个半径为 a,顶部密封的汽水吸管,或者一个半径为 a,颠倒放置的长颈瓶.如果吸管或瓶子内充满密度为 ρ_2 的液体,垂直高度小于大气压的等效值(即 $\rho_2 gh<p_{at}$),那么液体将处于静态平衡,因为大气压强大于界面处液体的静压强,如图13-20所示.然而,如果开口直径超过某一临界值,那么这种界面将是不稳定的,开口直径的临界值取决于液体的表面张力.一旦表面是不稳定的,液体将会不断流出或汩汩地流出,空气将取代液体.

表面张力是自由表面上对小扰动的恢复力,自由表面能衰减波长足够小的扰动.如果开口直径很大,以至于允许的波长超过了临界值,那么,不稳定性将发生,并使界面破裂.这里仅给出分析的结果.如果

$$a^2 g(\rho_2-\rho_1)<T(j'_{1,1})^2 \tag{13.57}$$

则图形是稳定的.式中 a 是管口的半径,ρ_2 是液体的密度,ρ_1 是界面下边空气的密度或其他气体的密度.T 是界面的表面张力.$j'_{1,1}$是贝塞尔函数的一阶导数 j'_1 的第一个正的零点.这第一个正的零点近似为 2.0.对暴露于空气中的水管而言,T 值近似为 70dyn/cm(0.07N/m),因此,a 的临界值近似是 0.5cm.

液体和空气(或覆盖气体)之间的界面没有必要一定在管子的底部,其实界面可以在管道或圆筒内部的任何位置处.界面的形状取决于液体是浸湿的还是非浸湿的,还取决于表面张力的数值.如果液体正好充满管道,并附着于尖的拐角处,那么,附着角只是由管内流体的准确数量所确定的,任何超过临界值的数量都将完全漏掉.

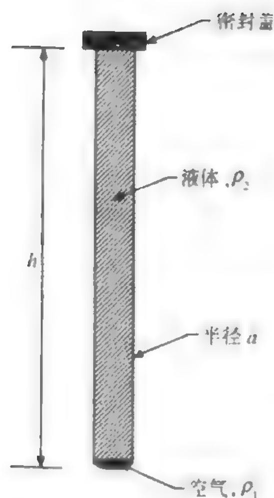


图 13-20　装有密度 ρ_2 的液体并处于静平衡的管子.界面是由表面张力确定的曲面

13.15　小结

这里仅讨论了流体稳定性的几个例子,这些例子基本上与

日常的经验有关.整个流体稳定性学科在数学上是复杂的,而且是现代研究中更感兴趣和更具挑战性的领域之一.稳定性分析的结果对许多实际工程问题具有重要的应用价值,其应用范围从简单的管流到船舶设计、航空设计、热效应和热交换、气象分析与预测等等.

希望更深入钻研本学科的读者可阅读参考文献,这些文献是该领域的权威所著,完全值得一读.

参考文献

1. Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford, 1961.
2. Drazin, P. G., and Reid, W. H., *Hydrodynamic Stability*, Cambridge, 1981.
3. Lighthill, James, *Waves in Fluids*, Cambridge, 1978.
4. Lin, C. C., *The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge, 1955.
5. Morse, P. M., *Vibration and Sound*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1948.
6. Raleigh, Lord, "On the Instability of Jets," *Proc. London Math. Soc.*, 10, p.4, 1879.
7. Raleigh, Lord, *Theory of Sound*, (2 vols.), 2nd edition, London, Macmillan, 1896(also Dover, 1945).
8. Sherman, F. S., *Viscous Flow*, McGraw-Hill, 1990.
9. Taylor, G. I., "Stability of a Viscous Liquid Contained Between Two Rotating Cylinders," *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A223, p.289, 1923.

例　题

13.1 证明行波的群速度是$\partial\omega/\partial k_r$.

解 ☞ 考虑振幅相等、频率为 ω_1 和 ω_2 的两道波,这两个频率非常接近.由此可以写出$(\omega_1+\omega_2)/2=\omega_0$ 和$(\omega_1-\omega_2)=\Delta\omega$. $(k_1+k_2)/2=k_0$ 和$(k_1-k_2)=\Delta k$.与 ω_0 有联系的是 k_0,与 ω_1 相关的是 k_1,与 ω_2 相关的是 k_2.暂时假定 k 是实数.两道波的和是

$$e^{i(\omega_1 t-k_1 x)}+e^{i(\omega_2 t-k_2 x)}$$

利用等式

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

那么,两道波的和可表示为

$$2e^{i\{[(\omega_1+\omega_2)/2]t-[(k_1+k_2)/2]x\}}\cos\left[\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}-\frac{(k_1-k_2)x}{2}\right]$$

这代表一个频率为 ω_0 的波,其相速度为 ω_0/k_0,在频率为$(\omega_1-\omega_2)/2$ 的包络波内行走,该波以群速度 $\Delta\omega/\Delta k$ 传播.在 $\Delta\omega$ 很小的限制条件下,$\Delta\omega/\Delta k$ 变成$(\partial\omega/\partial k)|_{\omega_0}$,这就是群速度 v_g.如果 $\Delta\omega$ 与 ω_0 相比不是小量,那么,群速度的概念是没有意义的.包络波可以被认为是慢拍频的调制,该拍频引起频率为 ω_0 的载波的振幅发生振荡.参看图 13-21.比如,对于一个 1000Hz 的音乐纯音,叠加上另一个 1001Hz 的纯音,一个拍(或振幅的振荡)将出现,其频率为 0.5Hz(周期为 2s),而纯音的频率可以认为是 1000.5Hz.这种现象被使用于钢琴的调谐器把所有的弦矫单一音调变成曲调.

13.2 求解运动空气中关于平面声波的色散方程.空气相对于静止观察者的运动速度是 U_0.空气向正 x 方向运动.

解 ☞ 运动方程是

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x}$$

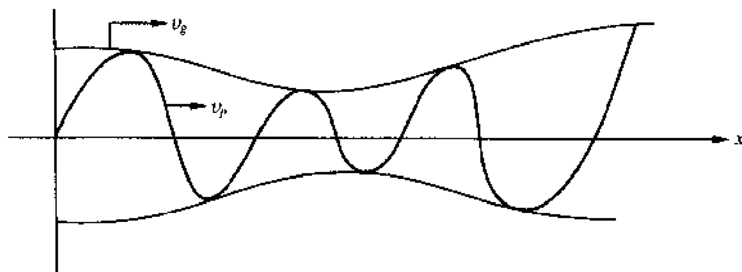


图 13-21　频率为$(\omega_1-\omega_2)/2$的调制信号包封频率为$\omega_0=(\omega_1+\omega_2)/2$的载波.如果发生色散,$v_g$通常小于$v_p$;如果没有色散,则$v_g$和$v_p$相等

连续方程是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0$$

等熵关系式是

$$p\rho^{-\gamma}=p_0\rho_0^{-\gamma}$$

经过线化后可得

$$\rho_0\frac{\partial u'}{\partial t}+\rho_0 U_0\frac{\partial u'}{\partial x}=-\frac{\partial p'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t}+\rho_0\frac{\partial u'}{\partial x}+U_0\frac{\partial \rho'}{\partial x}=0$$

$$p'=\frac{\gamma p_0\rho'}{\rho_0}$$

假定平面波解的形式是

$$\rho'=\rho^* e^{i(\omega t-kx)}$$

由此可得

$$i\omega\rho_0 u^*-ik\rho_0 U_0 u^*-ikp^*=0$$

$$i\omega\rho^*-ik\rho_0 u^*-ikU_0\rho^*-0$$

$$p^*\rho_0-\gamma p_0\rho^*=0$$

计算系数行列式给出色散方程为

$$(\omega-kU_0)^2=\frac{k^2\gamma p_0}{\rho_0}$$

而相速度是

$$v_p=\frac{\omega}{k}=U_0\pm\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

该式表明波相对于运动空气而言以普通声速传播.

13.3　证明球对称的声波具有下列形式的相位复矢量正弦形的解

$$\frac{1}{r}e^{i(\omega t-kr)}$$

解　考虑空气中的声波.控制方程为

$$\rho\left[\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right]=-\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r)=0$$

$$p\rho^{-\gamma} = p_0\rho_0^{-\gamma}$$

经线化后可得

$$\rho_0 \frac{\partial v'_r}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\rho_0}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v'_r) = 0$$

$$p'\rho_0 = \gamma p_0 \rho'$$

将题中给出的相位复矢量形式的解代入方程，可求得色散方程为

$$\omega^2 = -\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\left(\frac{1}{r} - \mathrm{i}k\right)^2$$

对 k 和 v_p 可得

$$k = \pm\,\omega\sqrt{\frac{\rho_0}{\gamma p_0}} \mp \frac{\mathrm{i}}{r}$$

$$v_p = \frac{\omega}{k_r} = \pm\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

因此，$k_i = \mp 1/r$，所以解的形式是

$$\frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_r r - \mathrm{i}k_i r)} = \frac{常数}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_r r)}$$

因为$(k_i r)$是常数. 这种解也可以通过代入在球坐标系中对任意参数 A 的波动方程的方法得到证明

$$\nabla^2 A = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

其中 a 是$\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$.

13.4 在计及黏性和热传导的情况下，求空气中平面声波的色散方程.

解答 控制方程组是运动、连续、物态和能量方程. 等熵关系在这里是无效的.

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\zeta + \frac{4}{3}\mu\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$$

$$p = \rho RT$$

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \Phi$$

其中 ζ 是3.4节中黏性的第二系数，k 是热传导系数，Φ 是耗散函数，对方程进行线化时，Φ 变成二阶量，并被忽略. 令 $p = p_0 + p'$，$\rho = \rho_0 + \rho'$，$T = T_0 + T'$和$u = u'$，线化后的方程组变成

$$\rho_0\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \left(\zeta + \frac{4}{3}\mu\right)\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}$$

$$\rho_0 c_p\frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{\partial p'}{\partial t} + \kappa\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial u'}{\partial x} = 0$$

$$\frac{p'}{p_0} = \frac{T'}{T_0} + \frac{\rho'}{\rho_0}$$

假设是相位复矢量正弦形解，可得

$$\mathrm{i}\rho_0\omega u^* - \mathrm{i}kp^* + k^2\left(\zeta + \frac{4}{3}\mu\right)u^* = 0$$

$$\mathrm{i}\omega\rho^* - \mathrm{i}k\rho_0 u^* = 0$$

$$\frac{p^*}{p_0} - \frac{T^*}{T_0} - \frac{\rho^*}{\rho_0} = 0$$

$$\mathrm{i}\omega\rho_0 c_p T^* - \mathrm{i}\omega p^* + k^2\kappa T^* = 0$$

通过相位复矢量的系数行列式为零导出的色散方程为

$$\left[\frac{\kappa}{\rho_0 c_p} + \frac{\mathrm{i}\omega\kappa}{p_0\rho_0 c_p}\left(\frac{4}{3}\mu + \zeta\right)\right]k^4 - \left[\frac{\omega^2\kappa}{p_0 c_p} - \mathrm{i}\omega + \frac{\omega^2}{a^2\rho_0}\left(\frac{4}{3}\mu + \zeta\right)\right]k^2 - \frac{\mathrm{i}\omega^3}{a^2} = 0$$

这是 k 的四次方程，k 是复数，并导致衰减和消散.式中 a 是普通的声速$\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$.关于 k 的显解留作补充习题.

13.5 考虑一扬声器作正弦形驱动，其振幅 x_0 为 0.10mm.假设驱动器是平的平面.计算驱动面的速度和扬声器表面上空气压强的振幅.

解答　可以把扬声器表面的速度取为 u，而在零相位处的位移为 x.令在零相位时的速度为 u，那么

$$u = \Re u_0 e^{\mathrm{i}\omega t} = u_0\cos(\omega t)$$

和

$$x = x^* e^{\mathrm{i}\omega t}$$

因为

$$u = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

随后有

$$u_0 = \mathrm{i}\omega x^*$$

和

$$x = \frac{u_0}{\omega}\sin(\omega t) = x_0\sin(\omega t)$$

根据方程(13.19)有

$$p^* = a\rho_0 u_0$$

假设环境条件是标准的，即 $p_0 = 101000\text{Pa} = 101\text{kPa}$ 和 $T_0 = 300\text{K}$.气体常数 R 是 0.287kJ/(kg·K)，所以，$\rho_0 = p_0/RT_0 = 1.17\text{kg/m}^3$.声速 a 是$a = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0} = 348\text{m/s}$.

压强振幅是

$$p^* = (348)\cdot(1.17)\cdot(x_0\omega) = (348)(117)(2\pi f x_0)$$

对于各种频率得出的结果示于下表，其中 $\omega = 2\pi f$，压强分别用 kPa 和 psi 为单位.

f/Hz	50	100	1000	10000
p^*/kPa	0.0128	0.0256	0.256	2.56
p^*/psi	0.00186	0.0037	0.037	0.37

由表可见，对给定的振幅而言压强的变化是很小的，除非当频率变得很大.不过，这些高频下很大的压强变化是不现实的，因为在这种情况下扬声器所需要的功率是不切实际的.在高频下扬声器的振幅实际上比本题给定的值要小得多.

13.6 对上题计算在振幅为 0.1mm 的条件下驱动扬声器所需要的平均功率.在高频下扬声器的振幅比实际应用值小吗？扬声器的表面积取为 0.01m^2.

解☞　平均功率可以表示为作用于扬声器表面上的力与速度的乘积在一个周期上的积分的平均值.作用于表面上的力是扰动压强与表面积的乘积的两倍,这是因为当扬声器的前面经受压缩的同时,其背面要经受稀疏或抽吸,反之亦然.而大气压的定常值在扬声器表面的正反两面是相互抵消的.

$$平均功率 = P = \frac{2}{T}\int_0^T p^*(\cos\omega t)\cdot(u_0\cos\omega t)A\mathrm{d}t$$

式中 T 是由$(2\pi/\omega)$给出的振动周期.由上题知 $p^* = a\rho_0 u_0$,所以平均功率 P 的结果是

$$P = a\rho_0 u_0^2 A = a\rho_0 A x_0^2 \omega^2$$

数值结果是

f/Hz	50	100	1000
平均功率/W	3.5	14	1400

可以发现功率的上升与频率的平方成比例,因此,功率只有几瓦的真实的扬声器,在高频下振幅必须非常小.用肉眼很难看出高频扬声器的运动,然而,用肉眼却很容易地看出低音扬声器的振动.

13.7　半径为 a 的水射流破碎后,水滴可能的半径为多少?

解☞　根据液体射流的稳定性分析,我们知道增长最为迅速的扰动波的波长可以表示为 $ka = 0.7$(即,$\lambda = 2\pi a/0.7$).当扰动波开始增长时,包含在一个波长内的射流的体积正是夹断射流形成水滴的量.这个体积等于半径为 r 的球形水滴的体积,则有

$$\pi a^2\left(\frac{2\pi a}{0.7}\right) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

由此可得 $r = 1.9a$.因此,水滴的半径近似是射流半径的两倍.这一结果很容易通过观察射流的破碎而得到证实.

13.8　在包括黏性效应,但是忽略第二黏性系数效应的液体中,求平面声波的色散方程?

解☞　对液体而言,关联压强与密度的恰当的基本方程是

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} = \frac{\beta}{\rho}$$

其中 β 是体积弹性模量.忽略温度变化和这些变化对密度的影响是很好的近似,因为在线性分析中,耗散为二阶小量,并可以忽略(这些与气体是不同的,在气体中等熵压缩会引起温度发生变化).除了上面的基本方程之外,运动方程和连续方程是

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$$

经线性化并代入相位复矢解可得

$$p^* - \frac{\beta}{\rho_0}\rho^* = 0$$

$$\mathrm{i}\omega\rho^* - \mathrm{i}k\rho_0 u^* = 0$$

$$\mathrm{i}\omega\rho_0 u^* - \mathrm{i}kp^* + k^2\mu u^* = 0$$

利用克拉默法则,由相位复矢系数行列式为零,得到的色散方程为

$$\omega(k^2\mu + \mathrm{i}\omega\rho_0) - \mathrm{i}\beta k^2 = 0$$

在黏性为零的极限条件下可简化成

$$k^2 = \frac{\omega^2\rho_0}{\beta}$$

和

$$v_p = \pm\sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}}$$

其中$\sqrt{\beta/\rho_0}$是液体中的声速.

k^2 的解是

$$k^2 = \frac{\omega^2\rho_0}{[\beta + \mathrm{i}\omega\mu]}$$

由此得到的 k 是

$$k = \pm\sqrt{\frac{\omega^2\rho_0}{\beta^2 + \omega^2\mu^2}} \cdot \sqrt{\beta - \mathrm{i}\omega\mu}$$

该式可以分解成实部和虚部

$$k_r = \pm\frac{\sqrt{\omega^2\rho_0}}{[\beta^2 + \omega^2\mu^2]^{1/4}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$k_i = \mp\frac{\sqrt{\omega^2\rho_0}}{[\beta^2 + \omega^2\mu^2]^{1/4}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

其中

$$\theta = \arctan\left(\frac{\omega\mu}{\beta}\right)$$

利用半角公式,可以将 k_r 和k_i 表示为

$$k_r = \pm\sqrt{\frac{\omega^2\rho_0}{2}}\left[\frac{\sqrt{\beta^2 + \omega^2\mu^2} - \beta}{\beta^2 + \omega^2\mu^2}\right]^{1/2}$$

$$k_i = \mp\sqrt{\frac{\omega^2\rho_0}{2}}\left[\frac{\sqrt{\beta^2 + \omega^2\mu^2} - \beta}{\beta^2 + \omega^2\mu^2}\right]^{1/2}$$

对于 k_r 的正号和对应的k_i 的负号代表沿正x 方向行走的衰减波.由 $\mu=0$ 时的极限可给出普通的声速$\sqrt{\beta/\rho_0}$.在计及黏性的情况下可以发现声速 ω/k_r 是ω 的函数.关于黏性对声速的影响的进一步讨论可参看习题 15.13.

水的 β 值和μ 值对衰减的影响可以忽略不计,除非距离过分地大.不过,若在分析中计及黏性的第二系数,可以发现实际上衰减将稍大于上述方程的预测值.第二黏性系数取决于频率,为了描述它的影响仅简单地修改上述结果是不可能的.

补　充　习　题

13.9　对黏性气体中的声波,求 k_r 和k_i 的显式表达式.其衰减怎样随频率而变化?用这一结果解释,为什么雾中音响信号喇叭要使用低频声?

13.10　在习题13.5和13.6中,对一个固定的功率输入作出扬声器偏移振幅随频率的变化曲线,令输入功率分别为1W和50W.假设扬声器是6in直径的锥形喇叭筒.观察一个实际扬声器.你能看见扬声器锥形喇叭筒在运动吗?在很低频率下低音扬声器会怎样?

13.11　利用空间稳定性判据建立液体射流的破碎问题,但不必求解.在固定于喷管上的参考系中使用复数 k 和实数ω.(这不是一个简单的问题,本题是为有更多数学爱好的读者设计的.)

13.12　尝试下列简单实验:

(a)从瓶中非常缓慢地倒水或者打开水龙头,这样会形成细细的层流水流.观察在下游表面上弱波的形成,直到破碎成水滴.(b)将瓶中装入半瓶水,然后再注入电动机润滑油或者烹调油.让液体处于静止.盖上瓶塞,并迅速将其倒置.在两种液体翻倒时注意液体的指印现象.最后当液体再次静止时油又回到顶部.(c)把一个小石子扔进静止的水池中,注意由此所形成的圆形波纹.你能看到任何消散效应吗?(d)如果你有机会去海滨访问,注意迎面走来的波浪会趋于与海岸相平行.当风很大时,到外海去观察浪花.

13.13 利用习题13.8的结果,确定出黏性对声速、色散和衰减的影响?放入一些真实的数据来核对黏性效应的意义.对10Hz的低频和10000Hz的高频计算海水的声速和衰减常数k_i.你的结论是什么?产生明显衰减效应所必须的距离是多少?该结果能阐明鲸鱼的长距离通讯吗?

当然,实际上由传感器在水中产生的波会以柱形、球形或者更为复杂的形状向外传播,所以,即使总能量不衰减,而能量密度可能是减小的.球形波在空间显现正弦形,并且其振幅按$1/r$减小.柱形波是在空间变化的贝塞尔函数,但是在很大的距离处会接近于正弦形行为.另外,第二黏性系数会增强黏性效应.

13.14 一个强烈的瑞利-泰勒不稳定性的引人注目的实例可以通过如下的实验观察到.在一个泡沫聚苯乙烯咖啡杯中差不多装满(但不是完全装满)咖啡或者水.(咖啡加牛奶会更好.)将泡沫聚苯乙烯杯放在坚硬的平的表面上,最好是胶木桌或计算机顶面.用拇指和食指轻轻地拿住杯子的中间,让杯子静止在桌面上.不要让杯子受到任何垂直的力.然后慢慢地、温和地沿桌面滑动杯子.在某一正确的速度下,你将在水面上看到很小的微波,这些微波会增长成脉冲尖峰,实际上脉冲尖峰还会破碎并离开水面,成为水滴飞溅到空气中.杯子沿桌面滑动时会发生震颤.如果你难以激发出微波,可以试着改变速度,或者更温和地拿住杯子,基本上正好能推动杯子,而不是夹紧杯子.另外,你必须使用泡沫聚苯乙烯杯,而不能使用纸杯或塑料杯.你能解释你观察到的是什么吗?

第十三章符号表

a = 声速,半径
c_p = 定压比热
c_v = 定容比热
f = 用每秒钟循环次数表示的频率,赫兹(Hz)
g = 重力加速度
h = 流体的高度
$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$
k = 传播常数,波数
k_r = 传播常数(波数)的实部
k_i = 传播常数(衰减常数)的虚部
p = 压强
P = 功率
r = 径向坐标,半径
R = 气体常数,半径
$\mathcal{R}$ = 表示实部
T = 周期,温度,表面张力
t = 时间
u = x方向的速度
v_r = 在柱和球坐标系中r方向的速度
v_θ = 在柱和球坐标系中方位角方向的速度
v_p = 相速度
v_g = 群速度
β = 体积弹性模量
γ = 比热比
ζ = 第二黏性系数
η = 对圆形的偏离
κ = 热传导系数
λ = 波长
μ = 黏性系数
ν = 运动黏性系数
ρ = 密度
σ = 增长常数
ϕ = 速度势
φ = 相角
Φ = 耗散函数,偏微分方程中r的函数
ω = 角频率,每秒钟的弧度数
$(\ )_0$ = 定常或环境特性,振幅
$(\ )^*$ = 相位复矢量振幅
$(\ )_r$ = 实部
$(\ )_i$ = 虚部
$(\ )'$ = 扰动量
$(\ )_{at}$ = 大气值

附 录

A 流体的一些性质

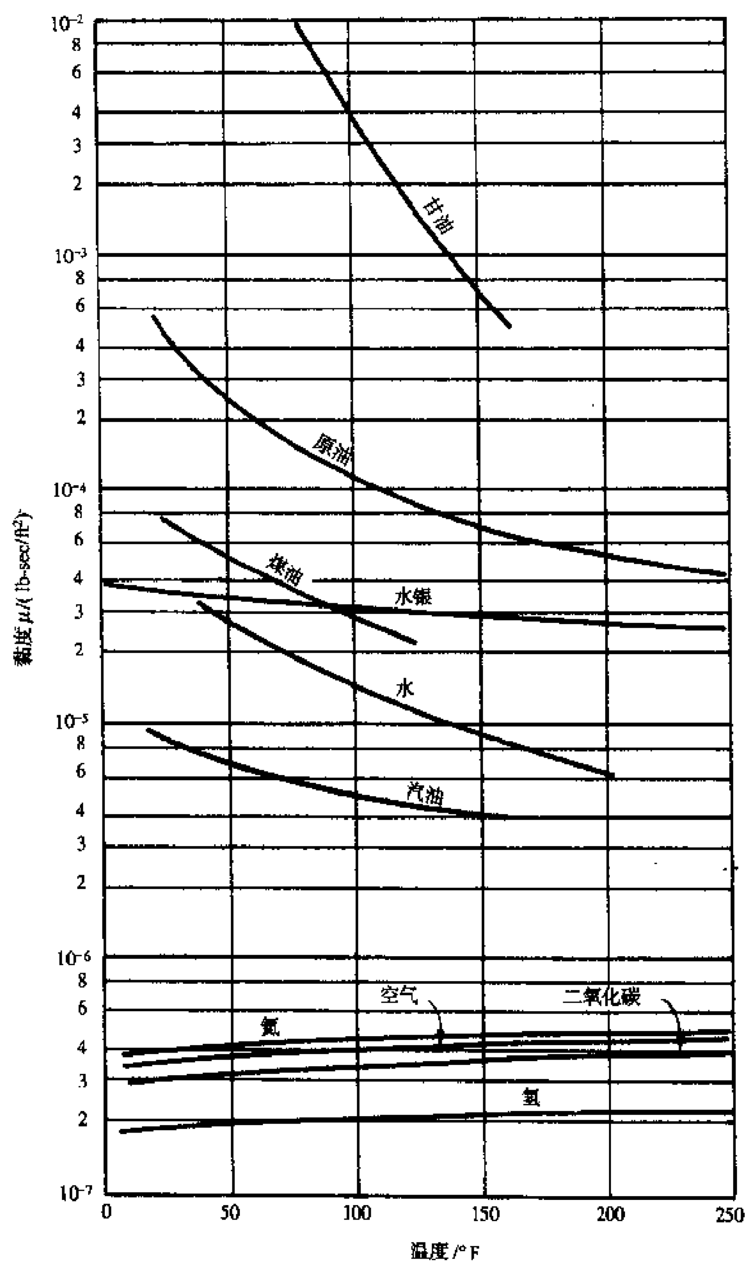


图 A-1 一些流体的绝对黏度

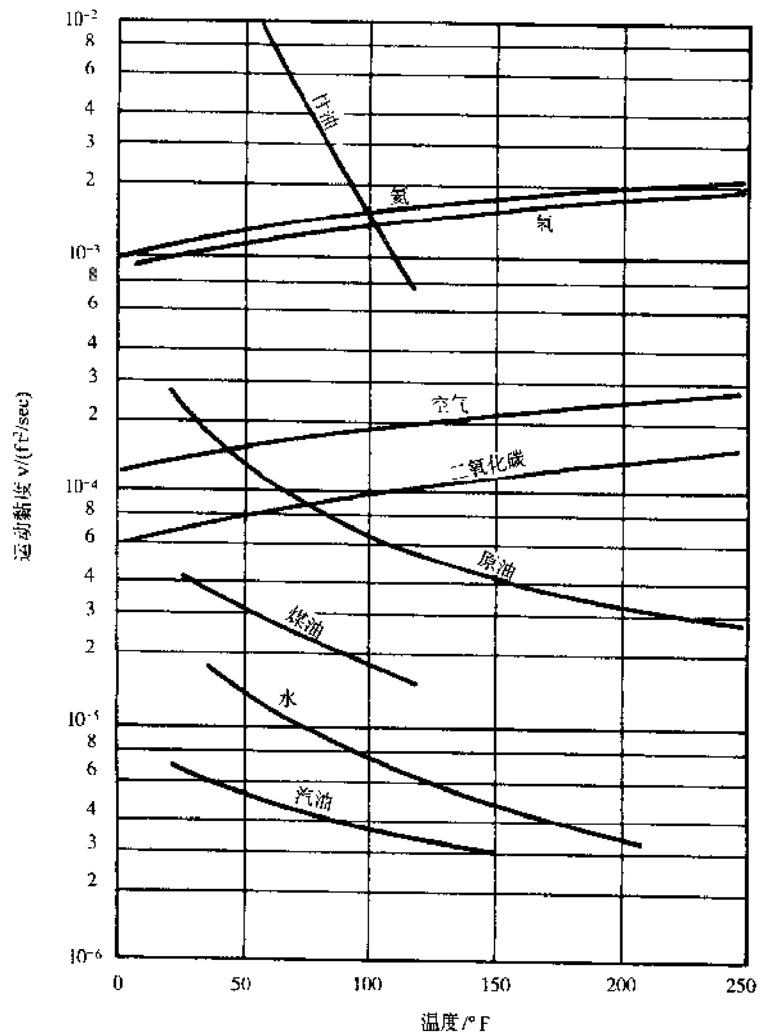


图 A-2　一些流体的运动黏度

表 A.1　大气压下水的性质

温度		密度			黏度			运动黏度		
℃	℉	g/cm^3	kg/m^3	$slugs/ft^3$	$dyn\cdot s/cm^2$ (poise)	$Pa\cdot s$ $(N\cdot s/m^2)$	$lbf\cdot s/ft^2$	cm^2/s (stoke)	m^2/s	ft^2/s
0	32	0.99987	999.87	1.940	1.794×10^{-2}	1.794×10^{-3}	3.746×10^{-5}	1.794×10^{-2}	1.794×10^{-6}	1.930×10^{-5}
4	39	1.00000	1000.00	1.941	1.568	1.568	3.274	1.568	1.568	1.687
5	41	0.99999	999.99	1.941	1.519	1.519	3.172	1.519	1.519	1.634
10	50	0.99973	999.73	1.940	1.310	1.310	2.735	1.310	1.310	1.407
15	59	0.99913	999.13	1.940	1.145	1.145	2.391	1.146	1.146	1.233
20	68	0.998	998.00	1.937	1.009	1.009	2.107	1.011	1.011	1.088
30	86	0.996	996.00	1.932	0.800	0.800	1.670	0.803	0.803	0.864
40	104	0.992	992.00	1.925	0.654	0.654	1.366	0.659	0.659	0.709
50	122	0.988	988.00	1.917	0.549	0.549	1.146	0.556	0.556	0.598
60	140	0.983	983.00	1.907	0.470	0.470	0.981	0.478	0.478	0.514
70	158	0.978	978.00	1.897	0.407	0.407	0.850	0.416	0.416	0.448
80	176	0.972	972.00	1.885	0.357	0.357	0.745	0.367	0.367	0.395
90	194	0.965	965.00	1.872	0.317	0.317	0.662	0.328	0.328	0.353
100	212	0.958	958.00	1.858	0.284	0.284	0.593	0.296	0.296	0.318

表 A.2 大气压下空气的性质

温度		密度			黏度			运动黏度		
℃	℉	g/cm^3	kg/m^3	$slugs/ft^3$	$dyn\cdot s/cm^2$ (poise)	$Pa\cdot s$ ($N\cdot s/m^2$)	$lbf\cdot s/ft^2$	cm^2/s (stoke)	m^2/s	ft^2/s
0	32	1.293×10^{-3}	1.293	2.510×10^{-3}	1.709×10^{-4}	1.709×10^{-5}	3.568×10^{-7}	0.1322	1.322×10^{-5}	1.427×10^{-4}
50	122	1.093	1.093	2.122	1.951	1.951	4.074	0.1785	1.785	1.921
100	212	0.946	0.946	1.836	2.175	2.175	4.541	0.2299	2.299	2.474
150	302	0.834	0.834	1.619	2.385	2.385	4.980	0.2860	2.860	3.077
200	392	0.746	0.746	1.448	2.582	2.582	5.391	0.3461	3.461	3.724
250	482	0.675	0.675	1.310	2.770	2.770	5.784	0.4104	4.104	4.416
300	572	0.616	0.616	1.196	2.946	2.946	6.151	0.4782	4.782	5.145
350	662	0.567	0.567	1.101	3.113	3.113	6.500	0.5490	5.490	5.907
400	752	0.525	0.525	1.019	3.277	3.277	6.842	0.6246	6.246	6.721
450	842	0.488	0.488	0.947	3.433	3.433	7.168	0.7035	7.035	7.570
500	932	0.457	0.457	0.887	3.583	3.583	7.481	0.7840	7.840	8.436

表 A.3 标准状态下空气的性质*

分子量	R	c_p	c_v	k
28.97	$53.34\,\frac{ft\text{-}lbf}{lb^\circ R}$ $1716\,\frac{ft\text{-}lbf}{slug^\circ R}$ $0.287\,\frac{kJ}{kgK}$	$0.240\,\frac{Btu}{lb^\circ R}$ $7.72\,\frac{Btu}{slug^\circ R}$ $1.0035\,\frac{kJ}{kgK}$	$0.171\,\frac{Btu}{lb^\circ R}$ $5.50\,\frac{Btu}{slug^\circ R}$ $0.7165\,\frac{kJ}{kgK}$	1.4

* 给出的是 300K 下国际单位制的值.

表 A.4 标准状态下水的性质

表面张力 T	体积模量 β
$70\times10^{-3}\,\frac{N}{m}$	2.06×10^6 kPa
$3.98\times10^{-4}\,\frac{lbf}{in}$	3×10^5 psi

B 单位和量纲

在流体力学中,我们必然涉及一些可以测量的量,如压强,速度,密度和黏度.这些量通过由定律和定义推导得到的方程联系在一起.每一个方程包含某些或所有力(F),质量(M),长度(L),时间(T)和温度(θ)的基本量纲.为达到定量目的,必须对这些基本量纲确立一组单位.(在电磁理论中,有一个附加的基本量纲[它是任意的].通常取这一量纲为可测量的电荷比较方便,电荷在 mks 单位制中以库仑为单位.因此在电磁学中有五个基本量纲.)

表示物理量之间关系的方程必须在量纲上一致.即,方程的每一项必须有相同的量纲.

当独立确定力和质量的单位时,会引起一个困难.与流体力学有关的学科中,如空气动力学,热力学和传热学,都有它们自己发展起来的处理问题的成熟体系——我们最好尊重它们的特殊需要.

根据牛顿定律,我们知道力和质量不是独立的量纲.力正比于质量和加速度的乘积;即

$$F \propto ma$$

根据量纲的一致性,我们得到

$$(\mathrm{F}) = \left(\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}^2}\right),\ (\mathrm{M}) = \left(\frac{\mathrm{FT}^2}{\mathrm{L}}\right)$$

因此,基本量纲的实际选择有一定的任意性.我们可以用 F,L,T,θ 制,也可以用 M,L,T,θ 制.然后,所有其他量纲可以通过定律和定义以所选择的独立基本量纲来表示.

现在,我们可以用牛顿定律以力和加速度来定义质量单位.我们写出

$$\boldsymbol{F} = ma,\ m = \frac{F}{a}$$

如果力的单位为 lbf 和加速度的单位为 $1\mathrm{ft/sec^2}$,那么质量的单位便为

$$\frac{\mathrm{lbfsec^2}}{\mathrm{ft}}$$

它是当作用力为 lbf 时,能使之产生 $1\mathrm{ft/sec^2}$ 加速度的物质的量.这一质量单位称为 slug.

在国际单位制中,力的单位取作为牛顿(N)和加速度单位为 $\mathrm{m/s^2}$.因此国际单位制中质量的单位是

$$\frac{\mathrm{Ns^2}}{\mathrm{m}}$$

它使当作用力为 1N 时,能使之产生 $1\ \mathrm{m/s^2}$ 加速度的物质的量.这一质量单位称为公斤(kg).

实践中还应用另一个独立于牛顿定律确立的质量单位.磅质量(lb)定义为(在特定的位置上)地球对其的引力等于 1 lbf 的物质的量.当力和质量的单位由独立于牛顿定律确定以后,为了使方程在量纲上一致,我们必须以一个换算因子,k,写出方程.我们有

$$\boldsymbol{F} = kma,\quad F = \frac{1}{g_c}ma$$

和

$$g_c = \frac{ma}{F}$$

量 g_c 的数值和单位决定于对力,质量和加速度所选定的特定单位.一些特定的数值组是

$$g_c = \frac{1(\mathrm{slug})(\mathrm{ft/sec^2})}{\mathrm{lbf}},\quad g_c = \frac{1(\mathrm{gm})(\mathrm{cm/sec^2})}{\mathrm{dyne}}$$

$$g_c = \frac{32.2(\mathrm{lb})(\mathrm{ft/sec^2})}{\mathrm{lbf}},\quad g_c = \frac{1(\mathrm{kg})(\mathrm{m/s^2})}{\mathrm{N}}$$

$$g_c = \frac{9.8(\mathrm{kg})(\mathrm{k/s^2})}{\mathrm{kgf}}$$

由此我们可以看出　　1 slug = 32.2lb

并且我们注意到,当作用力为 lbf 时,1 lb 质量的加速将为 $32.2\ \mathrm{ft/sec^2}$.质量单位 Slug 和 kg 是本书用得最多的单位,因此 g_c 将不在方程中出现.

表 B.1 中列出了 一些物理量和它们的量纲.某些转换因于列在表 B.2 中.

以下例子表明了进行准确转换的方法.求以 ft lbf/lb 为单位的 h_0 的数值.以下等式右边每一个量的数值以所示的单位给定:

$$h_0 = u + pv + \frac{V^2}{2}$$

$$u = A\,\frac{\mathrm{Btu}}{\mathrm{lb}}\quad p = B\,\frac{\mathrm{lbf}}{\mathrm{in^2}}\quad v = C\,\frac{\mathrm{ft^3}}{\mathrm{lb}}\quad V = D\,\frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{sec}}$$

我们将数值连同单位一起代入方程并进行转换.

$$h_0 = A\,\frac{\mathrm{Btu}}{\mathrm{lb}} \times \frac{778\ \mathrm{ft\ lbf}}{\mathrm{Btu}} + B\,\frac{\mathrm{lbf}}{\mathrm{in^2}}C\,\frac{\mathrm{ft^3}}{\mathrm{lb}} \times \frac{144\mathrm{in^2}}{\mathrm{ft^2}} + \frac{D^2}{2}\,\frac{\mathrm{ft^2}}{\mathrm{sec^2}} \times \frac{\mathrm{sec^2\,lbf}}{32.2\mathrm{lb\ ft}}$$

$$= \left(778A + 144BC + \frac{D^2}{2(32.2)}\right)\frac{\text{ft lbf}}{\text{lb}}$$

因此看出,我们将 g_c 处理为转换因子.

总之,在不同单位制中写出方程 $F = ma$ 是有用的.以下方程表明(当不用 g_c 时)量纲和单位之间的关系.

厘米·克·秒制:F(达因)$= m$(克)$\times a$(厘米/秒^2)

国际单位制:F(牛顿)$= m$(公斤)$\times a$(米/秒^2)

呎·磅·秒制:F(磅达)$= m$(磅质量)$\times a$(英呎/秒^2)

呎·磅·秒制:F(磅力)$= m$(斯勒格)$\times a$(英呎/秒^2)

表 B.1　量纲和单位

物理量	量纲		单位			
			公制		英制	
	MLT 量纲制	FLT 量纲制	厘米 克 秒单位制	国际单位制	呎磅秒单位制	工程单位制
长度	L	L	cm	m	ft	ft
质量	M	$FL^{-1}T^2$	gm	kg	lb	slug
时间	T	T	sec	s	sec	sec
速度	LT^{-1}	LT^{-1}	cm/sec	m/s	ft/sec	ft/sec
加速度	LT^{-2}	LT^{-2}	cm/sec^2	m/s^2	ft/sec^2	ft/sec^2
力	MLT^{-2}	F	gm cm/sec^2 = dyne	kg m/s^2 = N	lb ft/sec^2 = poundal	slug ft/sec^2 = lbf
动量,冲量	MLT^{-1}	FT	gm cm/sec = dyne sec	kg m/s = Ns	lb ft/sec = pdl sec	slug ft/sec = lbf sec
能量,功	ML^2T^{-2}	FL	gm cm^2/sec^2 = dyne cm = erg	kg m^2/sec^2 = N m = J	lb ft^2/sec^2 = ft pdl	slug ft^2/sec^2 = ft lbf
功率	ML^2T^{-3}	FLT^{-1}	gm cm^2/sec^3 = dyne cm/sec = erg/sec	kg m^2/s^3 = J/s = watt	lb ft^2/sec^3 = ft pdl/sec	slug ft^2/sec^3 = ft lbf/sec
密度	ML^{-3}	$FL^{-4}T^2$	gm/cm^3	kg/m^3	lb/ft^3	slug/ft^3
角速度	T^{-1}	T^{-1}	rad/sec	rad/s	rad/sec	rad/sec
角加速度	T^{-2}	T^{-2}	rad/sec^2	rad/s^2	rad/sec^2	rad/sec^2
力矩	ML^2T^{-2}	FL	gm cm^2/sec^2 = dyne cm	kg m^2/s^2 = N m	lb ft^2/sec^2 = ft pdl	slug ft^2/sec^2 = ft lbf
角动量	ML^2T^{-1}	FLT	gm cm^2/sec	kg m^2/s	lb ft^2/sec	slug ft^2/sec
惯性动量	ML^2	FLT^2	gm cm^2	kg m^2	lb ft^2	slug ft^2
压强,应力	$ML^{-1}T^{-2}$	FL^{-2}	gm/(cm sec^2) = dyne/cm^2	kg/(m s^2) = N/m^2	pdl/ft^2	lbf/ft^2
黏度(μ)	$ML^{-1}T^{-1}$	$FL^{-2}T$	gm/(cm sec) = dyne sec/cm^2	kg/(m s) = N s/m^2	lb/(ft sec) = pdl sec/ft^2	slug/(ft sec) = lbf sec/ft^2
运动黏度(ν)	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}	cm^2/sec	m^2/s	ft^2/sec	ft^2/sec
表面张力	MT^{-2}	FL^{-1}	gm/sec^2 = dyne/cm	kg/s^2 = N/m	lb/sec^2 = pdl/ft	slug/sec^2 = lbf/ft

表 B.2　单位换算表

长度	1 公里(km) = 1000 米	1 inch(in.) = 2.540cm
	1 米(m) = 100 厘米	1 foot(ft) = 30.48 cm
	1 厘米(cm) = 10^{-2}m	1 mile(mi) = 1.609 km
	1 毫米(mm) = 10^{-3}m	1 mil = 10^{-3}in.
	1 微米(μ) = 10^{-6}m	1 centimeter = 0.3937 in.
	1 毫微米(mμ) = 10^{-9}m	1 meter = 39.37 in.
	1 埃(A) = 10^{-10}m	1 kilometer = 0.6214 mile
面积	1 平方米(m^2) = 10.76ft^2	
	1 平方英尺(ft^2) = 929cm^2	
容积	1 升(l) = 1000cm^3 = 1.057 夸脱(qt) = 61.02 in^3 = 0.03532 ft^3	
	1 立方米(m^3) = 1000l = 35.32ft^3	
	1 立方英尺(ft^3) = 7.481 U.S. gal = 0.02832m^3 = 28.32l	
	1 美国加仑(gal) = 231 in^3 = 3.785l;1 英国加仑 = 1.201 美国加仑 = 277.4 in^3	
质量	1 公斤(kg) = 2.2046 lb = 0.06852 slug; 1 lb = 453.6 gm = 0.03108 slug	
	1slug = 32.174 lb = 14.59 kg	
速度	1 km/hr = 0.2778 m/sec = 0.6214 mi/hr = 0.9113 ft/sec	
	1 mi/hr = 1.467 ft/sec = 1.609 km/hr = 0.4470 m/sec	
密度	1 gm/cm^3 = 10^3 kg/m^3 = 62.43 lb/ft^3 = 1.940 slug/ft^3	
	1 lb/ft^3 = 0.01602 gm/cm^3;1 slug/ft^3 = 0.5154 gm/cm^3	
力	1 牛顿(N) = 10^5 达因 = 0.1020 kgf = 0.2248 lbf	
	1 磅力(lbf) = 4.448 N = 0.4536 kgf = 32.17 磅达	
	1 千克力(kgf) = 2.205 lbf = 9.807 N	
	1 美吨 = 2000 lbf;1 英吨 = 2240 lbf; 1 公吨 = 2205 lbf	
能量	1 焦耳(J) = 1 N m = 10^7 尔格 = 0.7376 ft lbf = 0.2389 cal = 9.481 × 10^{-4}英国热量单位	
	1 ft lbf = 1.356 J = 0.3239 cal = 1.285 × 10^{-3}Btu	
	1 卡(cal) = 4.186 J = 3.087 ft lbf = 3.968 × 10^{-3}Btu	
	1 Btu = 778 ft lbf = 1055 J = 0.293 瓦小时	
	1 千瓦小时(kw hr) = 3.60 × 10^6 J = 860.0 大卡 = 3413 Btu	
	1 电子伏特(eV) = 1.602 × 10^{-19} J	
功率	1 瓦 = 1J/s = 10^7 erg/sec = 0.2389 cal/sec	
	1 马力(hp) = 550 ft lbf/sec = 33000 ft lbf/min = 745.7 W	
	1 千瓦(kw) = 1.341 hp = 737.6 ft lbf/sec = 0.9483 But/sec	
压强	1 N/m^2 = 10 dyn/cm^2 = 9.869 × 10^{-6} atm = 2.089 × 10^{-2} lbf/ft^2 = 1 Pascal(Pa)	
	1 lbf/in^2 = 6895 N/m^2 = 5.171 厘米汞柱 = 27.68 英寸水柱	
	1 大气压(atm) = 1.013 × 10^5 N/m^2(Pa) = 1.013 × 10^6 dyn/cm^2 = 14.70 lbf/in^2 = 76 厘米汞柱 = 406.8 英寸水柱	
角度	1 弧度(rad) = 57.296°;1° = 0.017453 rad	

C　不同坐标系中的一些基本方程

1. 常黏度不可压缩流体运动的纳维-斯托克斯方程

如果黏度梯度不是很大,这些方程可以以高精确度应用于涉及黏度变化的流动问题.这一假定在大多数物理问题中有足够精确度,并且纳维－斯托克斯方程可以应用于大多数不可压缩流动问题.下面是所用的一些符号:

p = 压强

F = 体积力密度

μ = 黏度

$\frac{D}{Dt}$ = 随体导数(不同于矢量的分量)

矢量

V 为速度矢

$$\rho\frac{DV}{Dt}=\rho\left[\frac{\partial V}{\partial t}+(V\cdot\nabla)V\right]=-\nabla p+F+\mu\nabla^2V \tag{A.1}$$

实际上,$(V\cdot\nabla)V$ 项是一个准矢量表达式,在非笛卡儿坐标系中应用时,将它展开必须十分小心.以实矢形式表示加速度项将非常方便,并且运动方程可以写作另一形式:

$$\rho\left[\frac{\partial V}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-V\times(\nabla\times V)\right]=-\nabla p+F+\mu\nabla^2V \tag{A.2}$$

因为矢量算子与标量分量算子并不相同,在展开∇^2V 和DV/Dt 时也要十分小心.以下是十分有用的矢量恒等式:

$$\nabla^2V=\nabla(\nabla\cdot V)-\nabla\times(\nabla\times V)$$

笛卡儿张量

w_i 是 x_i 方向上的速度.

$$\rho\left[\frac{\partial w_i}{\partial t}+w_j\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right]=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+F_i+\mu\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j\partial x_j} \tag{A.3}$$

笛卡儿坐标系

u、v 和 w 分别是速度在 x、y 和 z 方向上的分量.在以下段落中:

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z},\qquad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\rho\frac{Du}{Dt}=F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2u \tag{A.4}$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=F_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\nabla^2v$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt}=F_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2w$$

以完整形式写出,它们变为

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+F_x+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+F_y+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{A.5}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+F_y+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

柱坐标系

v_r、v_θ 和 v_z 分别是速度在 r、θ 和 z 方向上的分量.在以下段落中:

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\rho\left[\frac{Dv_r}{Dt}-\frac{v_\theta^2}{r}\right]=F_r-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left[\nabla^2 v_r-\frac{v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right] \tag{A.6}$$

$$\rho\left[\frac{Dv_\theta}{Dt}+\frac{v_r v_\theta}{r}\right]=F_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\mu\left[\nabla^2 v_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r^2}\right]$$

$$\rho\frac{Dv_z}{Dt}=F_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2 v_z$$

以完整形式写出,它们变为

$$\rho\left[\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\theta^2}{r}\right]$$

$$=F_r-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}-\frac{v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right]$$

$$\rho\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{v_r v_\theta}{r}\right] \tag{A.7}$$

$$=F_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\mu\left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r^2}\right]$$

$$\rho\left[\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]$$

$$=F_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]$$

球坐标系

v_r、v_θ 和 v_ϕ 分别是速度在 r、θ 和 ϕ 方向上的分量.在以下段落中:

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$\rho\left[\frac{Dv_r}{Dt}-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r}\right]$$

$$=F_r-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left[\nabla^2 v_r-\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{2v_\theta\cot\theta}{r^2}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right]$$

$$\rho\left[\frac{Dv_\theta}{Dt}+\frac{v_r v_\theta-v_\phi^2\cot\theta}{r}\right]$$

$$=F_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\mu\left[\nabla^2 v_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right] \tag{A.8}$$

$$\rho\left[\frac{Dv_\phi}{Dt}+\frac{v_\phi v_r}{r}+\frac{v_\theta v_\phi\cot\theta}{r}\right]$$

$$=F_\phi-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi}+\mu\left[\nabla^2 v_\phi-\frac{v_\phi}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]$$

以完整形式写出,它们变为

$$\rho\left[\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r}\right]$$

$$= F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\phi^2} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} - \frac{2v_\theta\cot\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right]$$

$$\rho\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}\right]$$

$$= F_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \mu\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right)\right. \tag{A.9}$$

$$\left. + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\phi^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2\sin\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right]$$

$$\rho\left[\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi\cot\theta}{r}\right]$$

$$= F_\phi - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi} + \mu\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{r_2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial\phi^2} - \frac{v_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]$$

2. 应力-应变率关系

笛卡儿张量

w_i 是 x_i 方向上的速度. ϕ 是扩张算子, $\nabla\cdot\mathbf{V}$.

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \sigma'_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}\lambda\phi$$

$$= -P\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\delta_{ij}\frac{w_k}{\partial x_k}$$

$$= -P\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial w_k}{\partial x_k}\right) + \zeta\delta_{ij}\frac{\partial w_k}{\partial x_k} \tag{A.10}$$

笛卡儿坐标系

u、v 和 w 分别是速度在 x、y 和 z 方向上的分量.

$$\sigma_{xx} = -P + \sigma'_{xx} = -P + 2\mu e_{xx} + \lambda\nabla\cdot\mathbf{V}$$

$$= -P + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_{yy} = -P + \sigma'_{yy} = -P + 2\mu e_{yy} + \lambda\nabla\cdot\mathbf{V}$$

$$= -P + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_{zz} = -P + \sigma'_{zz} = -P + 2\mu e_{zz} + \lambda\nabla\cdot\mathbf{V}$$

$$= -P + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2\mu e_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2\mu e_{xz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2\mu e_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{A.11}$$

柱坐标系

v_r、v_θ 和 v_z 分别是速度在 r、θ 和 z 方向上的分量.

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -P + \sigma'_{rr} = -P + 2\mu e_{rr} + \lambda\nabla\cdot\mathbf{V} \\
&= -P + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r} + \lambda\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right\} \\
\sigma_{\theta\theta} &= -P + \sigma'_{\theta\theta} = -P + 2\mu e_{\theta\theta} + \lambda\nabla\cdot\mathbf{V} \\
&= -P + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r}\right) + \lambda\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right\} \\
\sigma_{zz} &= -P + \sigma'_{zz} = -P + 2\mu e_{zz} + \lambda\nabla\cdot\mathbf{V} \\
&= -P + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right\} \\
\sigma_{r\theta} &= \sigma_{\theta r} = 2\mu e_{r\theta} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right) \\
\sigma_{rz} &= \sigma_{zr} = 2\mu e_{rz} = \mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \\
\sigma_{\theta z} &= \sigma_{z\theta} = 2\mu e_{\theta z} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{A.12}$$

球坐标系

v_r、v_θ 和 v_ϕ 分别是速度在 r、θ 和 ϕ 方向上的分量.

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -P + \sigma'_{rr} = -P + 2\mu e_{rr} + \lambda\nabla\cdot\mathbf{V} \\
&= -P + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r} + \lambda\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right\} \\
\sigma_{\theta\theta} &= -P + \sigma'_{\theta\theta} = -P + 2\mu e_{\theta\theta} + \lambda\nabla\cdot\mathbf{V} \\
&= -P + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r}\right) + \lambda\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right\} \\
\sigma_{\phi\phi} &= -P + \sigma'_{\phi\phi} = -P + 2\mu e_{\phi\phi} + \lambda\nabla\cdot\mathbf{V} \\
&= -P + 2\mu\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right) \\
&\quad + \lambda\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right\} \\
\sigma_{r\theta} &= \sigma_{\theta r} = 2\mu e_{r\theta} = \mu\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right\} \\
\sigma_{r\phi} &= \sigma_{\phi r} = 2\mu e_{r\phi} = \mu\left\{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)\right\} \\
\sigma_{\theta\phi} &= \sigma_{\phi\theta} = 2\mu e_{\theta\phi} = \mu\left\{\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right\}
\end{aligned} \tag{A.13}$$

3. 一些有用的矢量运算

以下列出的算子$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$和$\nabla^2$是对标量的运算.除了在笛卡儿坐标系中外,其算子与矢量算子不同.

笛卡儿坐标系

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\tag{A.14}$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

柱坐标系

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\tag{A.15}$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

球坐标系

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2v_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\tag{A.16}$$

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

以下列出的$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$和$\nabla^2$是矢量的算子.(^)表示单位矢量.

笛卡儿坐标系 Z

$$\mathbf{V}=\hat{\mathbf{x}}u+\hat{\mathbf{y}}v+\hat{\mathbf{z}}w$$

$$(\nabla^2\mathbf{V})_x=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$$

$$(\nabla^2\mathbf{V})_y=\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v}{\partial z^2}$$

$$(\nabla^2\mathbf{V})_z=\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2w}{\partial z^2}\tag{A.17}$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}\mathbf{V}}{\mathrm{D}t}\right)_x=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}\mathbf{V}}{\mathrm{D}t}\right)_y=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}\mathbf{V}}{\mathrm{D}t}\right)_z=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}$$

柱坐标系

$$\boldsymbol{V}=\hat{\boldsymbol{r}}v_r+\hat{\boldsymbol{\theta}}\,v_\theta+\hat{\boldsymbol{z}}v_z$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{V})_r=\nabla^2 v_r-\frac{v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}=\left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}-\frac{v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right]$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{V})_\theta=\nabla^2 v_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial_\theta}-\frac{v_\theta}{r^2}=\left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r^2}\right]$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{V})_z=\nabla^2 v_z=\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\tag{A.18}$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}\right)_r=\frac{\mathrm{D}v_r}{\mathrm{D}t}-\frac{v_\theta^2}{r}=\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\theta^2}{r}$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}\right)_\theta=\frac{\mathrm{D}v_\theta}{\mathrm{D}t}+\frac{v_rv_\theta}{r}=\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{v_rv_\theta}{r}$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}\right)_z=\frac{\mathrm{D}v_z}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

球坐标系

$$\boldsymbol{V}=\hat{\boldsymbol{r}}v_r+\hat{\boldsymbol{\theta}}\,v_\theta+\hat{\boldsymbol{\phi}}\,v_\phi$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{V})_r=\nabla^2 v_r-\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{2v_\theta\cot\theta}{r^2}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{V})_\theta=\nabla^2 v_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{V})_\phi=\nabla^2 v_\phi-\frac{v_\phi}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}+\frac{2}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}\right)_r=\frac{Dv_r}{Dt}-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r}=\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r}\tag{A.19}$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}\right)_\theta=\frac{Dv_\theta}{Dt}+\frac{v_rv_\theta-v_\phi^2\cot\theta}{r}$$

$$=\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}+\frac{v_rv_\theta-v_\phi^2\cot\theta}{r}$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}\right)_\phi=\frac{Dv_\phi}{Dt}+\frac{v_\phi v_r+v_\theta v_\phi\cot\theta}{r}$$

$$=\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+\frac{v_\phi v_r+v_\theta v_\phi\cot\theta}{r}$$

不同坐标系中$\nabla^2 v_r$、$\nabla^2 v_\theta$和$\nabla^2 v_\phi$的表达式根据方程(A.14),(A.15)和(A.16)由标量算子∇^2给出.

4. 耗散函数

在归一化正交坐标系中,机械或摩擦耗散函数 Φ(以应变率张量 e_{ij})定义为

$$\Phi=\mu[2(e_{11}^2+e_{22}^2+e_{33}^2)+(2e_{23})^2+(2e_{31})^2+(2e_{12})^2]+\lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})^2\tag{A.20}$$

(在有的教科书中,Φ 的定义与我们这里的定义差一个因子 μ.)λ 为我们在第三章中定义的第二黏度系数.

以应力张量表示的笛卡儿张量

$$\Phi = \sigma'_{ij}\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \tag{A.21}$$

笛卡儿坐标系

$$\Phi = 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] + \lambda\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right]^2 \tag{A.22}$$

柱坐标系

$$\Phi = \mu\left[2\left\{\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right\} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)^2\right] + \lambda\left[\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right]^2 \tag{A.23}$$

球坐标系

$$\begin{aligned}\Phi = \mu\Bigg[&2\left\{\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right)^2\right\} \\ &+ \left\{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)\right\}^2 \\ &+ \left\{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)\right\}^2 + \left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right\}^2\Bigg] \\ &+ \lambda\left[\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right]^2\end{aligned} \tag{A.24}$$

D　可压缩流动数值表

表 D.1　(理想气体,$k=1.4$)等熵流动参数与 M 的关系

M	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	a/a_0	A^*/A
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.00000
0.10	0.9930	0.9950	0.9980	0.9990	0.1718
0.20	0.9725	0.9803	0.9921	0.9960	0.3374
0.30	0.9395	0.9564	0.9823	0.9911	0.4914
0.40	0.8956	0.9243	0.9690	0.9844	0.6289
0.50	0.8430	0.8852	0.9524	0.9759	0.7464
0.60	0.7840	0.8405	0.9328	0.9658	0.8416
0.70	0.7209	0.7916	0.9107	0.9543	0.9138
0.80	0.6560	0.7400	0.8865	0.9416	0.9632
0.90	0.5913	0.6870	0.8606	0.9277	0.9912
1.00	0.5283	0.6339	0.8333	0.9129	1.0000
1.10	0.4684	0.5817	0.8052	0.8973	0.9921
1.20	0.4124	0.5311	0.7764	0.8811	0.9705
1.30	0.3609	0.4829	0.7474	0.8645	0.9378

续表

M	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	a/a_0	A^*/A
1.40	0.3142	0.4374	0.7184	0.8476	0.8969
1.50	0.2724	0.3950	0.6897	0.8305	0.8502
1.60	0.2353	0.3557	0.6614	0.8133	0.7998
1.70	0.2026	0.3197	0.6337	0.7961	0.7476
1.80	0.1740	0.2868	0.6068	0.7790	0.6949
1.90	0.1492	0.2570	0.5807	0.7620	0.6430
2.00	0.1278	0.2300	0.5556	0.7454	0.5926
2.10	0.1094	0.2058	0.5313	0.7289	0.5444
2.20	0.09352	0.1841	0.5081	0.7128	0.4988
2.30	0.07997	0.1646	0.4859	0.6971	0.4560
2.40	0.06840	0.1472	0.4647	0.6817	0.4161
2.50	0.05853	0.1317	0.4444	0.6667	0.3793
2.60	0.05012	0.1179	0.4252	0.6521	0.3453
2.70	0.04295	0.1056	0.4068	0.6378	0.3142
2.80	0.03685	0.09463	0.3894	0.6240	0.2857
2.90	0.03165	0.08489	0.3729	0.6106	0.2598
3.00	0.02722	0.07623	0.3571	0.5976	0.2362
3.10	0.02345	0.06852	0.3422	0.5850	0.2147
3.20	0.02023	0.06165	0.3281	0.5728	0.1953
3.30	0.01748	0.05554	0.3147	0.5609	0.1777
3.40	0.01513	0.05009	0.3019	0.5495	0.1617
3.50	0.01311	0.04523	0.2899	0.5384	0.1473
3.60	0.01138	0.04089	0.2784	0.5276	0.1342
3.70	9.903×10^{-3}	0.03702	0.2675	0.5172	0.1224
3.80	8.629×10^{-3}	0.03355	0.2572	0.5072	0.1117
3.90	7.532×10^{-3}	0.03044	0.2474	0.4974	0.1021
4.00	6.586×10^{-3}	0.02766	0.2381	0.4880	0.09329
4.10	5.769×10^{-3}	0.02516	0.2293	0.4788	0.08536
4.20	5.062×10^{-3}	0.02292	0.2208	0.4699	0.07818
4.30	4.449×10^{-3}	0.02090	0.2129	0.4614	0.07166
4.40	3.918×10^{-3}	0.01909	0.2053	0.4531	0.06575
4.50	3.455×10^{-3}	0.01745	0.1980	0.4450	0.06038
4.60	3.053×10^{-3}	0.01597	0.1911	0.4372	0.05550
4.70	2.701×10^{-3}	0.01464	0.1846	0.4296	0.05107
4.80	2.394×10^{-3}	0.01344	0.1783	0.4223	0.04703
4.90	2.126×10^{-3}	0.01233	0.1724	0.4152	0.04335
5.00	1.890×10^{-3}	0.01134	0.1667	0.4082	0.04000
6.00	6.334×10^{-4}	5.194×10^{-3}	0.1220	0.3492	0.01880
7.00	2.416×10^{-4}	2.609×10^{-3}	0.09259	0.3043	9.602×10^{-3}
8.00	1.024×10^{-4}	1.414×10^{-3}	0.07246	0.2692	5.260×10^{-3}
9.00	4.739×10^{-5}	8.150×10^{-4}	0.05814	0.2411	3.056×10^{-3}
10.00	2.356×10^{-5}	4.948×10^{-4}	0.04762	0.2182	1.866×10^{-3}
100.00	2.790×10^{-12}	5.583×10^{-9}	4.998×10^{-4}	0.02236	2.157×10^{-8}
∞	0	0	0	0	0

表 D.2　马赫数和马赫角与普朗特-迈耶函数的关系

ν(度)	M	μ(度)	ν(度)	M	μ(度)	ν(度)	M	μ(度)
0.0	1.000	90.000	20.0	1.775	34.290	40.0	2.538	23.206
0.5	1.051	72.099	20.5	1.792	33.915	40.5	2.560	22.997
1.0	1.082	67.574	21.0	1.810	33.548	41.0	2.585	22.790
1.5	1.108	64.451	21.5	1.827	33.188	41.5	2.604	22.585
2.0	1.133	61.997	22.0	1.844	32.834	42.0	2.626	22.382
2.5	1.155	59.950	22.5	1.862	32.488	42.5	2.649	22.182
3.0	1.177	58.180	23.0	1.879	32.148	43.0	2.671	21.983
3.5	1.198	56.614	23.5	1.897	31.814	43.5	2.694	21.786
4.0	1.218	55.205	24.0	1.915	31.486	44.0	2.718	21.591
4.5	1.237	53.920	24.5	1.932	31.164	44.5	2.741	21.398
5.0	1.256	52.738	25.0	1.950	30.847	45.0	2.764	21.207
5.5	1.275	51.642	25.5	1.968	30.536	45.5	2.788	21.017
6.0	1.294	50.619	26.0	1.986	30.229	46.0	2.812	20.830
6.5	1.312	49.658	26.5	2.004	29.928	46.5	2.836	20.644
7.0	1.330	48.753	27.0	2.023	29.632	47.0	2.861	20.459
7.5	1.348	47.896	27.5	2.041	29.340	47.5	2.886	20.277
8.0	1.366	47.082	28.0	2.059	29.052	48.0	2.910	20.096
8.5	1.383	46.306	28.5	2.078	28.769	48.5	2.963	19.916
9.0	1.400	45.566	29.0	2.096	28.491	49.0	2.961	19.738
9.5	1.418	44.857	29.5	2.115	28.216	49.5	2.987	19.561
10.0	1.435	44.177	30.0	2.134	27.945	50.0	3.013	19.386
10.5	1.452	43.523	30.5	2.153	27.678	50.5	3.309	19.213
11.0	1.469	42.894	31.0	2.172	27.415	51.0	3.065	19.041
11.5	1.486	42.287	31.5	2.191	27.155	51.5	3.092	18.870
12.0	1.503	41.701	32.0	2.210	26.889	52.0	3.119	18.701
12.5	1.520	41.134	32.5	2.230	26.646	52.5	3.146	18.532
13.0	1.537	40.587	33.0	2.249	26.397	53.0	3.174	18.366
13.5	1.551	40.053	33.5	2.269	26.151	53.5	3.202	18.200
14.0	1.571	39.537	34.0	2.289	25.908	54.0	3.230	18.036
14.5	1.588	39.035	34.5	2.309	25.778	54.5	3.258	17.873
15.0	1.605	38.547	35.0	2.329	25.430	55.0	3.287	17.711
15.5	1.622	38.073	35.5	2.349	25.196	55.5	3.316	17.551
16.0	1.639	37.611	36.0	2.369	24.965	56.0	3.346	17.391
16.5	1.655	37.160	36.5	2.390	24.736	56.5	3.375	17.233
17.0	1.672	36.721	37.0	2.410	24.510	57.0	3.406	17.076
17.5	1.689	36.293	37.5	2.431	24.287	57.5	3.436	16.920
18.0	1.706	35.874	38.0	2.452	24.066	58.0	3.467	16.765
18.5	1.724	35.465	38.5	2.473	23.847	58.5	3.498	16.611
19.0	1.741	35.065	39.0	2.495	23.631	59.0	3.530	16.458
19.5	1.758	34.673	39.5	2.516	23.418	59.5	3.562	16.306

续表

ν(度)	M	μ(度)	ν(度)	M	μ(度)	ν(度)	M	μ(度)
60.0	3.594	16.155	75.0	4.801	12.021	90.0	6.819	8.433
60.5	3.627	16.005	75.5	4.852	11.894	90.5	6.911	8.320
61.0	3.660	15.856	76.0	4.903	11.768	91.0	7.005	8.207
61.5	3.694	15.708	76.5	4.955	11.642	91.5	7.102	8.095
62.0	3 728	15.561	77.0	5.009	11.517	92.0	7.201	7.983
62.5	3.762	15.415	77.5	5.063	11.392	92.5	7.302	7.871
63.0	3.797	15.270	78.0	5.118	11.268	93.0	7.406	7.760
63.5	3.832	15.126	78.5	5.174	11.145	93.5	7.513	7.649
64.0	3.868	14.983	79.0	5.231	11.022	94.0	7.623	7.538
64.5	3.094	14.840	79.5	5.289	10.899	94.5	7.735	7.428
65.0	3.941	14.698	80.0	5.348	10.777	95.0	7.851	7.318
65.5	3.979	14.557	80.5	5.408	10.656	95.5	7.970	7.208
66.0	4.016	14.417	81.0	5.470	10.535	96.0	8.092	7.099
66.5	4.055	14.278	81.5	5.532	10.414	96.5	8.218	6.989
67.0	4.094	14.140	82.0	5.596	10.294	97.0	8.347	6.881
67.5	4.133	14 002	82.5	5.661	10.175	97.5	8.480	6.772
68.0	4.173	23.856	83.0	5.727	10.056	98.0	8.618	6.644
68.5	4.214	13.729	83.5	5.795	9.937	98.5	8.759	6.556
69.0	4.255	13.593	84.0	5.864	9.819	99.0	8.905	6.448
69.5	4.297	13.459	84.5	5.935	9.701	99.5	9.055	6.340
70.0	4.339	13.325	85.0	6.006	9.584	100.0	9.210	6.233
70.5	4.382	13.191	85.5	6.080	9.467	100.5	9.371	6.126
71.0	4.426	13.059	86.0	6.155	9.350	101.0	9.536	6.019
71.5	4.470	13.927	86.5	6.232	9.234	101.5	9.708	5.913
72.0	4.515	12.795	87.0	6.310	9.119	102.0	9.885	5.806
72.5	4.561	12.665	87.5	6.390	9.003			
73.0	4.608	12.535	88.0	6.472	8.888			
73.5	4.655	12.406	88.5	6.556	8.774			
74.0	4.703	12.277	89.0	6.642	8.660			
74.5	4.752	12.149	89.5	6.729	8.546			

表 D.3 激波流动参数(理想气体,$k=1.4$)

M_{1n}	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	a_2/a_1	p_2^0/p_1^0	M_2 仅对正激波
1.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.0000	1.0000
1.10	1.245	1.169	1.065	1.032	0.9989	0.9118
1.20	1.513	1.342	1.128	1.062	0.9928	0.8422
1.30	1.805	1.516	1.191	1.091	0.9794	0.7860
1.40	2.120	1.690	1.255	1.120	0.9582	0.7397
1.50	2.458	1.862	1.320	1.149	0.9298	0.7011
1.60	2.820	2.032	1.388	1.178	0.8952	0.6684
1.70	3.205	2.198	1.458	1.208	0.8557	0.6405
1.80	3.613	2.359	1.532	1.238	0.8127	0.6165
1.90	4.045	2.516	1.608	1.268	0.7674	0.5956
2.00	4.500	2.667	1.688	1.299	0.7209	0.5773
2.10	4.978	2.812	1.770	1.331	0.6742	0.5613
2.20	5.480	2.951	1.857	1.361	0.6281	0.5471
2.30	6.005	3.085	1.947	1.395	0.5833	0.5344
2.40	6.553	3.212	2.040	1.428	0.5401	0.5231
2.50	7.125	3.333	2.138	1.462	0.4990	0.5130
2.60	7.720	3.449	2.238	1.496	0.4601	0.5039
2.70	8.338	3.559	2.343	1.531	0.4236	0.4956

续表

M_{1n}	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	a_2/a_1	p_2^0/p_1^0	M_2 仅对正激波
2.80	8.980	3.664	2.451	1.566	0.3895	0.4882
2.90	9.645	3.763	2.563	1.601	0.3577	0.4814
3.00	10.33	3.857	2.679	1.637	0.3283	0.4752
4.00	18.50	4.571	4.047	2.012	0.1388	0.4350
5.00	29.00	5.000	5.800	2.408	0.06172	0.4152
6.00	41.83	5.268	7.941	2.818	0.02965	0.4042
7.00	57.00	5.444	10.47	3.236	0.01535	0.3974
8.00	74.50	5.565	13.39	3.659	8.488×10^{-3}	0.3929
9.00	94.33	5.651	16.69	4.086	4.964×10^{-3}	0.3898
10.00	116.5	5.714	20.39	4.515	3.045×10^{-3}	0.3876
100.00	11666.5	5.997	1945.4	44.11	3.593×10^{-8}	0.3781
∞	∞	6	∞	∞	0	0.3780

表 D.4　绝热等截面摩擦流参数(范诺线),理想气体,$k=1.4$

M	T/T^*	p/p^*	p_0/p_0^*	V/V^* 和 ρ^*/ρ	$4fL_{max}/D$
0.00	1.200	∞	∞	0.00000	∞
0.20	1.1905	5.4555	2.9635	0.21822	14.533
0.40	1.1628	2.6958	1.5901	0.43133	2.3085
0.60	1.1194	1.7634	1.1882	0.63481	0.49081
0.80	1.06383	1.2892	1.03823	0.82514	0.07229
1.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0
1.20	0.93168	0.80436	1.03044	1.1583	0.03364
1.40	0.86207	0.66320	1.1149	1.2999	0.09974
1.60	0.79365	0.55679	1.2502	1.4254	0.17236
1.80	0.72816	0.47407	1.4390	1.5360	0.24189
2.00	0.66667	0.40825	1.6875	1.6330	0.30499
2.50	0.53333	0.29212	2.6367	1.8257	0.43197
3.00	0.42857	0.21822	4.2346	1.9640	0.52216
3.50	0.34783	0.16850	6.7896	2.0642	0.58643
4.00	0.28571	0.13363	10.719	2.1381	0.63306
4.50	0.23762	0.10833	16.562	2.1936	0.66764
5.00	0.20000	0.08944	25.000	2.2361	0.69381
6.00	0.14634	0.06376	53.180	2.2953	0.72987
7.00	0.11111	0.04762	104.14	2.3333	0.75281
8.00	0.08696	0.03686	190.11	2.3591	0.76820
9.00	0.06977	0.02935	327.19	2.3772	0.77898
10.00	0.05714	0.02390	535.94	2.3905	0.78683
∞	0	0	∞	2.4495	0.82153

E　笛卡儿张量

笛卡儿张量符号是在笛卡儿坐标系中书写方程的一个速写方式.应该强调的是,这一张量符号并不是一个真正的张量符号,不能用于笛卡儿坐标系以外的任何坐标系.根据笛卡儿张量方程不可能推导出其他任何坐标系中方程的恰当形式,因为它是从归一化的张量或矢量形式得到的.

考虑任一笛卡儿矢量,如其笛卡儿分量为 $w_1=V_x$, $w_2=V_y$ 和 $w_3=V_z$ 的速度 $\mathbf{V}$.我们

用下标 i,j，或任何其他数字下标，可以取作 1,2 或 3，来表示矢量的分量. 1,2 和 3 分别表示矢量的 x,y 和 z 分量.

因此，速度的分量可以表示为

$$w_i$$

式中 i 取数值 1,2 或 3，对应于 x,y 或 z.

一个没有下标的量代表标量，如速度势，表示为 ϕ.

笛卡儿坐标系 x,y 和 z 表示为 x_i（比如说，或者 x_j）.

当在一项中下标出现两次，通常意味着（在整个三维空间中）求和. 例如，表达式

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j}$$

是一个九项矩阵，其中 i 和 j 都取数值 1,2,3. 表达式

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i}$$

是一个标量，（根据求和约定）它代表

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \mathbf{V}$$

同样，σ_{ij} 为应力张量的九个分量（它是一个 3×3 矩阵）. 对称条件表示为 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

有时在下标中用一逗号表示相对于空间坐标的微分

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = w_{i,j}$$

因此 $w_{i,i} = \nabla \cdot \mathbf{V}$.

克罗内克尔符号 δ_{ij} 是一个具有以下值的算子：

$$\delta_{ij} = 0,\ i \neq j$$

$$\delta_{ij} = 1,\ i = j$$

例如

$$\sigma_{ij}\delta_{ij}$$

表示应力张量的对角项，δ_{11}，δ_{22} 和 δ_{33}. 一般，求和并不意味着要用克罗内克尔符号.

在笛卡儿张量符号中的某些矢量运算如下（ϕ 为一标量，$\mathbf{V}$ 为一具有分量 w_i 的速度）：这些表达式仅在笛卡儿坐标系中准确.

$$\nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{V} = \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_3^2}$$

（这是一个具有由 j 给出分量的矢量，并在所有 i 范围内求和.）

关于张量符号的进一步资料，一般建议参考下列文献：

Borg, S. F., *Matrix-Tensor Methods in Continuum Mechanics*. Van Nostrand, 1963.
Myklestad, N. O., *Cartesian Tensors*, Van Nostrand, 1967.
Synge, J. L., and Schild, A., *Tensor Calculus*, University of Toronto Press, 1949.

F　矢量恒等式

$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 为矢量；ϕ 为标量.

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})+(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})&=\boldsymbol{B}[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})]-\boldsymbol{A}[\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})]\\&=\boldsymbol{C}[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{D})]-\boldsymbol{D}[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]\end{aligned}$$

$$\nabla^2\phi=\nabla\cdot\nabla\phi$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=(\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}=0$$

$$\nabla\times\nabla\phi=0$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}=\nabla\left(\frac{|\boldsymbol{A}|^2}{2}\right)-\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}$$

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

G　流动测量技术

若干种简单装置被广泛地应用于测量管网和管道中流体的容积流量.应用广义伯努利方

程可以在所测量得的压强降与容积流量之间建立起一个简单的关系式.我们将讨论几个实际应用的装置.

通过具有尖锐边缘的孔板流量计的流动

首先,考虑如图 G-1 所示的不可压缩液体通过箱体上一个具有尖锐边缘的平板小孔的流动.如果箱体的截面积与小孔的截面积相比足够大,以至于箱内液体上表面的下降速度可以忽略,我们就能写出点 1 和点 2 之间(在表压强 $p_1=p_2=0$ 下)的伯努利方程,可以得到

$$V = \sqrt{2gh}$$

由于流线存在曲率,流出射流的截面积将收缩,并且实际上存在一个最小截面积,那里的(在点 2 处)速度方向一致.这一最小截面称为收缩断面.通过小孔的容积流量可以写作为

$$Q = C_v C_c A_0 \sqrt{2gh} = C_d A_0 \sqrt{2gh}$$

式中 C_c 为 A_0 和 A_v 之间的面积修正

$$A_v = C_c A_0$$

以及 C_v 是伯努利方程中摩擦损失的修正系数

$$V = C_v \sqrt{2gh}$$

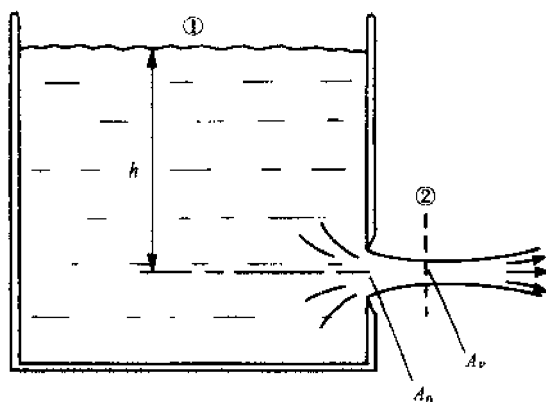


图 G-1

乘积 $C_v C_c$ 称为流量系数 C_d,并且对于给定的小孔设计,其数值通常由实验确定. C_c 的数值在 0.6~1.0 之间,决定于小孔周边的情况,以及 C_v 的数值一般在 0.8~0.99 之间.

在实践中,通常在管道中接入一个具有尖锐边缘的小孔(孔板),通过小孔的压强降用压强表或其他形式的压强计进行测量,如图 G-2 所示. A_0 是平板上小孔的开孔面积.写出 1(小孔上游)和 2(小孔下游)之间的伯努利方程,并假定流体为不可压缩流体

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2}$$

以及连续方程

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 = A_0 V_0$$

式中 A_2 为下游射流面积(它可以是或不是收缩断面),我们得到

$$Q = \frac{C_v A_2 \sqrt{(2/\rho)(p_1 - p_2)}}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} = \frac{C_d A_0 \sqrt{(2/\rho)(p_1 - p_2)}}{\sqrt{1 - (A_0/A_1)^2}}$$

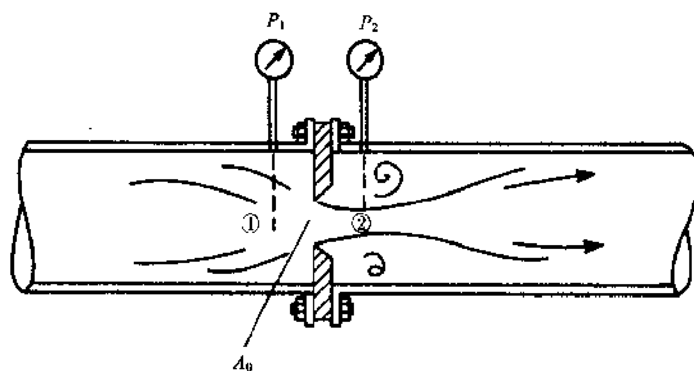


图 G-2　孔板流量计

总流量系数 C_d 决定于小孔的精确形状和测压点的位置，点 1 和 2，还要考虑因 A_0 和 A_2 之间的面积差和所有损失所作的修正. 典型的 C_d 数值在 0.6～0.8 范围内. 对于每个实际应用的孔板，其数值由实验确定.

如果压强降(p_1-p_2)与 p_1 相比足够小，以至于 ρ 近似为常数，上面的方程也适用于可压缩流动. 在气体管道中，$\Delta p=p_1-p_2$ 可能只相当于若干英寸水柱，面 p_1 可以有几百 psi. 如果可压缩的作用很重要，应该应用可压缩流动的伯努利方程以得到更准确的结果.

通过文丘利流量计的流动

以上讨论的平板孔板流量计可以容易地安装在管道的法兰中间，在实践中得到广泛应用. 另一种流量计是文丘利流量计(图 G-3)，它损失小但安装比较困难. 流动的收缩由流道形状决定，其总流量系数 C_d 通常为 0.98～0.99 的量级.

其容积流量的表达式与孔板的相同，式中 A_0 为测量压强 p_2 处的最小面积.

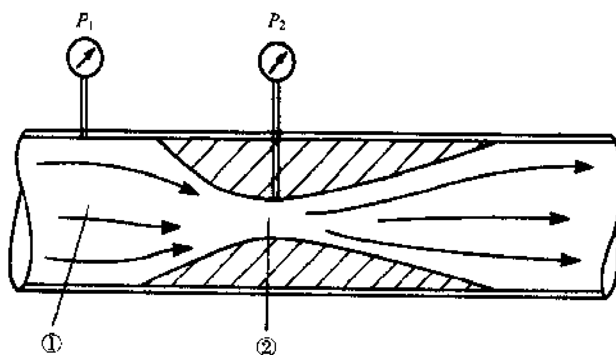


图 G-3　文丘利流量计

习题答案

第二章

2.15 (a)111in, (b) 8.14in

2.16 3.78psi

2.17 0.747psi

2.18 0.0205psi

2.19 0.00419psi

2.20 585lbf

2.22 $8.47(10)^4$ lbf; $F_N = 0$

2.23 如果容器处于静止状态结果相同

2.24 6.94ft

2.25 $p_B - p_A = \gamma$psf; $p_D - p_A = 1.61\gamma$psf; $p_C - p_A = 0.61\gamma$psf

2.26 $\dfrac{\Delta a}{\Delta p} = \dfrac{D}{4t\gamma}$,其中 D 为杯的平均直径,t 为杯壁厚度

2.30 水表面与倾斜面平行

2.31 与最小深度等于闭口容器高度的开口容器的转动相同

2.32 $p = \dfrac{1}{2}\rho r^2\omega^2$,与垂直位置无关

2.33 $p_{\text{top}} + \rho a(H-h)$

2.34 $p - p_0 = \dfrac{1}{2}\rho_1\omega^2 r^2 + \rho_1 g(z_{01} - z)$, $z_{01} > z - \dfrac{\omega^2 r^2}{2g} > z_{02}$

$p - p_0 = \dfrac{1}{2}\rho_2\omega^2 r^2 + \rho_2 g(z_{02} - z) + \rho_1 g(z_{01} - z_{02})$, $z_{02} > z - \dfrac{\omega_2 r^2}{2g}$

自由表面:$z = z_{01} + \dfrac{1}{2}\rho\omega^2 r^2$

界面:$z = z_{02} + \dfrac{1}{2}\rho\omega^2 r^2$

2.35 形状并不重要.L 和 h 是有关的参数

2.30 $\sigma \dfrac{\pi D^2}{4NA}(p_c + \rho\omega^2 D^2/16)$,其中 ρ = 油的密度,σ = 拉伸应力,N = 螺栓数目,A = 螺栓截面积,p_c = 注入泵出口压强,ω 以 rad/sec 为单位

第三章

3.17 0.0119ft^3/sec

3.18 $F = \dfrac{1}{3}\pi\rho a^2 V_0^2 + \pi a^2(\rho_2 - \rho_1)$

3.19 $p_1 = p_2 + 2\tau_0 L/a + \rho V_0^2/3$

3.21 10.6fps

3.22 16.21psi

3.23 (a)$Q = \pi a^2 V_c/2$, (b)$\dfrac{1}{3}\pi\rho a^2 V_c^2$, (c) $\dfrac{1}{8}\pi\rho a^2 V_c^3$

3.24 47.0bp

3.25 18.0ft^3/sec, 4760 lbf

3.26 437 ft/sec

3.27 8.66 sec

3.29 27.4 psi/ft

3.33 2.32 ft/sec^2

3.34 $Q=A_2\sqrt{2gh_1}$, $A_2\ll A_1$, $h_2<\frac{p_{atm}}{\rho g}$

3.35 $-\rho U_2 h/6$

3.36 $D=-0.63\rho U^2 D$

3.37 76.5 rpm

3.38 $\omega=\sqrt{p_0/x_0\rho H}$,其中 p_0 为大气压强

第四章

4.11 Lift = 2150 lb

4.12 $f=0.028$.每英里压降=168psi=484 英尺油柱=387 英尺水柱,假定比重为0.8.

4.14 $C_D=0.18$. $D=20$ lb,与模型试验相同

4.18 Π's 为 $\rho DV/\mu$ 和 $\omega D/V$

4.19 可用 $\omega D/V$ 进行模化,而不是用不太重要的 $\rho DV/\mu$ 模化.

4.20 弗劳德模化要求 $V_m=\sqrt{20}$ mph 并与流体黏度无关,这里雷诺数模化是不现实的,因为对于 $V_m=$ 5mph,要求 $\nu=1.36\times10^{-7}$,这样的液体是不存在的.

4.22 效率=57%, $Q=135$ft^3/sec, $H=90$ ft,功率=6075 hp

4.24 11.25°F

第五章

5.15 0.305 in

5.16 0.00151 lbf/ft^2

5.17 0.125 lbf; 0.000705

5.21 $1.29(UL/\nu)^{-1/2}$

5.24 $\frac{0.075h^2V_1^2}{[h-0.1\sqrt{x}/8]^3\sqrt{x}}$; 32.5 ft/sec^2

5.25 $\rho U^2/12$

5.26 $p-p_{出口}=-1.03(10)^{-3}$psi

5.28 0.338 lbf/ft

5.29 $p-p_{出口}=-6.67(10)^{-3}$psi

5.30 3.43 lbf

5.33 0.460 lbf

5.34 0.0735 hp

5.35 $\mu=1.16(10)^{-4}$ lbf sec/in^2

5.36 7270 rpm

5.37 $\pi\mu(\omega_1-\omega_2)(R_2^4-R_1^4)/2T_{in}$

5.38 1.12 ft/sec

5.39 23.0 ft

5.40 23.6 ft/sec

5.42 12.6 ft/sec

5.43 0.0923 psi

5.44 0.216 psi

5.45 $T=\frac{A}{a}\sqrt{\frac{2}{g}}\left[\sqrt{h_0+h_1}-\sqrt{h_0}\right]$

5.47 $F=\frac{\pi DL\mu V}{h}\left[1+\frac{3}{h^2}\left(\frac{d^2}{4}-h_2\right)\right]\approx\frac{3}{4}(d/h)^3\pi L\mu V$ 其中 $h=\frac{D_c-D}{2}$

第六章

6.13 26.6 lbf/ft

6.16　力 $=2m^2\rho\int_c^{\infty}\frac{(x^2-a^2)^2}{(x^2+a^2)^4}\mathrm{d}x=\frac{3\pi m^2\rho}{16a^3}$

6.17　力 $=\frac{m^2\rho}{a^3}\left(\frac{3\pi}{16}\cos^2\alpha+\frac{\pi}{4}\sin^2\alpha-\frac{1}{3}\sin2\alpha\right)$

6.18　没有差别，因为 F 决定于 m^2

6.20　$F=-m\ln(\sinh\pi z/2d)$

6.21　$\phi=A(x^2-y^2)$，$\psi=(A)(2xy)$

6.23　$F=-\frac{Q}{2\pi}\ln(\sinh\pi z/d)-U_0z$

6.24　$F=\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln\left(\frac{z-\mathrm{i}d}{z+\mathrm{i}d}\right)$，流线为嵌套的圆.

6.31　$u-\mathrm{i}v=-\frac{Q}{2\pi}\left[\frac{z-(b+\mathrm{i}a)}{z-(b-\mathrm{i}a)}+\frac{z+(b-\mathrm{i}a)}{z-(b+\mathrm{i}a)}+\frac{z+(b+\mathrm{i}a)}{z+(b-\mathrm{i}a)}+\frac{z+(b-\mathrm{i}a)}{z+(b+\mathrm{i}a)}\right]$

6.32　$F=-\frac{Q}{2\pi}\ln\left\{\prod_{n=0}^{7}\left[z-a\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4)(1/2+n)}\right]\right\}$

6.34　$ry=\Gamma^2/4\pi^2g$，其中 y 是从无穷远处的自由表面高度向下至 r 处的自由表面计量的坐标.

第七章

7.28　4880 ft/sec

7.29　0.313；1.11

7.30　0.182

7.31　16.1 psi

7.32　72.5 psi；179.2 Btu/lb；822°R

7.33　0.00256 ft^2

7.34　18.1 lb/sec

7.35　(a)0.00806 ft^2；0.01385 ft^2．(b) 2.01

7.36　0.222 lb/sec；1590 ft/sec

7.37　1.40

7.38　1198 ft/sec

第八章

8.8　$M_2=2.6$；$T_2=381°\mathrm{R}$；$p_2=5.5$ psi

8.9　$M_2=1.45$；$T_2=638°\mathrm{R}$；$p_2=31$ psi

8.10　β(底部)$=15°$；β(顶)$=19.5°$

8.11　$M_2=2.6$；$T_2=437°\mathrm{R}$；$p_2=3.93$ psi

8.12　$D_2=0.68D_1$

8.13　$D_2=1.75D_1$

8.15　对第 n 个半波长，$\frac{\Delta p}{p_1}=\frac{(-1)^n\epsilon}{\lambda\sqrt{M_1^2-1}}$

8.16　$L=1.03cp_1$ 每单位长度(激波膨胀波理论).

8.17　$G=\frac{c}{2\sqrt{M_1^2-1}}$

8.19　$C_L=\frac{4\bar{\alpha}}{\sqrt{M_1^2-1}}$，$C_D=\frac{4}{\sqrt{M_1^2-1}}\left[\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{H}{c}\right)^2+\bar{\alpha}^2+2\pi^2\left(\frac{Y}{c}\right)^2\right]$

8.22　$|\theta|=53°$

8.24　反射前激波速度 $=1160$ ft/sec.

译 后 记

《流体动力学》一书出自美国“Schanm's outlines”。该书自 1967 年初版以来，已经过两次修订。它既可以作为大学本科生流体力学的独立教材，也可以用作补充教材。本书的特色是广泛地涉及到流体力学的各个领域，包含着许多最新成果，以及一些当前研究的前沿课题，着重于揭示流体动力学的物理实质和数学描述，学用并重，配合有大量的习题。本书反映了当代美国高等教育课程内容和教材改革的思想，于国人有一定的参考价值，特根据原书 1999 年第三版译出。

本书序言和第一、二、三章由徐燕侯教授翻译，第四、五、六、十一章及附录由过明道教授翻译，第七、八、十、十三章由徐立功教授翻译，第九、十二章由陈义良教授翻译。在翻译过程中，虽经相互磋商和校订，但在译文中疏漏和错误之处难免，恳请读者指正。

译者

2002.1